

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

Déterminer une solution réalisable optimale

Comme sélectionner le vecteur entrant?

On veut diminuer la valeur de la fonction objectif.

Supposons que nous avons la solution de base réalisable

$$(\mathbf{x}_B, 0) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$$

correspondant au tableau

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\cdots	\mathbf{a}_m	\mathbf{a}_{m+1}	\mathbf{a}_{m+2}	\cdots	\mathbf{a}_n	\mathbf{b}
1	0	\cdots	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	\cdots	y_{1n}	y_{10}
0	1	\cdots	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	\cdots	y_{2n}	y_{20}
0	0	\cdots	0	$y_{3,m+1}$	$y_{3,m+2}$	\cdots	y_{3n}	y_{30}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
0	0	\cdots	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	\cdots	y_{mn}	y_{m0}

Déterminer une solution réalisable optimale

La valeur de la fonction objectif correspondant à n'importe quelle solution \mathbf{x} est

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

et donc, pour la solution de base, nous avons la valeur

$$z_0 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B,$$

où

$$\mathbf{c}_B = [c_1, c_2, \dots, c_m]$$

Déterminer une solution réalisable optimale

Si nous assignons des valeurs arbitraires à x_{m+1}, \dots, x_n , nous pourrions ajuster x_1, \dots, x_m comm suit:

$$x_1 = y_{10} - \sum_{j=m+1}^n y_{1j}x_j$$

$$x_2 = y_{20} - \sum_{j=m+1}^n y_{2j}x_j$$

⋮

$$x_m = y_{m0} - \sum_{j=m+1}^n y_{mj}x_j$$

Déterminer une solution réalisable optimale

Au niveau de la fonction objectif, cela donnerait

$$\begin{aligned}z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\&= c_1 \left(y_{10} - \sum_{j=m+1}^n y_{1j} x_j \right) + c_2 \left(y_{20} - \sum_{j=m+1}^n y_{2j} x_j \right) \\&\quad + \dots + c_m \left(y_{m0} - \sum_{j=m+1}^n y_{mj} x_j \right) \\&\quad + c_{m+1} x_{m+1} + \dots + c_n x_n.\end{aligned}$$

Isolons z_0 . Cela donne

$$\begin{aligned}z &= z_0 - c_1 \sum_{j=m+1}^n y_{1j} x_j - c_2 \sum_{j=m+1}^n y_{2j} x_j - \dots - c_m \sum_{j=m+1}^n y_{mj} x_j \\&\quad + c_{m+1} x_{m+1} + \dots + c_n x_n.\end{aligned}$$

Déterminer une solution réalisable optimale

On peut encore réécrire la dernière équation comme

$$z = z_0 + \left(c_{m+1} - \sum_{i=1}^m y_{i,m+1} c_i \right) x_{m+1} + \left(c_{m+2} - \sum_{i=1}^m y_{i,m+2} c_i \right) x_{m+2} \\ + \dots + \left(c_n - \sum_{i=1}^m y_{i,n} c_i \right) x_n.$$

Choisir une valeur non nulle pour x_j , avec $m+1 \leq j \leq n$ conduira à une diminution de la fonction objectif si et seulement si $(c_j - \sum_{i=1}^m y_{ij} c_i)$ est strictement négatif.

Pour simplifier les notations, nous posons

$$z_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} c_i = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j.$$

Déterminer une solution réalisable optimale

On peut retrouver cette notation en partant de la forme tableau

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_{m+1} & \mathbf{a}_{m+2} & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1n} & y_{10} & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{2n} & y_{20} & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_{3,m+1} & y_{3,m+2} & \cdots & y_{3n} & y_{30} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{mn} & y_{m0} & \end{array}$$

On en déduit

$$x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_m \mathbf{e}_m = \mathbf{y}_0 - x_{m+1} \mathbf{y}_{m+1} - x_{m+2} \mathbf{y}_{m+2} - \cdots - x_n \mathbf{y}_n.$$

Déterminer une solution réalisable optimale

En prenant le produit scalaire avec \mathbf{c}_B^T , cela donne

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_0 - \sum_{j=m+1}^n z_j x_j,$$

où $z_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j$.

En ajoutant $\sum_{j=m+1}^n c_j x_j$ de part et d'autre, nous obtenons comme auparavant

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = z_0 + \sum_{j=m+1}^n (c_j - z_j) x_j.$$

Théorème: amélioration de la base optimale

Étant donnée une solution de base réalisable avec une valeur correspondante de la fonction objectif égale à z_0 , supposons qu'il existe au moins un j tel que $c_j - z_j < 0$. Il existe alors une solution réalisable donnant une valeur $z < z_0$. Si la colonne \mathbf{a}_j peut être échangée avec une colonne de la base originale, cela donnera une nouvelle solution de base réalisable, avec la valeur $z < z_0$. Si \mathbf{a}_j ne peut pas être échangée pour former une solution de base réalisable, alors l'ensemble réalisable K est non borné et la fonction objectif peut être rendue arbitrairement petite (vers $-\infty$).

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ une solution de base réalisable, avec la valeur de fonction objectif z_0 . Supposons (sans perte de généralité) $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$. Dans ce cas, on peut construire de nouvelles solutions de la forme

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x'_{m+1}, 0, \dots, 0),$$

avec $x'_{m+1} > 0$.

Reprenons l'équation

$$z = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n.$$

En substituant la nouvelle solution dans cette équation, nous obtenons

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1} < 0.$$

Dès lors, $z < z_0$ pour n'importe quelle solution de ce type.

Il est clair que nous voudrions rendre x'_{m+1} aussi grand que possible. En augmentant x'_{m+1} , les autres composantes s'accroissent, demeurent constantes, ou diminuent.

Dès lors, x'_{m+1} peut être augmentée jusqu'à ce que $x'_i = 0$, $i \leq m$, auquel cas nous obtenons une nouvelle solution de base réalisable. Sinon, si aucune composante x'_i n'est décroissante, x'_{m+1} peut être augmenté à l'infini, indiquant un ensemble réalisable non borné et une fonction objectif sans borne inférieure.

Théorème de condition d'optimalité

Si pour une certaine solution de base $c_j - z_j \geq 0$ pour tout j , alors cette solution est optimale.

Preuve

Ceci est la conséquence immédiate des résultats précédents, puisque tout autre solution réalisable doit avoir $x_i \geq 0$ pour tout i , et dès lors, $z - z_0 \geq 0$, étant donné l'égalité

$$z = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n.$$

On voit que les constantes $c_j - z_j$ jouent un rôle central.

Notons

$$r_j = c_j - z_j.$$

Les r_j sont appelés coefficients de coût relatif ou coefficients de coût réduit. Ces coefficients mesurent le coût d'une variable relativement à une base donnée. Par extension, le coût réduit d'une variable de base est 0.