

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

Méthode du simplexe

Hypothèse (temporaire): on commence avec une solution de base réalisable et le tableau correspondant au système $Ax = b$ sous forme canonique pour cette solution.

On ajoute une ligne correspondant aux coûts réduits et donnant la valeur de la fonction objectif.

\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\cdots	\mathbf{a}_m	\mathbf{a}_{m+1}	\mathbf{a}_{m+2}	\cdots	\mathbf{a}_n	\mathbf{b}
1	0	\cdots	0	$y_{1,m+1}$	$y_{1,m+2}$	\cdots	y_{1n}	y_{10}
0	1	\cdots	0	$y_{2,m+1}$	$y_{2,m+2}$	\cdots	y_{2n}	y_{20}
0	0	\cdots	0	$y_{3,m+1}$	$y_{3,m+2}$	\cdots	y_{3n}	y_{30}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
0	0	\cdots	1	$y_{m,m+1}$	$y_{m,m+2}$	\cdots	y_{mn}	y_{m0}
0	0	\cdots	0	r_{m+1}	r_{m+2}	\cdots	r_n	$-z_0$

Méthode du simplexe

Les coûts réduits r_i indiquent si la valeur de la fonction objectif augmentera ou diminuera, si x_i est considéré pour entrer dans la solution.

S'il y a des coûts réduits négatifs, il y a possibilité de réduire la valeur de l'objectif. Sinon, on est à l'optimalité.

Il est de coutume de choisir le coût réduit le plus négatif.

On capitalise le pouvoir de réduction, mais rien ne garantit que c'était le meilleur choix en terme de réduction effective, comme on ne connaît pas à l'avance la valeur correspondante de la variable associée.

Dernière ligne du tableau

On peut regarder z comme une variable additionnelle, et ajouter l'équation

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - z = 0$$

Une solution de base du système augmenté aura $m + 1$ variables de base, et nous exigeons que z soit l'une d'elles.

Il n'est dès lors pas utile d'ajouter une colonne correspond à z puisqu'elle serait toujours $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Suite aux opérations de pivot, nous obtenons l'équation

$$r_{m+1}x_{m+1} + r_{m+1}x_{m+2} + \dots + r_nx_n - z = z_0.$$

La dernière ligne est donc traitée comme les autres.

Etape 1. Former un tableau correspondant à une solution de base réalisable. Les coefficients de coûts réduits peuvent être obtenus par réduction de lignes.

Etape 2. Si tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, arrêt. La solution de base réalisable actuelle est optimale.

Etape 3. Calculer les rapports y_{i0}/y_{iq} , $i = 1, 2, \dots, m$. S'il pas de $y_{iq} > 0$, arrêt: le problème est non borné. Sinon, sélectionner p comme l'index i correspondant au rapport minimum avec $y_{iq} > 0$.

Etape 4. Pivoter sur l'élément pq , en mettant à jour toutes les lignes, incluant la dernière. Retour à l'étape 1.

L'algorithme s'arrête si l'optimalité est atteinte où s'il s'avère que le problème est non borné. Le nombre d'étapes est fini comme il n'existe qu'un nombre fini de bases réalisables. 

Exemple

On considère le problème

$$\max_x 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

La mise sous forme standard permet directement d'obtenir un système canonique (le cas général sera étudié plus tard).

$$\max_x 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0.$$

Exemple

Sous forme tableau, cela donne

	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{b}
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
\mathbf{r}^T	-3	-1	-3	0	0	0	0

On remarque que la dernière ligne reprend simplement l'opposé des coefficients de l'objectif. En effet

$$r_j = c_j - z_j = c_j,$$

En effet, $c_B^T y_j$, et $c_B = 0$.

Exemple

Possibles pivots:

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{b} \\ \textcircled{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \textcircled{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \mathbf{r}^T & -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

On décide (presqu'arbitrairement) de travailler avec le pivot défini sur \mathbf{a}_2 . L'application du premier pivot donne

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{b} \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & \textcircled{1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{r}^T & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Exemple

$$\begin{array}{rccccccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{b} \\ & \textcircled{5} & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ & -3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ & -5 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 3 \\ \mathbf{r}^T & -7 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{b} \\ & 1 & 1/5 & 0 & 3/5 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ & 0 & 3/5 & 1 & -1/5 & 2/5 & 0 & 8/5 \\ & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ \mathbf{r}^T & 0 & 7/5 & 0 & 6/5 & 3/5 & 0 & 27/5 \end{array}$$

La solution optimale est

$$(1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)^T$$

et la valeur optimale est $-27/5$.

Pourquoi la non-dénérescence?

Potentiel problème de cycles, car il n'y a pas forcément réduction de la fonction objectif, même avec un coût réduit négatif.