

IFT-3245

Démonstration 10, 10 décembre 2012.

-
1. Suppose we estimate a mean μ by the sample mean $\bar{X}_n$ of n identically distributed observations $X_1, \dots, X_n$, with $E[X_i] = \mu$ and $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$.
 - (a) If the X_i 's are positively correlated, does it give us *more* confidence or *less* confidence in our estimator than if they are independent?
 - (b) Explain why it is not possible that all pairs (X_i, X_j) , $i \neq j$, are highly negatively correlated if $n \geq 3$.
 - (c) If some pairs are positively correlated and others are negatively correlated, give a necessary and sufficient condition, in terms of the $n(n-1)/2$ correlations, under which $\bar{X}_n$ has *less* variance than when the X_i 's are independent.
 2. Considérons 3 files FIFO en série, e.g., 3 machines différentes que des produits manufacturés doivent visiter, dans l'ordre. Les clients (les composants du produit), arrivent à la machine 1 suivant un processus de Poisson stationnaire de taux 1. Après avoir complété leur service à la machine 1, ils passent à la machine 2, puis à la machine 3. Les temps de service sont mutuellement indépendants entre les machines et les clients, avec des fonctions de répartition G_1 , G_2 et G_3 aux machines 1, 2 et 3, respectivement. Nous nous intéressons à la charge de travail (i.e. le nombre moyen de clients dans le système) sur un horizon infini en état stable.
 - (a) Est-ce un système régénératif? Si oui, suggérez une possibilité pour les instants de régénération. On ne peut pas définir les cycles régénératifs en considérant les 3 machines séparément. Pourquoi?
 - (b) Donnez une simple condition nécessaire sur les G_i 's pour que les cycles régénératifs soient de longueur finie. (Note : le système ne peut pas être régénératif s'il y a une accumulation infinie de composants).
 - (c) Supposons à présent que les temps d'interarrivées sont i.i.d. $U(1, 2)$, i.e., uniformes sur l'intervalle $(1, 2)$, que chacune des deux premières machines a des temps de service constants de 1, et que les temps de services de la machine 3 sont $U(0.5, 1)$. Est-ce que votre définition d'instant régénératif suggérée en (a) est toujours valide avec cette nouvelle distribution de temps d'interarrivée? Si oui, quelle est la longueur espérée d'un cycle régénératif dans ce cas? Montrez que nous pouvons prendre comme instants de régénération les instants où un composant arrive à la machine 2 alors que la machine 3 est libre, et qu'avec cette définition, la longueur d'un cycle régénératif est d'espérance finie.
 3. (25pts) Un site de jeu en ligne veut évaluer une nouvelle tarification, basée sur le temps qu'un joueur passe sur le site. La loi des arrivées des joueurs

est connue, en comptant le temps en minutes, et une expérience pilote a permis de déterminer une lois pour le temps passé par joueur sur le site, déterminé lui aussi en minutes, sachant que la majorité des joueurs passent moins d'une heure sur le site, et que les deux lois sont indépendantes entre elles. Le revenu R engendré par un joeur i est supposé directement proportionnel au temps joué T_i :

$$R_i = kT_i.$$

Ecrivez un pseudo-code permettant de calculer le revenu moyen pas jour ainsi que le revenu moyen par client, sachant que le site fonctionne 24h/24, en considérant un horizon de temps de J jours. Il est également demandé de déterminer comment construire les intervalles de confiance associés à ces deux estimateurs, en supposant valides les hypothèses du théorème de la limite centrale.