

Probit

Fabian Bastin

Avril 2011

Formulation

Les modèles probit peuvent traiter les trois limitations du logit. La seule limitation du probit est qu'il requiert des variables normales pour toutes les composantes non observées de l'utilité.

Erreur :

$$\epsilon_i = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_K\} \sim N(0, \Sigma),$$
$$\phi(\epsilon) := f(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{\epsilon^T \Sigma^{-1} \epsilon}{2}}.$$

where $|\Sigma|$ is the determinant of Σ .

La probabilité de choix est

$$P_{i,k}[\beta] = \int (I(\epsilon_{i,l} - \epsilon_{i,k} \geq V_{i,k}(\beta) - V_{i,l}(\beta) + \epsilon_{i,l}, \forall l \in \mathcal{K}) f(\epsilon_i) d\epsilon_i.$$

L'intégrale n'a pas de forme analytique fermée, et doit être évaluée par simulation.

La dimension de l'intégrale est K , ou plus exactement $K - 1$ comme on doit tenir compte que des différences entre les termes d'erreur.

Identification

Dans le cadre logit, la variance des termes d'erreurs est posée à $\pi^2/6$. C'est équivalent à normaliser le modèle :

$$\text{Var}(\epsilon) = \sigma^2 \frac{\pi^2}{6}$$
$$P_{ik} = \frac{e^{V_{ik}/\sigma}}{\sum_l e^{V_{il}/\sigma}}.$$

Au lieu d'estimer β , nous estimons β/σ .

Un paramètre est identifiable s'il peut être estimé.

Un paramètre n'est **pas** identifiable s'il ne peut pas être estimé.

Supposons par exemple que nous souhaitons estimer

$$U_{ik} = V_{ik} + \alpha + \epsilon_{ik}.$$

α n'est pas identifiable.

Identification (2)

Supposons que nous souhaitons vérifier la normalisation d'un modèle avec quatre alternatives.

Le vecteur d'erreur $\epsilon_i = (\epsilon_{i,1}, \epsilon_{i,2}, \epsilon_{i,3}, \epsilon_{i,4})$ a comme moyenne le vecteur et la matrice de variance-variance

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44}^2 \end{pmatrix}$$

Il y a $K(K + 1)/2$ éléments, ici 10, et en plus de β , nous devrions estimer cette matrice.

Normalisation sur les différences

Comme seulement les différences d'utilité comptent, en choisissant par exemple la première alternative comme référence, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{ij1} &:= \epsilon_{i,j} - \epsilon_{i,1}, \\ \tilde{\epsilon}_{i,1} &:= (\tilde{\epsilon}_{i21}, \tilde{\epsilon}_{i31}, \tilde{\epsilon}_{i41}),\end{aligned}$$

et

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{12} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{23} - \sigma_{12} - \sigma_{13} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{24} - \sigma_{12} - \sigma_{14} \\ \sigma_{11}^2 + \sigma_{23} - \sigma_{12} - \sigma_{13} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\sigma_{13} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{34} - \sigma_{13} - \sigma_{14} \\ \sigma_{11}^2 + \sigma_{24} - \sigma_{12} - \sigma_{14} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{44}^2 - 2\sigma_{14} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{44}^2 - 2\sigma_{14} \end{pmatrix}$$

Variance-covariance sur les différences

Autrement dit, la matrice de variance-covariance pour le vecteur de différences d'erreur prend la forme

$$\begin{pmatrix} \theta_{22}^2 & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{23} & \theta_{33}^2 & \theta_{34} \\ \theta_{24} & \theta_{34} & \theta_{44}^2 \end{pmatrix},$$

où

$$\theta_{22} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{12},$$

$$\theta_{23} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{23} - \sigma_{12} - \sigma_{13},$$

$$\theta_{33} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\sigma_{13},$$

$$\theta_{24} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{24} - \sigma_{12} - \sigma_{14},$$

$$\theta_{44} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{44}^2 - 2\sigma_{14},$$

$$\theta_{34} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{34} - \sigma_{13} - \sigma_{14}.$$

Un des éléments de la diagonale doit être normalisé :

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta_{23}/\theta_{22}^2 & \theta_{24}/\theta_{22}^2 \\ \theta_{23}/\theta_{22}^2 & \theta_{33}^2/\theta_{22}^2 & \theta_{34}/\theta_{22}^2 \\ \theta_{24}/\theta_{22}^2 & \theta_{34}/\theta_{22}^2 & \theta_{44}^2/\theta_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a plus que $K = (K - 1)K/2 - 1 = 5$ éléments à identifier, et on ne peut pas en identifier d'avantage.

Transformation de Σ

Soit M_i la matrix identité de dimension $K - 1$, où nous introduisons en i^e position une colonne supplémentaire, avec tous les éléments à -1. Par exemple, avec $K = 4$, $i = 3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice peut être utilisée pour transformer la matrice de variance-covariance des erreurs dans la matrice de variance-covariance des différences entre les termes d'erreurs.

Avec trois alternatives,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Transformation de Σ (suite)

Supposons que nous considérons les différences relativement à l'alternative 2. $\tilde{\epsilon}_{i,12}, \tilde{\epsilon}_{i,32}$ a comme variance-covariance :

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \text{Cov} \begin{pmatrix} \epsilon_{i,1} - \epsilon_{i,2} \\ \epsilon_{i,3} - \epsilon_{i,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{12} & \sigma_{13} + \sigma_{22}^2 - \sigma_{12} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} + \sigma_{22}^2 - \sigma_{12} - \sigma_{23} & \sigma_{33}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{23} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cette matrice peut se retrouver avec le produit

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$