

IFT-1575
Examen intra

- (20 points) Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Si la réponse est "faux", corrigez l'assertion.
- (a) La solution optimale (si elle existe) d'un problème non-linéaire se trouve sur un point extrême du domaine admissible.
 - (b) Tout maximum local d'un problème linéaire est global.
 - (c) Le produit de deux fonctions concaves est concave.
 - (d) Une variable duale non-nulle est nécessairement associée à une contrainte active.
 - (e) Dans le cas d'un problème linéaire réalisable, la valeur optimale du problème dual est égale à la valeur optimale du problème primal.
 - (f) En programmation linéaire, l'existence d'un point admissible implique l'existence d'une solution optimale.
 - (g) Tout point satisfaisant les conditions KKT d'un problème de programmation non-linéaire est une solution optimale (locale) pour ce problème.
 - (h) Il est toujours possible de trouver une solution optimale (locale) *exacte* d'un programme non-linéaire sans contrainte avec la méthode du gradient, en un temps *fini*.
 - (i) Dans le cas d'un problème de programmation convexe, toute solution optimale locale est solution optimale globale.
 - (j) Nous pouvons résoudre **de manière équivalente en termes de solutions optimales**

$$\max_{x \in X} f(x)$$

et

$$\max_{x \in X} f(x) + c,$$

où c est une constante et X est un sous-ensemble de \mathcal{R}^n .

- (10 pts) Démontrer (mathématiquement) que $f(x) = |x - 2|$ est convexe.
- (10 pts) Expliquez en quoi consiste la méthode à deux étapes, et dans quel contexte elle est utile.
- (5 pts) Trouver la valeur et la solution optimale du problème

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 3)^2 + (5 - x_2)^2 + x_3, \\ \text{s.c. } x_2 &\geq -1, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Astuce : la réponse peut se formuler en moins de trois lignes.

(5 pts) Trouvez tous les optimums locaux du problème

$$\max f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3.$$

(20 pts) Considérons le programme mathématique

$$\begin{aligned} \max z = & -\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^4, \\ & -1 + x_1 + x_2 \leq 0, \\ & -1 + x_1 - x_2 \leq 0, \\ & -1 - x_1 + x_2 \leq 0, \\ & -1 - x_1 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

- (a) S'agit-il d'un programme convexe ?
- (b) Résolvez les conditions KKT associées. Remarquez qu'il n'y a pas de contraintes de non-négativité.
- (c) La/les solution(s) des conditions KKT sont-elles des optimums du programme mathématique ?

(5 pts) Considérons les deux problèmes suivants

$$\max f(x), \text{ s.c. } x \in A, \quad (1)$$

et

$$\max f(x), \text{ s.c. } x \in B, \quad (2)$$

où A est un sous-ensemble de B . Soit x_A^* et x_B^* les solutions optimales globales respectives de 1 et 2. A-t-on

- $f(x_A^*) = f(x_B^*)$,
- $f(x_A^*) \leq f(x_B^*)$,
- $f(x_A^*) \geq f(x_B^*)$?

Justifiez la réponse.

(25 pts) Une entreprise familiale vend des horloges de fabrication artisanale. David, Hugo et Fred travaillent à la fabrication et à la vente de deux types d'horloges : des horloges grand-père et des horloges murales. David s'occupe de l'assemblage du mécanisme de chaque horloge, Hugo fabrique les caissons de bois, alors que Fred est en charge de la prise de commandes et de la livraison des horloges. David et Hugo sont disponibles jusqu'à 36 heures par semaine, alors que Fred peut travailler jusqu'à 18 heures par semaine dans l'entreprise familiale. Les temps requis pour chaque tâche en fonction du type d'horloge, de même que les profits pour chaque type d'horloge, sont donnés dans le tableau suivant :

Tâche	Horloge grand-père (heures/unité)	Horloge murale (heures/unité)
Assemblage du mécanisme	9	3
Fabrication des caissons	8	3
Prise de commandes ; livraison	3	3
Profit/unité (\$)	330	200

Le problème consiste à déterminer combien d'horloges grand-père et d'horloges murales doivent être fabriquées à chaque semaine de façon à maximiser le profit total.

- (a) Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.
 - (b) Résolvez-le à l'aide de la méthode du simplexe.
 - (c) Formulez le dual de ce problème.
- (10 pts) Traduisez le code GAMS suivant en programme mathématique. Donnez une interprétation en français de ce programme.

```
$title Paquet postal

POSITIVE VARIABLES x,y,z;
FREE VARIABLE obj;

EQUATIONS
  VOL fonction objectif
  DIM contrainte sur la dimension et le poids;

  VOL.. obj =e= x*y*z;
  DIM.. z+2*x+2*y =l= 108;

  MODEL package /ALL/;

  x.l=1; y.l=1; z.l=1;

  SOLVE package USING nlp MAXIMIZING obj;
```