

IFT-1575
Examen intra

(20 points) Répondez par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Si la réponse est "faux", corrigez l'assertion.

- (a) La solution optimale (si elle existe) d'un problème non-linéaire se trouve sur un point extrême du domaine admissible.

Faux. La solution optimale (si elle existe) d'un problème *linéaire* se trouve sur un point extrême du domaine admissible. Dans le cas d'un problème non-linéaire, cette solution peut se trouver n'importe où dans le domaine admissible.

- (b) Tout maximum local d'un problème linéaire est global.

Vrai.

- (c) Le produit de deux fonctions concaves est concave.

Faux. La somme de deux fonctions concaves est concave, mais pas le produit. Par exemple, en prenant $f(x) = g(x) = -x^2$, $f(x)$ et $g(x)$ sont concaves, mais $f(x)g(x) = x^4$ est convexe.

- (d) Une variable duale non-nulle est nécessairement associée à une contrainte active.

Vrai.

- (e) Dans le cas d'un problème linéaire réalisable, la valeur optimale du problème dual est égale à la valeur optimale du problème primal.

Vrai.

- (f) En programmation linéaire, l'existence d'un point admissible implique l'existence d'une solution optimale.

Faux, car le problème peut être non borné. Par exemple, le problème $\max x$ est admissible, mais n'a pas de solution optimale.

- (g) Tout point satisfaisant les conditions KKT d'un problème de programmation non-linéaire est une solution optimale (locale) pour ce problème.

Faux. Tout point satisfaisant les conditions KKT d'un problème de programmation non-linéaire est une solution au premier ordre pour ce problème, mais il peut s'agir d'un minimum, d'un maximum, ou d'un point selle.

- (h) Il est toujours possible de trouver une solution optimale (locale) exacte d'un programme non-linéaire sans contrainte avec la méthode du gradient, en un temps fini.

Faux. La méthode peut prendre un nombre infini d'itérations, et donc un temps infini. De plus, les erreurs d'arrondi dues à l'utilisation de

l'outil informatique rendent caduque l'espoir de trouver la solution exacte. On ne peut trouver qu'une solution approchée.

- (i) Dans le cas d'un problème de programmation convexe, toute solution optimale locale est solution optimale globale.
Vrai.
- (j) Nous pouvons résoudre **de manière équivalente en termes de solutions optimales**

$$\max_{x \in X} f(x)$$

et

$$\max_{x \in X} f(x) + c,$$

où c est une constante et X est un sous-ensemble de \mathcal{R}^n .

Vrai.

- (10 pts) Démontrer (mathématiquement) que $f(x) = |x - 2|$ est convexe.

Soit $0 \leq \lambda \leq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= |\lambda x + (1 - \lambda)y - 2| \\ &= |\lambda x + (1 - \lambda)y + 2(\lambda + 1 - \lambda)| \\ &= |\lambda(x - 2) + (1 - \lambda)(y - 2)| \\ &\leq |\lambda(x - 2)| + |(1 - \lambda)(y - 2)| \\ &= \lambda|x - 2| + (1 - \lambda)|y - 2| \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Par conséquent $f(x)$ est bien convexe.

- (10 pts) Expliquez en quoi consiste la méthode à deux étapes, et dans quel contexte elle est utile.

La solution origine, obtenue en donnant la valeur nulle à chaque variable, n'est pas nécessairement réalisable. Dans ce cas, nous ajoutons des variables artificielles aux contraintes, destinées à restaurer la faisabilité de l'origine. Ces variables ne servent qu'à permettre la recherche d'une solution initiale réalisable, et par conséquent, nous voudrions trouver une solution réalisable, associée à des variables artificielles mises à zéro.

La méthode à deux phases consiste à résoudre le problème augmentés au moyen des variables artificielles, mais avec comme fonction objectif la somme des opposés des variables artificielles. De la sorte, si le programme initial est réalisable, le nouveau programme donnera comme solution un point réalisable pour le programme initial, et des variables artificielles mises à zéro (de sorte que le nouvel objectif est mis à zéro).

La deuxième phase consiste à exécuter la méthode classique du simplexe en prenant comme première solution la solution finale de la première phase.

- (5 pts) Trouver la valeur et la solution optimale du problème

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 3)^2 + (5 - x_2)^2 + x_3, \\ \text{s.c. } x_2 &\geq -1, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Astuce : la réponse peut se formuler en moins de trois lignes.

Nous allons détailler. La fonction est séparable en termes de x_1 , x_2 et x_3 :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3),$$

avec $f_1(x_1) = (x_1 - 3)^2$, $f_2(x_2) = (5 - x_2)^2$ et $f_3(x_3) = x_3$. $f_1(x_1)$, $f_2(x_2)$ et $f_3(x_3)$ sont toujours positifs sur leur domaine de faisabilité respectif (\mathcal{R} , $[-1, \infty)$ et \mathcal{R}^+), et atteignent zéro en 3, 5 et 0, respectivement, aussi $x_1^* = 3$, $x_2^* = 5$ et $x_3^* = 0$. En d'autres termes, la solution optimale est

$$x^* = (3, 5, 0),$$

pour une valeur optimale nulle.

- (5 pts) Trouvez tous les optimums locaux du problème

$$\max f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3.$$

Considérons tout d'abord le gradient de $f(x)$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Annuler le gradient revient à résoudre le système

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

. De la première équation, nous avons

$$x_1 = x_2,$$

tandis que la seconde donne

$$x_2(2 + 3x_2) = 0,$$

qui admet comme solution $x_2 = 0$ et $x_2 = -2/3$. Par conséquent, nous avons deux points à considérer : $(0, 0)$ et $(-2/3, -2/3)$.

La matrice de dérivées secondes est

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6x_2 \end{pmatrix}.$$

Le produit croisé vaut $-12x_2 - 4$. En $(0, 0)$, ce produit est strictement négatif, donc la fonction n'est ni convexe, ni concave ; ce n'est pas un maximum local. En $(-2/3, -2/3)$, il vaut 4, aussi la fonction est concave ; c'est un maximum local.

(20 pts) Considérons le programme mathématique

$$\begin{aligned} \max z = & -\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^4, \\ & -1 + x_1 + x_2 \leq 0, \\ & -1 + x_1 - x_2 \leq 0, \\ & -1 - x_1 + x_2 \leq 0, \\ & -1 - x_1 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

(a) S'agit-il d'un programme convexe ?

Oui, car nous avons un problème de maximisation avec une fonction objectif concave, et des contraintes linéaires, donc convexes (par conséquent, l'ensemble admissible est convexe).

(b) Résolvez les conditions KKT associées. Remarquez qu'il n'y a pas de contraintes de non-négativité.

Nous avons 4 contraintes, donc 4 multiplicateurs de Lagrange, que nous dénoterons u_1, u_2, u_3 et u_4 . Les conditions KKT s'écrivent

$$-2\left(x_1 - \frac{3}{2}\right) - u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0, \quad (1)$$

$$-4\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^3 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0, \quad (2)$$

$$-1 + x_1 + x_2 \leq 0, \quad (3)$$

$$-1 + x_1 - x_2 \leq 0, \quad (4)$$

$$-1 - x_1 + x_2 \leq 0, \quad (5)$$

$$-1 - x_1 - x_2 \leq 0, \quad (6)$$

$$u_1(-1 + x_1 + x_2) = 0, \quad (7)$$

$$u_2(-1 + x_1 - x_2) = 0, \quad (8)$$

$$u_3(-1 - x_1 + x_2) = 0, \quad (9)$$

$$u_4(-1 - x_1 - x_2) = 0, \quad (10)$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0. \quad (11)$$

On ne peut avoir $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, en effet, dans ce cas, (1) implique $x_1 = 3/2$, et (2) donne $x_2 = 1/2$, ce qui viole la contrainte (3). Prenons $u_1 \neq 0$. Alors, en vertu de (7)

$$-1 + x_1 + x_2 = 0. \quad (12)$$

Supposons également $u_2 \neq 0$. De (8)

$$-1 + x_1 - x_2 = 0. \quad (13)$$

L'addition de (12) et (13) donne

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0.$$

Toutes les contraintes (3)–(6) sont satisfaites. (9) conduit à $u_3 = 0$, tandis que (9) donne $u_4 = 0$. (1)–(2) se réduisent à

$$1 - u_1 - u_2 = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} - u_1 + u_2 = 0. \quad (15)$$

$$(16)$$

En additionnant (14) et (15), nous obtenons $u_1 = 3/4$, et de là $u_2 = 1/4$, ce qui permet de satisfaire les autres conditions. Nous avons donc la solution

$$(x_1, x_2) = (1, 0),$$

associées aux multiplicateurs

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (3/4, 1/4, 0, 0).$$

(c) La/les solution(s) des conditions KKT sont-elles des optimums du programme mathématique ?

Oui, vu que nous sommes en présence d'un problème de programmation convexe.

(5 pts) Considérons les deux problèmes suivants

$$\max f(x), \text{ s.c. } x \in A, \quad (17)$$

et

$$\max f(x), \text{ s.c. } x \in B, \quad (18)$$

où A est un sous-ensemble de B . Soit x_A^* et x_B^* les solutions optimales globales respectives de 17 et 18. A-t-on

- $f(x_A^*) = f(x_B^*)$,
- $f(x_A^*) \leq f(x_B^*)$,
- $f(x_A^*) \geq f(x_B^*)$?

Justifiez la réponse.

Par définition,

$$f(x_B^*) \geq f(x), \forall x \in B.$$

Comme A est un sous-ensemble de B , nous avons en particulier

$$f(x_B^*) \geq f(x), \forall x \in A,$$

et donc

$$f(x_B^*) \geq f(x_A^*).$$

(25 pts) Une entreprise familiale vend des horloges de fabrication artisanale. David, Hugo et Fred travaillent à la fabrication et à la vente de deux types d'horloges : des horloges grand-père et des horloges murales. David s'occupe de l'assemblage du mécanisme de chaque horloge, Hugo fabrique les

caissons de bois, alors que Fred est en charge de la prise de commandes et de la livraison des horloges. David et Hugo sont disponibles jusqu'à 36 heures par semaine, alors que Fred peut travailler jusqu'à 18 heures par semaine dans l'entreprise familiale. Les temps requis pour chaque tâche en fonction du type d'horloge, de même que les profits pour chaque type d'horloge, sont donnés dans le tableau suivant :

Tâche	Horloge grand-père (heures/unité)	Horloge murale (heures/unité)
Assemblage du mécanisme	9	3
Fabrication des caissons	8	3
Prise de commandes ; livraison	3	3
Profit/unité (\$)	330	200

Le problème consiste à déterminer combien d'horloges grand-père et d'horloges murales doivent être fabriquées à chaque semaine de façon à maximiser le profit total.

(a) Formulez ce problème à l'aide d'un modèle de programmation linéaire.

Désignons par x_1 le nombre d'horloges grand-père et x_2 le nombre d'horloges murales. L'objectif donne le profit, et les contraintes le temps disponibles. Ceci donne le programme

$$\begin{aligned} \max z &= 330x_1 + 200x_2 \\ \text{s.c. } &9x_1 + 3x_2 \leq 36, \\ &8x_1 + 3x_2 \leq 36, \\ &3x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Résolvez-le à l'aide de la méthode du simplexe.

Nous commençons en ajouter des variables d'écart x_3 , x_4 et x_5 positives aux contraintes :

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 36 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_4 &= 36, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 &= 18. \end{aligned}$$

Les variables de base sont x_3 , x_4 et x_5 , tandis que les variables hors-base sont x_1 et x_5 , ce qui donne le dictionnaire

$$\begin{aligned} x_3 &= 36 - 9x_1 - 3x_2, \\ x_4 &= 36 - 8x_1 - 3x_2, \\ x_5 &= 18 - 3x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Le coefficient de x_1 étant supérieur à celui de x_2 , nous faisons rentrer

x_1 dans la base. Les contraintes de positivité impliquent

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4 \\x_1 &\leq \frac{9}{2} \\x_1 &\leq 6.\end{aligned}$$

La première contrainte est la plus forte, aussi choisissons-nous x_3 comme variable sortant de la base. Ceci conduit au nouveau dictionnaire

$$\begin{aligned}x_1 &= 4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{9}x_3, \\x_4 &= 36 - 8\left(4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{9}x_3\right) - 3x_2, \\x_5 &= 18 - 3\left(4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{9}x_3\right) - 3x_2,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}x_1 &= 4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{9}x_3, \\x_4 &= 4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{8}{9}x_3, \\x_5 &= 6 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_3.\end{aligned}$$

La fonction objectif devient

$$\begin{aligned}z &= 330\left(4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{9}x_3\right) + 200x_2 \\&= 1320 + 90x_2 - \frac{110}{3}x_3.\end{aligned}$$

Comme le coefficient de x_2 est positif, mais pas celui de x_3 , nous faisons rentrer x_2 dans la base. Les contraintes de positivité impliquent

$$\begin{aligned}x_2 &\leq 12, \\x_2 &\leq 12, \\x_2 &\leq 3.\end{aligned}$$

La contrainte limitante étant la troisième, nous faisons sortir x_5 de la base. Le nouveau dictionnaire est dès lors

$$\begin{aligned}x_1 &= 4 - \frac{1}{3}\left(3 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_5\right) - \frac{1}{9}x_3, \\x_4 &= 4 - \frac{1}{3}\left(3 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_5\right) + \frac{8}{9}x_3, \\x_2 &= 3 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_5,\end{aligned}$$

et après simplification

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5, \\x_4 &= 3 + \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5, \\x_2 &= 3 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_5.\end{aligned}$$

La fonction objectif devient

$$\begin{aligned}z &= 1320 + 90 \left(3 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \right) - \frac{110}{3}x_3, \\&= 1590 - \frac{65}{3}x_3 - 45x_5.\end{aligned}$$

Il n'y a plus de variables hors-base avec un coefficient positif dans l'objectif. La solution de base courante $(3, 3, 0, 3, 0)$ est par conséquent optimale, pour une valeur optimale de 1590.

Le profit optimal est donc de 1590, avec une production de 3 horloges grand-père et 3 horloges murales.

(c) Formulez le dual de ce problème.

Le dual est

$$\begin{aligned}\min w &= 36y_1 + 36y_2 + 18y_3 \\ \text{s.c. } 9y_1 + 8y_2 + 3y_3 &\geq 330, \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\geq 200, \\ y_1, y_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

(10 pts) Traduisez le code GAMS suivant en programme mathématique. Donnez une interprétation en français de ce programme.

```
$title Paquet postal

POSITIVE VARIABLES x,y,z;
FREE VARIABLE obj;

EQUATIONS
  VOL fonction objectif
  DIM contrainte sur la dimension et le poids;

VOL.. obj =e= x*y*z;
DIM.. z+2*x+2*y =l= 108;

MODEL package /ALL/;

x.l=1; y.l=1; z.l=1;

SOLVE package USING nlp MAXIMIZING obj;
```

Ceci donne le programme mathématique

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x * y * z \\ \text{s.c. } & 2 * x + 2 * y + z \leq 108, \\ & x, y, z \geq 0. \end{aligned}$$

Ce programme sert à déterminer le volume d'un paquet postal, en suivant le critère selon lequel le périmètre additionné à la hauteur doit être inférieur à 108 pouces. Il s'agit du critère de dimensions maximales utilisé par la poste américaine.