

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

Pour débuter la méthode du simplexe, il faut une solution de base réalisable initiale.

Comment trouver cette solution de base initiale?

Principe de base: introduire des variables artificielles.

Variables artificielles

Reprendons le système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0,$$

où, s.p.d.g., $\mathbf{b} \geq 0$.

Considérons le programme artificiel

$$\min_y \sum_{i=1}^m y_i$$

$$\text{t.q. } \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{y} \geq 0.$$

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ est un vecteur de variables artificielles.

Le programme articiel est déjà sous forme canonique, avec comme solution de base $\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

Si le programme initial est réalisable, une solution optimale du programme articiel est $\mathbf{y} = 0$. En effet, nous avons alors qu'il existe un $\mathbf{x} \geq 0$ tel que $\mathbf{A} = \mathbf{b}$. Dès lors $\mathbf{y} = 0$ est réalisable pour le programme articiel, et est clairement optimale. Sinon, si le programme initial n'est pas réalisable, aucun $\mathbf{x} \geq 0$ ne satisfait le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. La valeur optimale du programme articiel est > 0 .

Si dans la solution finale certaines composantes de \mathbf{y} sont toujours dans la base, nous avons une solution de base dégénérée. Si A est de rang plein, on peut échanger chacun des y_i avec une variable hors-base. Si la solution est non-dégénérée, aucune composante de \mathbf{y} n'est encore dans la base.

Variables artificielles: exemple

On considère le système

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Variables artificielles: x_5, x_6 . Le programme artificiel est

$$\min x_4 + x_5$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Variables artificielles: exemple

Sous forme tableau:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
c^T	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
	0	0	0	1	1	0

Pour obtenir une solution de base réalisable, il faut annuler les coefficients de x_4 et x_5 . Nous obtenons le nouveau tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
c^T	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
	-5	-4	-3	0	0	-7

On peut maintenant continuer la résolution du système en utilisant le simplexe, comme d'ordinaire.

Variables artificielles: exemple

Le premier pivotage donne

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	-1	4/3	1	-2/3	2
	1	1	1/3	0	1/3	1
c^T	0	1	-4/3	0	5/3	-2

Le second,

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
	1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
c^T	0	0	0	1	1	0

Ceci donne la solution réalisable $(1/2, 0, 3/2)^T$.

Phase I

Recherche d'une solution de base réalisable par l'intermédiaire de variables artificielles.

Phase II

Oubli des variables artificielles et résolution du programme original.

Méthode à deux phases: exemple

Prenons le programme

$$\min_x 4x_1 + x_2 + x_3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

De ce qui précède, on part du tableau

	x_1	x_2	x_3	b
	0	-3/4	1	3/2
	1	5/4	0	1/2
c^T	4	1	1	0

Méthode à deux phases: exemple

Il faut faire apparaître des 0 comme coûts réduits associés à la base:

	x_1	x_2	x_3	b
	0	-3/4	1	3/2
	1	5/4	0	1/2
c^T	0	-13/4	0	-7/2

Par après, on trouve

	x_1	x_2	x_3	b
	3/5	0	1	9/5
	4/5	1	0	2/5
c^T	13/5	0	0	-11/5

La solution optimale est donc $(0, 2/5, 9/5)$.

Alternative: méthode du “big-M”

Idée: plutôt que de créer un nouveau problème, on va directement intégrer les variables artificielles dans les contraintes initiales.

Comment? On intègre les variables artificielles dans l'objectif initial, mais avec un coût si grand qu'elles peuvent qu'être mis à zéro dans une solution optimale. Pour ce faire, on les multiplie avec un certain M suffisamment grand.

Alternative: méthode du “big-M”

Si $\sum_{j=1,\dots,n} a_{ij}x_j = b_i$ et qu'aucune variable n'est isolée (une variable est isolée si elle est à coefficient 1 dans cette équation et à coefficient 0 dans les autres):

- ① nous ajoutons une variable artificielle $x_{n+1} \geq 0$;
- ② nous lui associons un profil très positif: M

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + M x_{n+1}$$

t.q. ...

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$$

...

$$x_1 \geq 0, i = 1, \dots, n+1.$$

Si le problème est réalisable, nous devrions avoir $x_{n+1} = 0$.