

# IFT 2505

## Programmation Linéaire

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

# Motivation

Pour débiter la méthode du simplexe, il faut une solution de base réalisable initiale.

Comment trouver cette solution de base initiale?

Principe de base: introduire des variables artificielles.

Reprenons le système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0,$$

où, s.p.d.g.,  $\mathbf{b} \geq 0$ .

Considérons le programme artificiel

$$\begin{aligned} \min_y \quad & \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{t.q.} \quad & \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned}$$

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  est un vecteur de variables artificielles.

# Variables artificielles

Le programme artificiel est déjà sous forme canonique, avec comme solution de base  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ .

Si le programme initial est réalisable, une solution optimale du programme artificiel est  $\mathbf{y} = 0$ . En effet, nous avons alors qu'il existe un  $\mathbf{x} \geq 0$  tel que  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Dès lors  $\mathbf{y} = 0$  est réalisable pour le programme artificiel, et est clairement optimale. Sinon, si le programme initial n'est pas réalisable, aucun  $\mathbf{x} \geq 0$  ne satisfait le système linéaire  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . La valeur optimale du programme artificiel est  $> 0$ .

Si dans la solution finale certaines composantes de  $\mathbf{y}$  sont toujours dans la base, nous avons une solution de base dégénérée. Si  $A$  est de rang plein, on peut échanger chacun des  $y_i$  avec une variable hors-base. Si la solution est non-dégénérée, aucune composante de  $\mathbf{y}$  n'est encore dans la base.

# Variables artificielles: exemple

On considère le système

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Variables artificielles:  $x_5, x_6$ . Le programme artificiel est

$$\min x_4 + x_5$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

# Variables artificielles: exemple

Sous forme tableau:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>
	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
$c^T$	0	0	0	1	1	0

Pour obtenir une solution de base réalisable, il faut annuler les coefficients de  $x_4$  et  $x_5$ . Nous obtenons le nouveau tableau

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	<b>b</b>
	2	1	2	1	0	4
	3	3	1	0	1	3
$c^T$	-5	-4	-3	0	0	-7

On peut maintenant continuer la résolution du système en utilisant le simplexe, comme d'ordinaire.

# Variables artificielles: exemple

Le premier pivotage donne

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\ & 0 & -1 & 4/3 & 1 & -2/3 & 2 \\ & 1 & 1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \\ c^T & 0 & 1 & -4/3 & 0 & 5/3 & -2 \end{array}$$

Le second,

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathbf{b} \\ & 0 & -3/4 & 1 & 3/4 & -1/2 & 3/2 \\ & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ c^T & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Ceci donne la solution réalisable  $(1/2, 0, 3/2)^T$ .

# Méthode à deux phases

## **Phase I**

Recherche d'une solution de base réalisable par l'intermédiaire de variables artificielles.

## **Phase II**

Oubli des variables artificielles et résolution du programme original.



# Méthode à deux phases: exemple

Prenons le programme

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

De ce qui précède, on part du tableau

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	<b>b</b>
	0	$-3/4$	1	$3/2$
	1	$5/4$	0	$1/2$
$c^T$	4	1	1	0

# Méthode à deux phases: exemple

Il faut faire apparaître des 0 comme coûts réduits associés à la base:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b} \\ & 0 & -3/4 & 1 & 3/2 \\ & 1 & 5/4 & 0 & 1/2 \\ c^T & 0 & -13/4 & 0 & -7/2 \end{array}$$

Par après, on trouve

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \mathbf{b} \\ & 3/5 & 0 & 1 & 9/5 \\ & 4/5 & 1 & 0 & 2/5 \\ c^T & 13/5 & 0 & 0 & -11/5 \end{array}$$

La solution optimale est donc  $(0, 2/5, 9/5)$ .

## Alternative: méthode du “big- $M$ ”

Idée: plutôt que de créer un nouveau problème, on va directement intégrer les variables artificielles dans les contraintes initiales.

Comment? On intègre les variables artificielles dans l’objectif initial, mais avec un coût si grand qu’elles peuvent qu’être mis à zéro dans une solution optimale. Pour ce faire, on les multiplie avec un certain  $M$  *suffisamment* grand.

## Alternative: méthode du “big- $M$ ”

Si  $\sum_{j=1,\dots,n} a_{ij}x_j = b_i$  et qu'aucune variable n'est isolée (une variable est isolée si elle est à coefficient 1 dans cette équation et à coefficient 0 dans les autres):

- 1 nous ajoutons une variable artificielle  $x_{n+1} \geq 0$ ;
- 2 nous lui associons un profil très positif:  $M$

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + M x_{n+1}$$

t.q. ...

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$$

...

$$x_1 \geq 0, i = 1, \dots, n + 1.$$

Si le problème est réalisable, nous devrions avoir  $x_{n+1} = 0$ .