

# IFT 2505

## Programmation Linéaire

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

Nous considérons le problème, dit **primal** :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le programme suivant est appelé **dual** :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & \lambda^T b \\ \text{t.q.} \quad & A^T \lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$A \in \mathcal{R}^{m \times n}, c, x, \in \mathcal{R}^n, \lambda, b \in \mathcal{R}^m.$$

Note : les contraintes duales peuvent aussi s'écrire  $\lambda^T A \leq c^T$  (en appliquant l'opérateur de transposition de part et d'autre de l'inégalité).

$x$  : variables du problème primal

$\lambda$  : variables du problèmes dual

Dual du dual ?

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

# Dualité : forme standard

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

revient à

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

# Dualité : forme standard

Le dual peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \max_{u,v} \quad & u^T b - v^T b \\ \text{t.q.} \quad & u^T A - v^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

ou, avec  $\lambda = u - v$ ,

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & \lambda^T b \\ \text{t.q.} \quad & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Forme asymétrique :  $\lambda \in \mathcal{R}$ .

# Conversion primal-dual

Minimisation	Maximisation
Contraintes $\geq$ $\leq$ $=$	Variables $\geq 0$ $\leq 0$ non restraint
Variables $\geq 0$ $\leq 0$ non restraint	Contraintes $\leq$ $\geq$ $=$

# Conversion primal-dual : exemples

Primal

Dual

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^T \lambda \\ \text{t.q.} \quad & A^T \lambda \leq c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & b^T \lambda \\ \text{t.q.} \quad & A^T \lambda \leq c, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

# Conversion primal-dual : exemples

$$\max_x c^T x$$

$$\text{t.q. } Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

$$\min_{\lambda} b^T \lambda$$

$$\text{t.q. } A^T \lambda \geq c.$$

$$\min_x c^T x$$

$$\text{t.q. } Ax \leq b,$$

$$x \geq 0.$$

$$\max_{\lambda} b^T \lambda$$

$$\text{t.q. } A^T \lambda \leq c,$$

$$\lambda \leq 0.$$



# Exemple : le problème de regime alimentaire

- $x_j$  : unités de produit alimentaire
- $n$  produits
- $b$  : besoins minimums ( $b_i$  :  $i^e$  nutriment)
- $c$  : coût
- $m$  nutriments
- $a_{ij}$  : unités de nutriments  $i$  dans le produit  $j$ .

Primal : on veut minimiser sa consommation tout en satisfaisant les besoins minimums

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

# Exemple : le problème de regime alimentaire

Dual :

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & \lambda^T b \\ \text{t.q.} \quad & \lambda^T A \leq c^T \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$\lambda$  pourrait par exemple représenter le prix de compléments alimentaires ; on veut maximiser le revenu de la vente de tels compléments.

La contrainte traduit qu'on doit rester compétitif : le prix des compléments doivent rester inférieurs au coût des aliments originaux.

# Exemple

Considérons le problème

$$\min z = -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4$$

$$\text{t.q. } 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Pour obtenir la forme standard, nous devons ajouter 2 variables d'écart, disons  $x_5$  et  $x_6$ . Ceci donne le problème

$$\min z = -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4$$

$$\text{t.q. } 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

# Exemple

Sous forme tableau, ceci se traduit par

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
4	2	1	1	1	0	5
3	1	2	1	0	1	4
-4	-3	-1	-2	0	0	0

Le système est déjà sous forme canonique, et nous pouvons identifier les variables de base  $x_5$  et  $x_6$ . A ce système correspondent

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Plutôt que de devoir travailler sur toutes les colonnes de  $A$  en permanence, nous allons utiliser la version révisée du simplexe.

# Exemple

Nous cherchons d'abord à calculer les coûts réduits, en notant que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = (0 \ 0) B^{-1} = (0 \ 0)$$

Dès lors,

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = c_D^T = (-4 \ -3 \ -1 \ -2)$$

Il existe des coûts réduits négatifs, aussi nous n'avons pas terminé.

Une possibilité est de faire entre  $x_1$ .

# Exemple

Dans la base courante,

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le pivotage peut se résumer à

	$x_5$	$x_6$	$b$	$y_1$
$x_5$	1	0	5	4
$x_6$	0	1	4	3
$-z$	0	0	0	-4

Le minimum des rapports compasante pas compasante entre  $b$  et  $y_1$ , pour les éléments strictement positifs de  $y_1$ , est  $5/4$ . Autrement dit,  $x_1$  entre dans la base et  $x_5$  sort. La réduction du tableau donne

	$x_5$	$x_6$	$b$	$y_1$
$x_1$	$1/4$	0	$5/4$	1
$x_6$	$-3/4$	1	$1/4$	0
$-z$	1	0	5	0

# Exemple

Du tableau précédent, nous tirons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

et en conséquence

$$\lambda^T = (-4 \quad 0) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 0)$$

Les coûts réduits deviennent

$$\begin{aligned} r_D^T &= (-3 \quad -1 \quad -2 \quad 0) - (-1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-3 \quad -1 \quad -2 \quad 0) + (2 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \\ &= (-1 \quad 0 \quad -1 \quad 1) \end{aligned}$$

# Exemple

Il a des coûts réduits strictement négatifs, aussi on doit continuer.  
On choisit ici le premier coût, autrement dit on fait entrée  $x_2$ ,  
lequel est associé à

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Procédons au pivotage :

	$x_5$	$x_6$	$b$	$y_2$
$x_1$	$1/4$	$0$	$5/4$	$1/2$
$x_6$	$-3/4$	$1$	$1/4$	$-1/2$
$-z$	$1$	$0$	$5$	$-1$

	$x_5$	$x_6$	$b$	$y_2$
$x_2$	$1/2$	$0$	$5/2$	$1$
$x_6$	$-1/2$	$1$	$3/2$	$0$
$-z$	$3/2$	$0$	$15/2$	$0$



# Exemple

Nous obtenons

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\lambda^T = (-3 \quad 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (-3/2 \quad 0)$$

Les coûts réduits valent

$$\begin{aligned} r_D^T &= (-4 \quad -1 \quad -2 \quad 0) - (-3/2 \quad 0) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-4 \quad -1 \quad -2 \quad 0) + (6 \quad 3/2 \quad 3/2 \quad 3/2) \\ &= (2 \quad 1/2 \quad -1/2 \quad 3/2) \end{aligned}$$

La variable d'entrée doit être  $x_4$ .

# Exemple

Nous avons

$$y_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Cela conduit au tableau

	$x_5$	$x_6$	$b$	$y_2$
$x_2$	1/2	0	5/2	1/2
$x_6$	-1/2	1	3/2	1/2
$-z$	3/2	0	15/2	-1/2

et  $x_6$  doit sortir de la base. Le pivotage conduit à

	$x_5$	$x_6$	$b$	$y_2$
$x_2$	1	-1	1	0
$x_4$	-1	2	3	1
$-z$	1	1	9	0

# Exemple

Dès lors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^T = (-3 \quad -2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1)$$

Les coûts réduits sont

$$\begin{aligned} r_D^T &= (-4 \quad -1 \quad 0 \quad 0) - (-1 \quad -1) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-4 \quad -1 \quad 0 \quad 0) + (7 \quad 3 \quad 1 \quad 1) \\ &= (3 \quad 2 \quad 1 \quad 1) \end{aligned}$$

Tous les coûts réduits sont positifs. La base  $B_3$  est donc optimale.

La solution associée à  $B_3$  est

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0)$$

pour une valeur optimale de -9.

## Exemple : dual

Reprenons le problème primal.

$$\min z = -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4$$

$$\text{t.q. } 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Formons le dual

$$\max 5\lambda_1 + 4\lambda_2$$

$$\text{t.q. } 4\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -4$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -3$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq -2$$

$$\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0.$$

## Exemple : dual

Essayons de nous rapprocher de la forme standard :

$$\begin{aligned} & - \min \quad -5\lambda_1 - 4\lambda_2 \\ & \text{t.q.} \quad -4\lambda_1 - 3\lambda_2 \geq 4 \\ & \quad \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 3 \\ & \quad \quad -\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 1 \\ & \quad \quad -\lambda_1 - \lambda_2 \geq 2 \\ & \quad \quad -\lambda_1 \geq 0, -\lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

## Exemple : dual

On posant  $y_i = -\lambda_i$ , en ajoutant des variables de surplus, et en oubliant temporairement le signe négatif devant l'opérateur de minimisation, nous avons

$$\min 5y_1 + 4y_2$$

$$\text{t.q. } 4y_1 + 3y_2 - y_3 = 4$$

$$2y_1 + y_2 - y_4 = 3$$

$$y_1 + 2y_2 - y_5 = 1$$

$$y_1 + y_2 - y_6 = 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

$$y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.$$

En résolvant ce problème (avec par exemple une méthode à deux phases), nous obtenons la solution optimale

$$y^* = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

pour la valeur optimale 9.

## Exemple : dual

En repassant au dual original, cela donne une valeur optimale de -9  
et

$$\lambda^* = (-1 \quad -1)$$

comme lors du dernier calcul dans le simplexe révisé pour le primal.

Est-ce un hasard ? Pas vraiment. . .

# Dualité faible

(Forme symétrique ou forme asymétrique – forme standard)

Si  $x$  and  $\lambda$  sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, alors

$$c^T x \geq \lambda^T b$$

Démonstration.

$$\lambda^T b \leq \lambda^T A x \leq c^T x,$$

pour  $x \geq 0$ , vu que  $x$  est supposé réalisable, et que du dual,  $\lambda^T A \leq c^T$ . □

Dès lors, l'objectif primal est une borne supérieure pour le dual, et vice-versa.



Si  $x_0$  et  $\lambda_0$  sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, et si

$$c^T x_0 = \lambda_0^T b,$$

alors  $x_0$  et  $\lambda_0$  sont optimaux pour leur problème respectif.

Mais on n'a encore dit sur la réalisabilité d'un problème par rapport à l'autre !

# Dualité forte

Si un des problèmes, primal ou dual, a une solution optimale finie, l'autre problème a aussi une solution optimale finie, et les valeurs correspondantes des fonctions objectifs sont égales. Si l'un des problèmes a un objectif non borné, l'autre problème n'a pas de solution réalisable.

## Démonstration.

La deuxième affirmation est une conséquence directe du lemme.

Ainsi si le primal est non borné et  $\lambda$  est réalisable pour le dual, nous devons avoir

$$\lambda^T b \leq -M$$

pour  $M$  arbitrairement grand, ce qui est impossible.



## Démonstration.

Si le primal a une solution optimale finie, nous voulons montrer que le dual a une solution optimale finie.

Soit  $z_0$  la valeur optimale du primal. Définissons

$$C = \{(r, w) : r = tz_0 - c^T x, \\ w = tb - Ax, x \geq 0, t \geq 0\}$$

$C$  est un cône convexe fermé.

Mais  $(1, 0) \notin C$ .

Par l'absurde, supposons  $(1, 0) \in C$ .



## Démonstration.

Si  $w = t_0 b - Ax_0 = 0$ ,  $t_0 > 0$ ,  $x_0 \geq 0$ , alors  $x = x_0/t_0$  est réalisable pour le primal comme  $Ax = b$ .

Dès lors  $r/t_0 = z_0 - c^T x \leq 0$ , et donc  $r \leq 0$ , alors qu'on supposait  $r = 1$ .

Si  $w = Ax_0 = 0$  ( $t_0 = 0$ ),  $x_0 \geq 0$ , de  $r = tz_0 - c^T x_0$ , nous avons  $c^T x_0 = -1$ .

Si  $x$  est réalisable pour le primal, alors  $x + \alpha x_0$  est réalisable pour tout  $\alpha$ . Dès lors,  $c^T(x + \alpha x_0)$  peut être diminué à l'infini, en augmentant  $\alpha$ . Ceci contredit l'existence d'un minimum fini.

Donc,  $(1, 0) \notin C$ .



## Démonstration.

Comme  $C$  est un ensemble convexe fermé, cela implique qu'il existe un hyperplan séparant  $(1, 0)$  et  $C$ .

Dès lors,  $\exists [s, \lambda] \in \mathcal{R}^{m+1}$ ,  $[s, \lambda] \neq 0$ , et une constante  $k$  t.q.

$$\begin{aligned} s &= (s, \lambda)^T (1, 0) < \inf \{ (s, \lambda)^T (r, w) \text{ t.q. } (r, w) \in C \} \\ &= \inf \{ s^T r + \lambda^T w \text{ t.q. } (r, w) \in C \} = k \end{aligned}$$

Comme  $C$  est un cône,  $k \geq 0$ . En effet, si  $k < 0$ ,  $\exists (r, w) \in C$  t.q.  $sr + \lambda^T w < 0$ , et pour  $\alpha$  assez grand,  $\alpha(r, w)$  violerait l'inégalité de l'hyperplan.

Mais  $(0, 0) \in C$ , donc  $k \leq 0$ , et de là,  $k = 0$ , et  $s < 0$ . □

## Démonstration.

S.p.d.g.  $s = -1$  (vu que  $(1, 0) \notin C$  implique  $(\beta, 0) \notin C$ ,  $\beta > 0$ , car  $C$  est un cône).

Ainsi,  $\exists \lambda \in \mathcal{R}^m$  t.q.

$$-r + \lambda^T w \geq 0, \forall (r, w) \in C.$$

De manière équivalente, par définition de  $C$ ,

$$(c - \lambda^T A)x - tz_0 + t\lambda^T b \geq 0, \forall x, t \geq 0.$$

$t = 0$  donne  $\lambda^T A \leq c^T$ , i.e.  $\lambda$  est réalisable pour le dual.

$x = 0$  et  $t = 1$  donne  $\lambda^T b \geq z_0$ . Par le lemme 1 et son corollaire,  $\lambda$  est optimal pour le dual. □

# Dualité forte

Démonstration.

Comme le dual du dual est le primal, la preuve est complète. ☐