

# IFT 2505

## Programmation Linéaire

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2012

# Dualité : relations à la procédure du simplexe

Résoudre le primal par le simplexe donne la solution duale.

Supposons que le programme

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x \\ & \text{t.q. } Ax = b \\ & \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

a la solution réalisable de base optimale  $x = (x_B, 0)$ , avec la base correspondante à  $B$ .

Solution du dual

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda} \lambda^T b \\ & \text{t.q. } \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

en termes de  $B$  ?

# Relations à la procédure du simplexe

Supposons

$$A = \begin{pmatrix} B & D \end{pmatrix}, \quad x_B = B^{-1}b, \quad r_D^T = c_D^T - c_B^T B^{-1}D.$$

Si  $x$  est optimal,  $r_D^T \geq 0$ , et donc

$$c_B^T B^{-1}D \leq c_D^T.$$

Avec

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1},$$

nous avons

$$\begin{aligned} \lambda^T A &= (\lambda^T B \quad \lambda^T D) \\ &= (c_B^T \quad c_B^T B^{-1}D) \\ &\leq (c_B^T \quad c_D^T) = c^T. \end{aligned}$$

# Relations à la procédure du simplexe

Dès lors,

$$\lambda^T A \leq c^T,$$

i.e.  $\lambda$  est réalisable pour le dual.

De plus,

$$\lambda^T b = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$$

et donc la valeur de la fonction objectif duale pour ce  $\lambda$  est égale à la valeur du problème primal. Dès lors  $\lambda$  est optimal pour le dual. On retrouve le principal résultat du théorème de dualité.

**Théorème** Si le programme linéaire (sous forme standard) a une solution de base réalisable optimale, correspondant à la base  $B$ , le vecteur  $\lambda$  t.q.  $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$  est une solution optimale du programme dual correspondant. Les valeurs optimales des deux programmes sont égales.

# Exemple

$$\min_x -x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

# Exemple

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

On a

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution optimale est

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

## Exemple : dual

$$\max_{\lambda} 4\lambda_1 + 6\lambda_2$$

$$\text{t.q. } 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -1$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -4$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq -3$$

$$\lambda_1 \leq 0, \quad \lambda_2 \leq 0.$$

La solution du dual s'obtient directement de la dernière ligne du tableau du simplexe, sous les colonnes où apparaît l'identité dans le premier tableau (comme les coûts initiaux associés sont nuls) :

$$\lambda^T = (-1 \quad -1).$$

# Multiplicateurs du simplexe

À n'importe quelle itération du simplexe, nous pouvons former le vecteur  $\lambda^T$  satisfaisant

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Ce vecteur n'est pas une solution du dual à moins que  $B$  ne soit une base optimale pour le primal. Mais il peut être utilisé à chaque itération pour calculer les coûts réduits, et il aura une interprétation économique.

Pour cette raison, le vecteur  $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$  est souvent appelé le vecteur des multiplicateurs du simplexe.

Comme d'ordinaire, dénotons les colonnes de  $A$  par  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , et par  $e_1, e_2, \dots, e_m$  les  $m$  vecteurs unités dans  $E^m$ .

Étant donné une base  $B$ , consistant de  $m$  colonnes de  $A$ , n'importe quel autre vecteur peut être construit comme combinaison linéaire de ces vecteurs de base.

S'il y a un coût unité  $c_i$  associé avec chaque vecteur de base  $a_i$ , le coût d'un vecteur construit  $y$  à partir de la base peut être calculé comme la combinaison linéaire correspondante des  $c'_i$ 's associés à la base. L'expression de  $y$  à partir de la base est

$$B^{-1}y$$

et le coût associé

$$c_B^T B^{-1}y.$$

# Interprétation économique

En particulier, le coût du vecteur unité  $e_j$ , quand reconstruit à partir de la base  $B$ , est  $\lambda_j$ , la  $j^e$  composante de

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

En effet,

$$\lambda_j = \lambda^T e_j = c_B^T B^{-1} e_j.$$

Dès lors, les  $\lambda'_j$ s peuvent être interprétés comme les prix synthétiques des vecteurs unités.

Comme

$$y = \sum_{j=1}^m y_j e_j,$$

nous avons comme coût pour  $y$

$$c_B^T B^{-1} y = \sum_{j=1}^m c_B^T B^{-1} e_j y_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = \lambda^T y.$$

# Interprétation économique : optimalité

L'optimalité du primal correspond à la situation où chaque vecteur  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , est "moins cher" quand construit à partir de la base que quand acheté directement à son propre prix.

Dans ce cas, nous avons

$$\lambda^T a_i \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ou de manière équivalente

$$\lambda^T A \leq c^T.$$

Continuation de l'interprétation des variables duales comme prix.

Considérons le problème standard,

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x \\ & \text{t.q. } Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

avec la base optimale  $B$  et la solution correspondante  $(x_B, 0)$ , où  $x_B = B^{-1}b$ . Une solution correspondante du dual est

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, de petits changements dans  $b$  ne conduiront pas à un changement de base optimale.

Considérons un petit changement  $\Delta b$ . Comme la base optimale n'a pas changée, la nouvelle solution optimale est

$$x = (x_B + \Delta x_B, 0),$$

où

$$\Delta x_B = B^{-1} \Delta b.$$

Le changement correspondant pour la fonction objectif est

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = \lambda^T \Delta b.$$

Dès lors,  $\lambda$  mesure la sensibilité de la fonction objectif à un petit changement dans le terme de droite des contraintes d'égalité : un changement de  $b$  à  $b + \Delta b$  conduit à un changement de la fonction objectif de  $\lambda^T b$ ,

Puisque  $\lambda_j$  est le prix du vecteur unité  $e_j$  quand exprimé à partir de la base  $B$ , il mesure directement le changement dans le coût à partir d'un changement dans la  $j^e$  composante du vecteur  $b$ . Cela s'observe aussi depuis la relation précédente

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = \lambda^T \Delta b.$$

Dès lors,  $\lambda_j$  peut être considéré comme le *prix marginal* de  $b_j$ , puisque modifier  $b_j$  en  $b_j + \Delta b_j$  conduit à un changement de la valeur optimale de  $\lambda_j \Delta b_j$ .

## Théorème : écarts de complémentarité – forme asymétrique

Soit  $x$  et  $\lambda$  des solutions pour les programmes primal et dual, le primal étant exprimé sous forme standard. Une condition nécessaire et suffisante pour que  $x$  et  $\lambda$  soient tous deux solutions optimales est que pour tout  $i$

- ①  $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$
- ②  $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^T a_i < c_i$

# Écarts de complémentarité : preuve du théorème

Sous les conditions énoncées,

$$(\lambda^T A - c^T)x = 0.$$

Dès lors,

$$\lambda^T b = c^T x,$$

et par le corollaire du théorème de dualité faible,  $\lambda$  et  $x$  sont solutions optimales de leur problème respectif.

De manière réciproque, si les solutions sont optimales, par le théorème de dualité forte,

$$\lambda^T b = c^T x,$$

et donc

$$(\lambda^T A - c^T)x = 0.$$

Comme  $x \geq 0$ ,  $\lambda^T A \leq c$ , les conditions tiennent.

## Théorème : écarts de complémentarité – forme symétrique

Soit  $x$  et  $\lambda$  des solutions pour les programmes primal et dual, le primal étant exprimé avec les contraintes linéaires sous forme  $Ax \geq b$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $x$  et  $\lambda$  soient tous deux solutions optimales est que pour tout  $i$

- ①  $x_i > 0 \Rightarrow \lambda^T a_i = c_i$
- ②  $x_i = 0 \Leftarrow \lambda^T a_i < c_i$
- ③  $\lambda_j > 0 \Rightarrow a^j x = b_j$
- ④  $\lambda_j = 0 \Leftarrow a^j x > b_j$

### Démonstration.

Similaire au théorème précédent.



## Méthode du simplexe dual

Souvent, on peut obtenir une solution de base du problème linéaire non réalisé, mais associée à des multiplicateurs du simplexe qui sont réalisables pour le problème dual.

Dans le tableau du simplexe, cette situation revient à ne pas avoir d'éléments négatifs dans la dernière ligne, tout en ayant une solution de base non réalisable.

Ceci arrive par exemple si on résoud un problème, puis on veut en résoudre un nouveau après avoir changer  $b$ .

On va travailler sur le problème dual en partant du tableau primal.

# Méthode du simplexe dual : principes

En termes du primal :

- maintenir l'optimalité de la dernière ligne ;
- aller vers la réalisabilité.

En termes du primal :

- maintenir la réalisabilité ;
- aller vers l'optimalité.

# Méthode du simplexe dual

On considère le problème

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x \\ & \text{t.q. } Ax = b \\ & \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'une base  $B$  est connue, et soit

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1}.$$

On suppose  $\lambda$  réalisable pour le dual.

La solution  $x_b = B^{-1}b$  est dit dual-réalisable.

Si  $x_B \geq 0$ , cette solution est aussi primal-réalisable, et est par conséquent optimale.

# Méthode du simplexe dual

Comme  $\lambda$  est réalisable pour le dual,

$$\lambda^T a_j \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Si, comme d'ordinaire, nous supposons que  $B$  est constitué des  $m$  premières colonnes de  $A$ , i.e.

$$B = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m),$$

nous avons

$$\lambda^T a_j = c_B^T B^{-1} a_j = c_B^T e_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

où  $e_j$  est le  $j^e$  vecteur unité.

En appliquant l'hypothèse de non-dégénérescence pour le dual, nous avons aussi

$$\lambda^T a_j < c_j, \quad j = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

## Méthode du simplexe dual

Un cycle du simplexe, appliqué au dual, reviendra à échanger deux composantes de  $\lambda$ , de manière à ce qu'une inégalité stricte devienne une égalité, et vice-versa, tout en augmentant la valeur du dual.

Les  $m$  égalités dans la nouvelle solution détermineront une nouvelle base.

Soit  $u^i$  la  $i^e$  ligne de  $B^{-1}$ , et

$$\bar{\lambda}^T = \lambda^T - \epsilon u^t.$$

Nous avons (avec  $\epsilon \geq 0$ )

$$\bar{\lambda}^T a_j = \lambda^T a_j - \epsilon u^i a_j.$$

# Méthode du simplexe dual

Rappelons la notation préalablement introduite

$$z_j = c_B^T y_j.$$

Dès lors,

$$\lambda^T a_j = c_B^T B^{-1} a_j = z_j.$$

Comme

$$u^i a_j = y_{ij},$$

nous avons

$$\bar{\lambda}^T a_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq j,$$

$$\bar{\lambda}^T a_i = c_i - \epsilon,$$

$$\bar{\lambda}^T a_j = z_j - \epsilon y_{ij}, \quad j = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

# Méthode du simplexe dual

De plus,

$$\bar{\lambda}^T b = \lambda^T b - \epsilon u^i b = \lambda^T b - \epsilon x_{Bi}.$$

Comme

$$\lambda^T a_j < c_j, \quad j = m+1, \dots, n,$$

nous cherchons à augmenter le terme de gauche, ce qui revient à considérer les situations où  $y_{ij} < 0$  dans

$$\lambda^T a_j = z_j - \epsilon y_{ij}, \quad j = m+1, m+2, \dots, n.$$

Nous cherchons à ramener la valeur à  $c_j$ , sans la dépasser (sinon on violerait les conditions de réalisabilité du dual), aussi nous prenons

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

# Algorithme du simplexe dual

**Etape 1** Etant donnée une solution de base dual-réalisable  $x_B$ , si  $x_B \geq 0$ , la solution est optimale : arrêt. Sinon, sélectionner un indice  $i$  tel que  $x_{Bi} < 0$ .

**Etape 2** Si tous les  $y_{ij} \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , le dual n'a pas de maximum. Sinon, calculer

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{ij}} \text{ t.q. } y_{ij} < 0 \right\}.$$

Soit  $k$  l'indice correspondant (unique si l'hypothèse de non-dégénérescence s'applique).

**Etape 3** Former une nouvelle base  $B$  en remplaçant  $a_i$  par  $a_k$ . En utilisant cette base, déterminer la solution de base dual-réalisable  $x_B$  correspondante.

# Simplexe dual : exemple

$$\min_x 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\text{soumis à } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

En introduisant des variables de surplus, nous obtenons

$$\min_x 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\text{soumis à } x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

# Simplexe dual : exemple

Si nous changeons le signe des inégalités, nous obtenons

$$\min_x 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{aligned} \text{soumis à } & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

conduisant au tableau

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & -5 \\ x_5 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

La base  $(a_4, a_5)$  est dual-réalisable comme tous les coûts réduits sont non-négatifs.

## Simplexe dual : exemple

Nous devons sélectionner une composante de  $x_B$  qui sont strictement négative pour la retirer de l'ensemble des variables de base. Prenons par exemple  $x_5 = -6$ .

Nous devons alors calculer les rapports

$$\frac{z_j - c_j}{y_{2j}}$$

ou, en d'autres termes, les rapports entre l'opposé des coûts réduits et les éléments de la seconde ligne. Le plus petit rapport (strictement) positif est obtenu avec l'élément  $y_{12}$  :

$x_4$	-1	-2	-3	1	0	-5
$x_5$	(-2)	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	0

# Simplexe dual : exemple

Après le pivot, nous avons

$x_4$	0	(-1)	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-2
$x_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
	0	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	-9

puis

$x_2$	0	1	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	2
$x_1$	1	0	-2	1	-1	1
	0	0	1	1	1	-11

La solution (1, 2, 0) est optimale.

# Simplexe primal-dual

L'idée est de travailler simultanément sur le primal et le dual.

Principales idées :

- trouver une solution réalisable pour le dual ;
- l'améliorer à chaque étape en optimisant un problème primal restreint associé ;
- essayer de statisfaire les conditions d'écart de complémentarité.

Il s'agit de la variante du simplexe la plus efficace pour les problèmes de flots dans les réseaux.

# Simplexe primal-dual

Considérons à nouveau le primal

$$\min_x c^T x$$

$$\text{t.q. } Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

et son dual

$$\max_{\lambda} \lambda^T b$$

$$\text{t.q. } \lambda^T A \leq c^T$$

Etant donné une solution réalisable  $\lambda$  pour le dual, définissons

$$P = \{i \mid \lambda^T a_i = c_i\}.$$

Vu que  $\lambda$  est supposé réalisable, cela implique

$$\lambda^T a_i < c_i, \quad i \notin P.$$

# Simplexe primal-dual

Correspondant à  $\lambda$  et  $P$ , nous définissons le problème *primal restraint associé*

$$\min_y \mathbf{1}^T y$$

$$\text{t.q. } Ax + y = b$$

$$x \geq 0, \quad x_i = 0 \text{ pour } i \notin P$$

$$y \geq 0$$

où  $\mathbf{1}$  désigne le vecteur  $(1, 1, \dots, 1)$ .

Le dual associé est appelé *dual restraint associé*

$$\max_u u^T b$$

$$\text{t.q. } u^T a_i \leq 0, \quad i \in P$$

$$u \leq \mathbf{1}.$$

# Théorème d'optimalité primale-duale

*Supposons que  $\lambda$  est réalisable pour le dual et que  $(x, y)$  est réalisable pour le primal restreint associé, avec  $y = 0$  (de sorte que  $(x, y)$  est une solution optimale). Alors,  $x$  et  $\lambda$  sont optimaux pour les programmes primal et dual originaux respectifs.*

## Démonstration.

$x$  est clairement réalisable pour le primal :  $Ax = b$ . Nous avons aussi, par définition de  $P$ ,  $\lambda^T a_i = c_i$ , si  $x_i \neq 0$ , de sorte que

$$c^T x = \lambda^T A x.$$

En combinant ces deux observations, nous avons

$$c^T x = \lambda^T b,$$

impliquant l'optimalité de  $x$  et  $\lambda$ .



# Algorithme primal-dual

**Etape 1** Etant donné une solution réalisable  $\lambda_0$  pour le dual, déterminer le primal restreint associé.

**Etape 2** Optimiser le primal restreint associé. Si la valeur optimale de ce primal restreint associé (impliquant  $y = 0$ ), la solution correspondante est optimale pour le primal original, en vertu du théorème d'optimalité primale-duale ; arrêt.

**Etape 3** Si la valeur optimale du primal restreint associé est strictement positive (i.e. if  $y \neq 0$ ), la solution optimale de ce primal restreint associé n'est pas réalisable pour le primal, et on cherche à améliorer la solution réalisable du dual avant de déterminer un nouveau primal restreint associé.

**Etape 3 (suite)** Obtenir du tableau du simplexe du primal restreint la solution  $u_0$  du dual restreint associé. S'il n'y a pas de  $j$  pour lequel  $u_0^T a_j > 0$ , le primal n'a pas de solution réalisable ; arrêt. Sinon, construire le nouveau vecteur dual réalisable

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon_0 u_0,$$

où

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{c_j - \lambda_0^T a_j}{u_0^T a_j} \mid u_0^T a_j > 0 \right\}.$$

Retour à l'étape 1, en utilisant ce  $\lambda$ .

## Algorithme primal-dual : preuve

Dans l'étape 3, il est indiqué que  $u_0^T a_j \leq 0$  pour tout  $j$  implique que le primal n'a pas de solution réalisable.

Si  $u_0^T a_j \leq 0$  pour tout  $j$ , le vecteur

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$$

est réalisable pour le problème dual pour toute valeur positive de  $\epsilon$ , comme

$$\lambda_\epsilon^T A = \lambda_0^T A + \epsilon u_0^T A \leq c^T.$$

De plus, comme

$$u_0^T b = \mathbf{1}^T y > 0,$$

nous voyons que la quantité

$$\lambda_\epsilon^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b,$$

est non bornée, lorsque nous augmentons  $\epsilon$ . Du théorème de dualité forte, le primal n'est pas réalisable.

## Algorithme primal-dual : preuve

Supposons à présent que pour au moins un  $j$ ,  $u_0^T a_j > 0$ .

A nouveau, définissons

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$$

Par construction,

$$u_0^T a_i \leq 0, \quad \forall i \in P.$$

Pour un  $\epsilon$  positif assez petit,  $\lambda_\epsilon$  est réalisable pour le dual, et nous pouvons augmenter  $\epsilon$  jusqu'à transformer une des inégalités

$$\lambda_\epsilon^T a_j < c_j, \quad j \notin P$$

en égalité. Ceci détermine  $\epsilon_0$  et un indice  $k$  correspondant.

## Algorithme primal-dual : preuve

Le nouveau vecteur  $\lambda$  correspond à une valeur accrue de la fonction objectif duale :

$$\lambda^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b.$$

De plus, le nouvel ensemble correspondant  $P$  inclut l'indice  $k$ .

Pour tout autre indice  $i$  t.q.  $x_i > 0$  est dans  $p$  aussi, comme en vertu de l'écart de complémentarité,

$$u_0^T a_i = 0,$$

pour un tel  $i$ , et dès lors

$$\lambda^T a_i = \lambda_0^T a_i + \epsilon_0 u_0^T a_i = c_i.$$