IFT 2505
Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php

Automne 2012

Exemple sur le simplexe dual et primal-dual

On considère le problème

$$\begin{aligned}
\min_x \ & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 \\
\text{s.à. } & 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \geq 6 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Le dual est

$$\begin{aligned}
\max_\lambda \ & 6\lambda_1 + 3\lambda_2 \\
& 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 3 \\
& -\lambda_1 + \lambda_2 \leq 4 \\
& \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 6 \\
& 6\lambda_1 + \lambda_2 \leq 7 \\
& -5\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Admissibilité du dual

Comme tous les coefficients dans la fonction objectif sont strictement positifs, une solution réalisable pour le dual est

$$\boldsymbol{\lambda} = (0, 0).$$

Nous savons de plus que l'admissibilité de $\boldsymbol{\lambda}$ est équivalente à l'existence d'une solution primale satisfaisant les conditions d'optimalite en termes de coûts réduits, mais violant possiblement les contraintes de non-négativités.

Essayons de démarrer le simplexe.

Forme standard

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 \\
\text{s.à. } & 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 - x_6 = 6 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Nous n'avons pas la forme canonique, mais nous pouvons facilement l'obtenir en multipliant les contraintes par -1 :

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 \\
\text{s.à. } & -2x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 + 5x_5 + x_6 = -6 \\
& -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 + x_7 = -3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Problème : la base associée à x_6, x_7 n'est pas réalisable vu que les termes non-nuls de la solution de base associée, à savoir $x_6 = -6$, $x_7 = -3$, violent les contraintes de non-négativité.

Le dual, lui, devient

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda}\ & -6\lambda_1 - 3\lambda_2 \\
& -2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 3 \\
& \lambda_1 - \lambda_2 \leq 4 \\
& -\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 6 \\
& -6\lambda_1 - \lambda_2 \leq 7 \\
& 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}.
\end{aligned}
$$

Forme standard : dual

$(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ reste réalisable, et donc nous savons qu'il existe un x pour lequel les conditions d'optimalités sur les coûts réduits sont satisfaits.

On peut en déduire la motivation du simplexe duale :

- conserver les conditions d'optimalité et la réalisabilité duale ;
- forcer la realisabilité primale (et partant de là, trouver une solution primale optimale).

Simplexe dual

Sous forme de tableau, cela donne

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_6 & -2 & 1 & -1 & -6 & 5 & 1 & 0 & -6 \\
x_7 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\
 & 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

On doit décider d'une variable qui va quitter la base, car de mauvais signe. Il n'y a pas de règle de sélection ici ; on se contente de sélectionner une ligne avec un terme de droite strictement négatif.

Supposons que nous choisissions x_7.

On calcule les rapports entre la dernière ligne et la ligne de x_7, en se limitant aux entrées strictement négatives. On sélectionne le minimum en valeur absolue de ces rapports.

De ce qui précède, le pivot est sur x_5 :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_6 & -2 & 1 & -1 & -6 & 5 & 1 & 0 & -6 \\
x_7 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\
 & 3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

conduisant au nouveau tableau

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_6 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & -\frac{17}{2} & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{27}{2} \\
x_5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}
\end{array}
$$

Il faut à présent faire sortir x_6. Les rapports à considérer sont $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{17}$, et le minimum est $\frac{5}{9}$. La variable entrante est donc x_1.
Cela donne

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{17}{9} & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & 3 \\
x_5 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\
 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & \frac{32}{18} & 0 & \frac{5}{9} & \frac{17}{9} & -9
\end{array}
$$

On en déduit la solution primale

$$\mathbf{x}^* = (3, 0, 0, 0, 0)$$

associée à la solution duale

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{17}{9}\right).$$

Les valeurs optimales primales et duales sont égale à 9.

On peut noter la correspondance entre les variables de base et les contraintes duales, comme seules les première et cinquième contrainte du dual sont actives.

Il peut y avoir un grand nombre de rapports à calculer, ce qui peut être coûteux s'il y a un grand nombre de variables et de contraintes, et il n'est pas toujours aisé d'avoir la forme canonique.

On va essayer de limiter le nombre de variables qui peuvent être candidates pour entrer dans la base, et introduire des variables artificielles pour avoir une forme canonique initiale facile à définir.

On part du primal :

$$
\begin{aligned}
\min_x \ & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 \\
\text{s.à. } & 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 - x_6 = 6 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Problème artificiel :

$$\begin{aligned}
\min_x \;& 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 \\
\text{s.à. } & 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 - x_6 + y_1 = 6 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_7 + y_2 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Tableau :

$$\begin{array}{cccccccccc}
2 & -1 & 1 & 6 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
-3 & 0 & -3 & -7 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -9.
\end{array}$$

On pourrait continuer la phase 1, mais on veut résoudre directement le problème.

Regardons du côté du dual du problème initial :

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda}\ & 6\lambda_1 + 3\lambda_2 \\
& 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 3 \\
& -\lambda_1 + \lambda_2 \leq 4 \\
& \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 6 \\
& 6\lambda_1 + \lambda_2 \leq 7 \\
& -5\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 1 \\
& -\lambda_1 \leq 0 \\
& -\lambda_2 \leq 0 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}.
\end{aligned}
$$

Une solution admissible du dual est, comme précédemment, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ajoutons au tableau les valeurs des contraintes du dual, sous la forme $c_i - \lambda^T a_i$:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
2 & -1 & 1 & 6 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
-3 & 0 & -3 & -7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -9 \\
3 & 4 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array}
$$

Soit P l'ensemble défini comme

$$P \stackrel{def}{=} \{i \,|\, \lambda^T a_i = c_i\},$$

i.e. l'ensemble des indices des contraintes duales actives. Ici,

$$P = \{6, 7\}.$$

Notons toutefois que dans le cas présent, malgré le caractère actif de deux contraintes du dual, les variables primales associées sont hors-base. Ces contraintes pourront dès lors devenir inactives plus tard.

On va se tourner vers le dual pour décider de la variable primale à entrer dans la base, tout en maintenant l'admissibilité du dual (et donc implicitement de l'existence des conditions d'optimalité pour le primal).

Dual restreint :

$$\begin{aligned}
\max\ & 6u_1 + 3u_2 \\
\text{s.à.}\ & -u_1 \leq 0 \\
& -u_2 \leq 0 \\
& u_1 \leq 1 \\
& u_2 \leq 1 \\
& u_1, u_2 \in \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Ce dual a comme solution immédiate $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, mais en fait, celle-ci ne nous intéresse pas vraiment.

Simplexe primal-dual

Par contre, on peut observer que la ligne des coûts réduits, limitée aux variables primales originales (hors variables artificielles), donne les valeurs

$$-u^T a_i, \ \forall i.$$

En effet, à l'optimalité pour le primal restreint, comprenant les contraintes $x_i = 0$ pour $i \notin P$, nous avons comme valeurs sur la ligne des coûts réduits

$$c^T - u^T A = 0,$$

où B est la base optimale du primale restreint, hors, les composantes de c correspondant aux variables primales originales sont nulles.

Dès lors, il n'est jamais nécessaire d'écrire explicitement le dual restreint, ni de chercher la solution duale explicitement.

Simplexe primal-dual

On voudrait rendre une des contraintes duales inactives active, autrement dit, introduire un zéro supplémentaire dans la dernière ligne.

Pour ce faire, on calcule le rapport entre les deux dernières lignes, en se limitant aux éléments négatifs de l'avant-dernière ligne.

Ici, on obtient les rapports 1, 2, 1. Le minimum est donc 1, conduisant à annuler $c_1 - \lambda^T a_1$ et $c_4 - \lambda^T a_4$.

Le tableau devient (en ajoutant une fois la troisième ligne à la quatrième)

$$
\begin{array}{cccccccccc}
2 & -1 & 1 & 6 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
-3 & 0 & -3 & -7 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -9 \\
0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & & &
\end{array}
$$

A présent, $P = \{1, 4\}$. x_1 et x_4 peuvent entrer dans la base comme les contraintes duales associées sont à présent actives. Par contre, les variables d'écart x_6 et x_7 sont à présent exclues de l'ensemble des variables candidates.

Le primal restreint s'écrit

$$
\begin{aligned}
\min\ & y_1 + y_2 \\
\text{s.à. } & 2x_1 + 6x_4 + y_1 = 6 \\
& x_1 + x_4 + y_2 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

On applique le simplexe primal à ce problème.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
2 & -1 & 1 & 6 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
-3 & 0 & -3 & -7 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & -9 \\
0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & & &
\end{array}
$$

donne

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 1 \\
\frac{2}{3} & \frac{7}{6} & \frac{11}{6} & 0 & \frac{17}{6} & \frac{1}{6} & -1 & -\frac{1}{6} & 1 & 2 \\
-\frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{11}{6} & 0 & -\frac{17}{6} & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{7}{6} & 0 & -2 \\
0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & & &
\end{array}
$$

On échange à présent x_1 avec y_2 (un échange avec x_4 créerait un danger de cycle, et de plus, en veut annuler les variables artificielles).

Après application du pivot, nous obtenons

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\
1 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & 0 & \frac{17}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 1 & 1 & & &
\end{array}$$

On s'arrête comme $y_1 = y_2 = 0$.

La solution optimale est (3,0,0,0,0).

La solution duale (identifiée à partir des contraintes duales au niveau des variables d'écart) correspondante vaut cette fois (1,1). Les seules contraintes actives dans le duale sont les première et quatrième contraintes.