

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.c. } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons $m \leq n$ et $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$. Sans perte de généralité, supposons les m premières colonnes de \mathbf{A} indépendantes, et formons

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{D})$$

Solution de base: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_b \ 0)$, avec $\mathbf{B}\mathbf{x}_b = \mathbf{b}$.

Solution de base dégénérée: si \mathbf{x}_b contient des composantes nulles.

Solution de base réalisable: solution de base telle que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{x} \geq 0$.

Théorème fondamental de la programmation linéaire

Soit un PL sous forme standard, avec \mathbf{A} de dimension $m \times n$ et de rang plein (i.e. $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$).

- S'il y a une solution réalisable, alors il y a une solution de base réalisable.
- S'il y a une solution réalisable optimale, alors il y a une solution de base réalisable optimale.

Preuve.

Réalisabilité. Ecrivons

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Théorème fondamental de la PL: réalisabilité

Si x est réalisable, alors

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

Supposons qu'il y a exactement p composantes > 0 . S.p.d.g., supposons qu'il s'agit des p premières composante: x_1, \dots, x_p . Alors, nous avons

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_p \mathbf{a}_p = \mathbf{b}.$$

Cas 1: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ linéairement indépendants.

Dès lors, $p \leq m$. Si $p = m$, la preuve est complète. Supposons donc $p < m$. Comme \mathbf{A} est de rang plein, on peut choisir $m - p$ vecteurs (colonnes de \mathbf{A}) à partir des $n - p$ vecteurs restants pour former un ensemble de m vecteurs linéairement indépendants. En affectant la valeur 0 aux $m - p$ variables correspondantes, on obtient une solution de base réalisable (dégénérée).

Théorème fondamental de la PL: réalisabilité

Cas 2: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ linéairement dépendants.

Dès lors, pour un certain $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$ ($\in \mathcal{R}^n$), avec au moins un $y_i > 0$,

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_p \mathbf{a}_p = \mathbf{0}.$$

Dès lors, pour un ϵ quelconque,

$$(x_1 - \epsilon y_1) \mathbf{a}_1 + (x_2 - \epsilon y_2) \mathbf{a}_2 + \dots + (x_p - \epsilon y_p) \mathbf{a}_p = \mathbf{b}.$$

Autrement dit,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b}.$$

Pour $\epsilon > 0$, et croissant, les composantes de $\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}$ augmentent, diminuent, ou restent constantes, suivant que y_i est négatif, positif ou nul.

Théorème fondamental de la PL: réalisabilité

Prenons

$$\epsilon = \min\{x_i/y_i \mid y_i > 0\}.$$

Soit j l'indice permettant d'atteindre ce minimum. Alors

$$x_j - \epsilon y_j = 0,$$

et donc $\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}$ a au plus $p - 1$ variables positives. En répétant ce processus si nécessaire, on peut éliminer des variables positives jusqu'à obtenir une solution réalisable avec des colonnes correspondantes qui sont linéairement indépendantes. Le cas 1 s'applique alors.

Théorème fondamental de la PL: optimalité

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une solution optimale réalisable, et comme précédemment, supposons qu'il y a exactement p variables positives x_1, x_2, \dots, x_p .

On peut distinguer à nouveau deux cas.

Le cas 1, correspondant à l'indépendance linéaire, se traite comme pour la question de réalisabilité.

Le cas 2 procède également de manière similaire à la réalisabilité, à ceci près que nous devons montrer que pour n'importe quel ϵ , la solution $x - \epsilon y$ est optimale.

Théorème fondamental de la PL: optimalité

La fonction objectif prend alors comme valeur

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{c}^T \mathbf{y}.$$

Pour ϵ suffisamment proche de 0, qu'il soit positif ou négatif, $\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}$ est réalisable (on ne change pas le signe des composants).

Dès lors, $\mathbf{c}^T \mathbf{y} = 0$. En effet, si $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \neq 0$, un ϵ suffisamment petit et de signe adéquat conduirait à réduire la valeur de la fonction objectif, tout en maintenant la réalisabilité. Dès lors, \mathbf{x} ne serait pas optimal.

On peut alors appliquer le procédé du cas 2 sur la réalisabilité, pour diminuer le nombre de composantes non-nulles de la solution, tout en maintenant l'optimalité, puis en se ramenant au cas 1.

Conséquences du théorème

On peut résoudre un PL en énumérant les solutions de base réalisables. Problème: il peut y en avoir beaucoup. Pour n variables et m contraintes, nous pouvons avoir jusqu'à

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

solutions de base.

Exemple

Considérons le programme

$$\max 2x + 3y$$

$$\text{t.q. } x \geq 1$$

$$2x + 3y \leq 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

On voit immédiatement que la valeur optimale est 5 (pourquoi?).

Sous forme standard, nous obtenons

$$-\min -2x - 3y$$

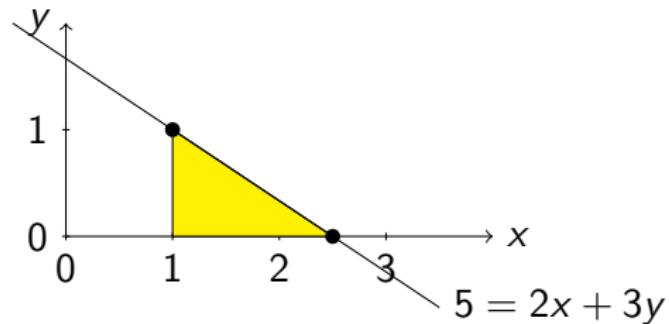
$$\text{t.q. } x - u = 1$$

$$2x + 3y + s = 5$$

$$x \geq 0, y \geq 0, s \geq 0, u \geq 0.$$

Exemple

Graphiquement:



Relations à la convexité

But: faire le lien entre solutions de base réalisables et points extrêmes d'un polytope.

Un point x d'un ensemble convexe C est un point extrême de C s'il n'existe pas deux points distincts x_1 et x_2 dans C tels que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ pour un certain α , $0 < \alpha < 1$.

Polyèdre $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.

Polytope: polyèdre borné non vide.

(Voir Annexe B de Luenberger et Ye pour plus de détails).

Convexité

Un ensemble C dans E^n est dit convexe si pour tout $x_1, x_2 \in C$, et pour n'importe quel réel α tel que $0 < \alpha < 1$, le point $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$.

Géométriquement, cela revient à dire que chaque point du segment joignant deux points quelconques d'un ensemble convexe est aussi dans cet ensemble.

Convexité: propriétés

- ➊ Si C est un ensemble convexe et β un nombre réel, l'ensemble

$$\beta C = \{x \mid x = \beta c, \quad c \in C\},$$

est convexe.

- ➋ Si C et D sont deux ensembles convexes, l'ensemble

$$C + D = \{x \mid x = c + d, \quad c \in C, \quad d \in D\},$$

est convexe.

- ➌ L'intersection de n'importe quelle collection d'ensembles convexes est convexe.

Soit A une matrice $m \times n$ de rang m et b un vecteur de dimension m . Soit K le polytope convexe constitué de l'ensemble des vecteurs x de dimension n satisfaisant

$$Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Un vecteur x est un point extrême de K si et seulement si x est une solution de base réalisable pour le système précédent.

Preuve

- Supposons tout d'abord que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une solution de base réalisable. S.p.d.g.,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b},$$

où $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ sont les m premières colonnes de A , linéairement indépendantes.

Equivalence des points extrêmes et des solutions de base

Supposons par l'absurde que \mathbf{x} n'est pas un point extrême. Il est alors combinaison convexe de deux autres points de K :

$$\exists \mathbf{y}, \mathbf{z} \in K, \mathbf{y} \neq \mathbf{z}, \alpha \in (0, 1) \text{ tels que } \mathbf{x} = \alpha\mathbf{y} + (1 - \alpha)\mathbf{z}.$$

Comme $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{y} \geq 0$, $\mathbf{z} \geq 0$, les $n - m$ dernières composantes de \mathbf{y} et \mathbf{z} sont nulles.

Par définition de K , on a aussi

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}, z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + \dots + z_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b},$$

Comme $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ linéairement indépendantes,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}.$$

Equivalence des points extrêmes et des solutions de base

- Supposons à présent que x est un point extrême de K , et s.p.d.g. que les composantes non-nulles de x sont les k premières composantes. Dès lors:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

avec $x_i > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Pour montrer que x est une solution de base, nous devons montrer que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sont linéairement indépendants. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors, il existe $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, 0 \dots, 0)$ tel que

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_k \mathbf{a}_k = 0,$$

Equivalence des points extrêmes et des solutions de base

On peut prendre $\epsilon \neq 0$ suffisamment petit pour avoir

$$\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y} \geq 0,$$

$$\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \geq 0,$$

et

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}).$$

Clairement,

$$A(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y}) = \mathbf{b},$$

aussi $\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{y}, \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{y} \in K$.

Dès lors, \mathbf{x} peut être exprimé comme combinaison convexe de deux points distincts de K , et donc n'est pas un point extrême.

Ceci implique qu'on doit avoir $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ linéairement indépendants, et de là, $k \leq m$. \mathbf{x} est dès lors solution de base.

Corollaire 1 Si l'ensemble convexe K est non vide, il y a au moins un point extrême.

Corollaire 2 S'il existe une solution optimale finie à un problème de programmation linéaire, il existe une solution optimale finie qui est un point extrême de l'ensemble de contraintes.

Corollaire 3 L'ensemble de contraintes K possède un nombre fini de points extrêmes.

Preuve. L'ensemble des points extrêmes de K est un sous-ensemble des solutions de base, qui sont en nombre fini (il y a un nombre fini de sélections possible de m colonnes de \mathbf{A} parmi n colonnes).

Corollaire 4 Si le polytope convexe K est borné, alors K est un polyhèdre convexe, i.e. K consiste de points qui sont combinaisons convexes d'un nombre fini de points.