

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2012

Stratégies de solution en points intérieurs

Trois grandes approches, suivant les différences dans les définitions du chemin central :

- ① barrière primale, méthode de poursuite de chemin,
- ② méthode primale-duale de poursuite de chemin,
- ③ méthode primale-duale de réduction de potentiel.

Caractéristiques

	R-P	R-D	Saut nul
simplexe primal	X		X
simplexe dual		X	X
barrière primale	X		
poursuite de chemin primale-duale	X	X	
réduction de potentiel primale-duale	X	X	

R : réalisabilité

Méthode primale barrière

Nous partons du problème primal barrière

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x - \mu \sum_{j=1}^n \log x_j \\ \text{s.à. } & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Nous voudrions le résoudre pour μ petit.

Par exemple, $\mu = \epsilon/n$ permet d'obtenir un saut de dualité inférieur à ϵ .

Souci : difficile de résoudre pour μ proche de 0.

Méthode primale barrière

Une stratégie générale est de commencer avec μ modérément large (p.e. $\mu = 100$) et de résoudre le problème approximativement.

La solution correspondante est approximativement sur le chemin central primal, mais probablement assez loin du point correspondant à $\mu \rightarrow 0$.

Ce point ne servira que de point de départ pour le problème avec un μ plus petit.

Typiquement, on mettra à jour μ de l'itération k à l'itération $k + 1$ comme

$$\mu_{k+1} = \gamma \mu_k,$$

pour $0 < \gamma < 1$ fixé.

Méthode primale barrière

Si on commence avec une valeur μ_0 , à l'itération k ,

$$\mu_k = \gamma \mu_0^k,$$

Dès, réduire μ_k/μ_0 sous ϵ requiert

$$k = \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log \gamma} \right\rceil.$$

Souvent, une variante de la méthode de Newton est utilisée pour résoudre les sous-problèmes ainsi construits :

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{s} = \mu \mathbf{1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}$$

Méthode de Newton

Part du développement de Taylor (d'ordre 2) :

$$f(x + s) \approx f(x) + s^T \nabla_x f(x) + \frac{1}{2} s^T \nabla_{xx} f(x) s.$$

pour s assez petit.

Si on se limite à l'ordre 1 et une variable,

$$f(x + s) \approx f(x) + sf'(x)$$

On cherche $f(x + s) = 0$. Cela suggère

$$0 \approx f(x) + sf'(x)$$

ou encore,

$$s = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Méthode de Newton

En appliquant l'idée itérativement, avec $s = x_{k+1} - x_k$, on obtient

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

On peut montrer que la méthode converge si on est suffisamment proche du zéro de la fonction.

Le principe se généralise pour un système de n équations à n inconnues en prenant $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, avec

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

où chaque $f_i(\cdot)$ est fonction de \mathcal{R}^n dans \mathcal{R} .

Méthode de Newton

Récurrence en dimension > 1 :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}(\mathbf{x}_k) f(\mathbf{x}_k).$$

où $J^{-1}(\mathbf{x}_k)$ est le Jacobien de f :

$$J^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla_x^T f_1(x) \\ \nabla_x^T f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla_x^T f_n(x) \end{pmatrix}$$

On peut appliquer le principe au système des conditions d'optimalité (mais on ne donnera pas tous les détails techniques).

Méthode primale barrière

Etant donné un point $x \in \mathring{\mathcal{F}}_P$, la méthode de Newton consistera à chercher des direction \mathbf{d}_x , \mathbf{d}_y et \mathbf{d}_s à partir du système

$$\mu \mathbf{X}^{-2} \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s = \mu \mathbf{X}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{c}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{d}_x = \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{d}_y + \mathbf{d}_s = 0$$

On construit le nouveau point comme

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \mathbf{d}_x.$$

Si $\mathbf{x} \circ \mathbf{s} = \mu \mathbf{1}$ pour un certain $\mathbf{s} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y}$, alors

$$\mathbf{d} \equiv (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_s) = 0.$$

Si une composante de $\mathbf{x} \circ \mathbf{s}$ est plus petite que μ , l'approche tendra à augmenter cette composante, et inversément si la composante est plus grande que μ .

Méthode primale barrière

La méthode marche relativement bien si μ est modérément grand, ou si l'algorithme est démarré avec un point proche de la solution.

Pour trouver $(\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y, \mathbf{d}_s)$, prémultiplions les deux côtés de la première égalité du système de Newton par \mathbf{X}^2 :

$$\mu \mathbf{d}_x + \mathbf{X}^2 \mathbf{d}_s = \mu \mathbf{X1} - \mathbf{X}^2 \mathbf{c}.$$

En prémultipliant par \mathbf{A} et en utilisant $\mathbf{A}\mathbf{d}_x = \mathbf{0}$, nous avons

$$\mathbf{AX}^2 \mathbf{d}_s = \mu \mathbf{AX1} - \mathbf{AX}^2 \mathbf{c}.$$

Comme $\mathbf{d}_s = \mathbf{A}^T \mathbf{d}_y$, nous avons

$$\mathbf{AX}^2 \mathbf{A}^T \mathbf{d}_y = \mu \mathbf{AX1} - \mathbf{AX}^2 \mathbf{c}.$$

On en tire \mathbf{d}_y , et de là, \mathbf{d}_s puis \mathbf{d}_x .