

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2012

Simplexe primal-dual

L'idée est de travailler simultanément sur le primal et le dual.

Principales idées :

- trouver une solution réalisable pour le dual ;
- l'améliorer à chaque étape en optimisant un problème primal restreint associé ;
- essayer de satisfaire les conditions d'écart de complémentarité.

Il s'agit de la variante du simplexe la plus efficace pour les problèmes de flots dans les réseaux.

Simplexe primal-dual

Considérons à nouveau le primal

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

et son dual

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \quad & \lambda^T b \\ \text{t.q.} \quad & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Etant donné une solution réalisable λ pour le dual, définissons

$$P = \{i \mid \lambda^T a_i = c_i\}.$$

Vu que λ est supposé réalisable, cela implique

$$\lambda^T a_i < c_i, \quad i \notin P.$$

Simplexe primal-dual

Correspondant à λ et P , nous définissons le problème *primal restreint associé*

$$\begin{aligned} \min_y \quad & \mathbf{1}^T y \\ \text{t.q.} \quad & Ax + y = b \\ & x \geq 0, \quad x_i = 0 \text{ pour } i \notin P \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

où $\mathbf{1}$ designe the vecteur $(1, 1, \dots, 1)$.

Le dual associé est appelé *dual restreint associé*

$$\begin{aligned} \max_u \quad & u^T b \\ \text{t.q.} \quad & u^T a_i \leq 0, \quad i \in P \\ & u \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Théorème d'optimalité primale-duale

Supposons que λ est réalisable pour le dual et que (x, y) est réalisable pour le primal restreint associé, avec $y = 0$ (de sorte que (x, y) est une solution optimal). Alors, x et λ sont optimaux pour les programmes primal et dual originaux respectifs.

Démonstration.

x est clairement réalisable pour le primal : $Ax = b$. Nous avons aussi, par définition de P , $\lambda^T a_i = c_i$, si $x_i \neq 0$, de sorte que

$$c^T x = \lambda^T Ax.$$

En combinant ces deux observations, nous avons

$$c^T x = \lambda^T b,$$

impliquant l'optimalité de x et λ .



Etape 1 Etant donné une solution réalisable λ_0 pour le dual, déterminer le primal restreint associé.

Etape 2 Optimiser le primal restreint associé. Si la valeur optimale de ce primal restreint associé (impliquant $y = 0$), la solution correspondante est optimale pour le primal original, en vertu du théorème d'optimalité primale-duale ; arrêt.

Etape 3 Si la valeur optimale du primal restreint associé est strictement positive (i.e. if $y \neq 0$), la solution optimale de ce primal restreint associé n'est pas réalisable pour le primal, et on cherche à améliorer la solution réalisable du dual avant de déterminer un nouveau primal restreint associé.

Etape 3 (suite) Obtenir du tableau du simplexe du primal restreint la solution u_0 du dual restreint associé. S'il n'y a pas de j pour lequel $u_0^T a_j > 0$, le primal n'a pas de solution réalisable ; arrêt. Sinon, construire le nouveau vecteur dual réalisable

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon_0 u_0,$$

où

$$\epsilon_0 = \min_j \left\{ \frac{c_j - \lambda_0^T a_j}{u_0^T a_j} \mid u_0^T a_j > 0 \right\}.$$

Retour à l'étape 1, en utilisant ce λ .

Algorithme primal-dual : exemple

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{soumis à} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Comme tous les coefficients dans l'objectifs sont non-négatifs, le vecteur $\lambda = (0, 0)$ est réalisable pour le dual.

Tableau du simplexe pour le primal restreint associé :

	a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
	1	1	2	1	0	3
	2	1	3	0	1	5
	-3	-2	-5	0	0	-8
$c_i - \lambda^T a_i \rightarrow$	2	1	4			

Algorithme primal-dual : exemple

Les coefficients de x_1, x_2, x_3 dans la fonction objectif du primal restreint sont tous nuls, de sorte que la ligne des coûts réduits dans le tableau du primal restreint pour les variables hors base vaut, à l'optimalité pour le primal restreint,

$$0 - u^T a_i, \quad i \notin P.$$

Nous avons tenu ici compte de la concordance des multiplicateurs du simplexe avec la solution du dual à l'optimalité.

Pour les variables de base x_j , les coûts réduits sont nuls, et de même, comme les indices de ces variables sont dans P , $u_0^T a_j = 0$ en vertu des écarts de complémentarité.

Algorithme primal-dual : exemple

Comme aucune contrainte duale n'est active (il n'y a pas de zéro dans la dernière ligne), $P = \emptyset$.

Dès lors, x_1 , x_2 et x_3 sont fixées à zéro. Il n'y a pas de coût réduit négatif pour les variables restantes, y_1 et y_2 . La solution

$$(0, 0, 0, 3, 5)$$

est donc optimale pour le primal restreint associé.

Le dual restreint associé s'écrit comme

$$\begin{aligned} \max_u \quad & u^T b \\ \text{t.q.} \quad & u \leq \mathbf{1}, \end{aligned}$$

et $u = (1, 1)$ est solution optimale.

Algorithme primal-dual : exemple

Les quantités $-u_0 a_i$, $i = 1, 2, 3$, sont égales aux trois premiers éléments de la troisième ligne.

Pour trouver ϵ , nous prenons dès lors le minimum des rapport

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}.$$

Le minimum étant $1/2$, a_2 entre dans la base, et on annule l'entrée correspondante sur la quatrième ligne. Pour ce faire, on ajoute ϵ fois la troisième ligne à la dernière (on ajoute ainsi bien $\epsilon u_0 a_i$, reflétant de ce fait les nouvelles contraintes de dualité).

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	-2	-5	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

Algorithme primal-dual : exemple

On doit à présent minimiser le nouveau primal restreint, avec $P = \{2\}$.

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
2	1	3	0	1	5
-3	-2	-5	0	0	-8
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$			

Algorithme primal-dual : exemple

En calculant les rapports de la dernière ligne sur l'avant-dernière, on obtient $\epsilon = 1/2$, et comme colonne entrante a_1 .

On ajoute ϵ fois la troisième ligne à la dernière, pour obtenir

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
0	0	1			

$$P = \{1, 2\}.$$

Algorithme primal-dual : exemple

Résolution du primal restreint associé.

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
1	1	2	1	0	3
1	0	1	-1	1	2
-1	0	-1	2	0	-2
0	0	1			

a_1	a_2	a_3	y_1	y_2	b
0	1	1	2	-1	1
1	0	1	-1	1	2
0	0	0	1	1	0
0	0	1			

Le primal est réalisable : stop. La solution est

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$$

Algorithme primal-dual : preuve

Dans l'étape 3, il est indiqué que $u_0^T a_j \leq 0$ pour tout j implique que le primal n'a pas de solution réalisable.

Si $u_0^T a_j \leq 0$ pour tout j , le vecteur

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$$

est réalisable pour le problème dual pour toute valeur positive de ϵ , comme

$$\lambda_\epsilon^T A = \lambda_0^T A + \epsilon u_0^T A \leq c^T.$$

De plus, comme

$$u_0^T b = \mathbf{1}^T y > 0,$$

nous voyons que la quantité

$$\lambda_\epsilon^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b,$$

est non bornée, lorsque nous augmentons ϵ . Du théorème de dualité forte, le primal n'est pas réalisable.

Algorithme primal-dual : preuve

Supposons à présent que pour au moins un j , $u_0^T a_j > 0$.

A nouveau, définissons

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon u_0$$

Par construction,

$$u_0^T a_i \leq 0, \forall i \in P.$$

Pour un ϵ positif assez petit, λ_ϵ est réalisable pour le dual, et nous pouvons augmenter ϵ jusqu'à transformer une des inégalités

$$\lambda_\epsilon^T a_j < c_j, j \notin P$$

en égalité. Ceci détermine ϵ_0 et un indice k correspondant.

Algorithme primal-dual : preuve

Le nouveau vecteur λ correspond à une valeur accrue de la fonction objectif duale :

$$\lambda^T b = \lambda_0^T b + \epsilon u_0^T b.$$

De plus, le nouvel ensemble correspondant P inclut l'indice k .

Pour tout autre indice i t.q. $x_i > 0$ est dans P aussi, comme en vertu de l'écart de complémentarité,

$$u_0^T a_i = 0,$$

pour un tel i , et dès lors

$$\lambda^T a_i = \lambda_0^T a_i + \epsilon u_0^T a_i = c_i.$$

Algorithme primal-dual : preuve

Ceci signifie que l'ancienne solution optimale est réalisable pour le nouveau problème primal restreint associé, et que a_k peut entrer dans le base. Puisque $u_0^T a_k > 0$, pivoter sur a_k va décroître la valeur du primal restreint associé.

Donc,

- soit la valeur du primal décroît (strictement sous l'hypothèse de non-dégénérescence),
- soit le problème est déclaré non réalisable.

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes comme il y a un nombre fini de bases réalisables.