

# IFT 2505

## Programmation Linéaire

Fabian Bastin  
DIRO  
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2013

# Forme matricielle de la méthode du simplexe

Utile pour mieux comprendre, et construire des variantes.

Soit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \mathbf{D}]$$

où nous supposons que  $\mathbf{B}$  est une base, et décomposons  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{c}$  de manière similaire:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_D), \quad \mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_D).$$

Le programme linéaire standard devient

$$\min_{\mathbf{x}} z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D$$

$$\text{t.q. } \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{D}\mathbf{x}_D = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B \geq 0, \ \mathbf{x}_D \geq 0.$$

# Forme matricielle de la méthode du simplexe

La solution de base associée, que nous supposons également réalisable, devient

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{0}), \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Dès lors,

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{0}.$$

Plus généralement,

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D.$$

et

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{x}_D) + \mathbf{c}_D^T \mathbf{x}_D \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left( \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} \right) \mathbf{x}_D. \end{aligned}$$

# Forme matricielle de la méthode du simplexe

Ceci permet s'exprimer n'importe quelle solution en termes de  $\mathbf{x}_D$ .  
Dès lors,

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$$

est le vecteur des coûts réduits.

En d'autres termes,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_D^T & 0 \end{pmatrix}$$

Forme canonique: on multiplie la partie supérieure par  $\mathbf{B}^{-1}$  et on récupère l'expression de l'objectif en termes de coûts réduits pour la partie inférieure:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

# Méthode du simplexe révisée

Converge souvent en  $O(m)$ .

La méthode révisée ordonne les calculs afin d'éviter les opérations inutiles, en particulier pour les variables non concernées par les pivotages.

Soit  $\mathbf{B}^{-1}$  l'inverse de la base actuelle, et la solution actuelle

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{y}_0 = \mathbf{B}^{-1}b.$$

**Etape 1** Calculer les coefficients de coûts réduits actuels

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}$$

On calcule d'abord

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

puis

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}.$$

**Etape 2** Déterminer le vecteur  $\mathbf{a}_q$  qui va entrer dans la base en sélectionnant le coût réduit le plus négatif, et calculer

$$\mathbf{y}_q = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_q,$$

donnant l'expression de  $\mathbf{a}_q$  en termes de la base actuelle.

**Etape 3** Si aucun  $y_{iq}$  n'est  $> 0$ , arrêt: le problème n'est pas borné. Sinon, calculer les rapports  $y_{i0}/y_{iq}$  pour  $y_{iq} > 0$  pour déterminer le vecteur qui va quitter la base.

**Etape 4** Mettre à jour  $\mathbf{B}^{-1}$  et la solution actuelle  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ . Retour à l'étape 1.

La mise à jour de  $\mathbf{B}^{-1}$  se fait en effectuant l'opération classique de pivotage, constituée de  $\mathbf{B}^{-1}$  et  $\mathbf{y}_q$ , où le pivot est l'élément approprié dans  $\mathbf{y}_q$ . On en profite pour mettre à jour  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ .

# Exemple

$$\max_x 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Après ajout des variables d'écart:

$$\max_x 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{t.q. } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

# Exemple

Tableau:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{b}$
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
$\mathbf{c}^T$	-3	-1	-3	0	0	0	0

On se limite à

Var	$\mathbf{x}_B$			
$x_4$	1	0	0	2
$x_5$	0	1	0	5
$x_6$	0	0	1	6

Nous avons

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} = (0 \ 0 \ 0) \mathbf{B}^{-1} = (0 \ 0 \ 0)$$

et

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D} = (-3 \ -1 \ -3)$$



# Exemple

On fait entrer  $\mathbf{a}_2$  (violant la règle du coût le plus négatif)

Var				$x_B$	$y_2$
$x_4$	1	0	0	2	1
$x_5$	0	1	0	5	2
$x_6$	0	0	1	6	2

Var				$x_B$
$x_2$	1	0	0	2
$x_5$	-2	1	0	1
$x_6$	-2	0	1	2

Nous avons

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Exemple

Nous avons également

$$\mathbf{c}_B^T = (-1 \quad 0 \quad 0),$$

et dès lors

$$\begin{aligned}\lambda^T &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \\ &= (-1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 0 \quad 0)\end{aligned}$$

Les coûts réduits se calculent de manière similaire

$$(-3 \quad -3 \quad 0) - (-1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \quad -2 \quad 1)$$

En d'autres termes,

$$r_1 = -1, \quad r_3 = -2, \quad r_4 = 1.$$

# Exemple

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Le variable entrante retenue est  $x_3$ , et on construit le tableau

Var				$x_B$	$y_3$
$x_2$	1	0	0	2	1
$x_5$	-2	1	0	1	1
$x_6$	-2	0	1	2	-1

Après le pivot:

Var				$x_B$
$x_2$	3	-1	0	1
$x_3$	-2	1	0	1
$x_6$	-4	1	1	3

# Exemple

$$\lambda^T = (-1 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad -2 \quad 0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_D^T &= (-3 \quad 0 \quad 0) - (3 \quad -2 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-3 \quad 0 \quad 0) - (4 \quad 3 \quad -2) = (-7 \quad -3 \quad 2) \end{aligned}$$

On fait entrer  $\mathbf{a}_1$ .

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

# Exemple

Var				$x_B$	$y_1$
$x_2$	3	-1	0	1	5
$x_3$	-2	1	0	1	-3
$x_6$	-4	1	1	3	-5

$x_1$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$x_3$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
$x_6$	-1	0	1	4

$$\lambda^T = (-3 \quad -3 \quad 0) \mathbf{B}^{-1} = \left(-\frac{6}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad 0\right)$$

# Exemple

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_D^T &= (-1 \quad 0 \quad 0) - \left(-\frac{6}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad 0\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1 \quad 0 \quad 0) - \left(-\frac{12}{5} \quad -\frac{6}{5} \quad -\frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{7}{5} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (1/5, 0, 8/5, 0, 0, 4)$  est une solution optimale.

$\mathbf{B}^{-1}$  n'apparaît que dans la résolution de systèmes linéaires. Mais dans ce contexte, on ne calcule jamais  $\mathbf{B}^{-1}$  pour des raisons de stabilité numérique.

Reformulons le simplexe pour faire apparaître les termes linéaires.

## Etape 1

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{y}_0,$$

avec

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_0 = \mathbf{b}.$$

## Etape 2 Résoudre

$$\lambda^T \mathbf{B} = \mathbf{c}_B^T,$$

et

$$\mathbf{r}_D^T = \mathbf{c}_D^T - \lambda^T \mathbf{D}.$$

Si  $\mathbf{r}_D \geq 0$ , stop: la solution actuelle est optimale.

**Etape 3** Déterminer le vecteur  $\mathbf{a}_q$  qui va entrer la base en sélectionnant le coefficient de coût réduit le plus négatif, et résoudre

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_q = \mathbf{a}_q.$$

**Etape 4** Si aucun  $\mathbf{y}_{iq} > 0$ , stop: le problème est non borné. Sinon, calculer les rapports  $\mathbf{y}_{i0}/\mathbf{y}_{iq}$  pour  $\mathbf{y}_{iq} > 0$ , et sélectionner le rapport le plus négatif pour déterminer quel vecteur sortira de la base.



**Etape 5** Mise à jour de **B**. Retour à l'étape 1.

Cette manière de formuler le simplexe offre

- ① une meilleure stabilité numérique,
- ② des avantages de stockage mémoire (par exemple, si **B** est une matrice creuse,  $\mathbf{B}^{-1}$  peut être pleine).

On décompose **B** comme

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}.\mathbf{U}$$

où

- **L** est une matrice triangulaire inférieure,
- **U** est une matrice triangulaire supérieure.

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{Bx} &= \mathbf{b}, \\ \Leftrightarrow \mathbf{LUx} &= \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \mathbf{Ly} &= \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Ux}\end{aligned}$$

Résoudre un système triangulaire est immédiat!

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

# Résolution de système triangulaire

$$x_1 = b_1/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$$

$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$$

Conditions:  $a_{ii} \neq 0, \forall i$ .

Note: on ne suppose aucun échange de ligne (parfois opéré pour préserver la précision et le caractère creux).

Mise à jour:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

# Résolution de système triangulaire

Nouvelle base

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots & \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}\overline{\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_{k+1} & \cdots & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_m & \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ &= (u_1 \quad \cdots \quad u_{k-1} \quad u_{k+1} \quad \cdots \quad u_m \quad \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_q) \\ &= \overline{H}. \end{aligned}$$

# Résolution de système triangulaire

En effet

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m) = \mathbf{L} (\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m) = (\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m)$$

$\overline{\mathbf{H}}$  a la forme

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

# Résolution de système triangulaire

$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}_q$  est un sous-produit du calcul de  $\mathbf{y}_q$ , aussi c'est "gratuit".

$\overline{\mathbf{H}}$  peut être ramené à une forme triangulaire supérieure grâce à une série d'éliminations de Gauss.

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{M}_{m-1}\mathbf{M}_{m-2}\dots\mathbf{M}_k\overline{\mathbf{H}}$$

où  $\mathbf{M}_i$  a la forme

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & m_i & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{L}}\mathbf{U}$$

avec

$$\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\mathbf{M}_k^{-1} \dots \mathbf{M}_{m-1}^{-1}.$$

$$\mathbf{M}_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -m_i & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$