

IFT 2505

Programmation Linéaire

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

<http://www.iro.umontreal.ca/~bastin/ift2505.php>

Automne 2012

Problèmes de transport

Beaucoup de problèmes linéaires présentent certaines structures qui simplifient grandement leur résolution.

Supposons que nous avons m origines contenant certains quantités d'une marchandise qui doit être transportée à n destinations pour satisfaire certaines demandes :

- origine i : contient la quantité a_i ;
- destination j : présente une demande b_j .

Nous supposons le problème équilibré, i.e. l'offre totale est égale à la demande totale :

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Formulation

Les nombres a_i et b_j , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, sont supposés non-négatifs, et de plus, souvent entiers.

c_{ij} : coût de transport d'une unité de marchandise de l'origine i à la destination j .

On veut déterminer les quantités à transporter pour chaque paire (i, j) .

Formulation

Programme mathématique :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.à.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Formulation

Réécrivons les contraintes d'égalité :

$$x_{11} + \dots + x_{1n} = a_1$$

$$x_{21} + \dots + x_{2n} = a_2$$

⋮

$$x_{m1} + \dots + x_{mn} = a_m$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{m2} = b_2$$

⋮

$$x_{1n} + x_{2n} + x_{mn} = b_n$$

Formulation

En d'autres termes, la matrice \mathbf{A} a la structure

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T & & & \\ & \mathbf{1}^T & & \\ & & \vdots & \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{I}^T \end{pmatrix}$$

où I est la matrice identité ($n \times n$).

Notation plus compacte :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, a_n) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\mathbf{a} = (30, 80, 10, 60) \quad \mathbf{b} = (10, 50, 20, 80, 20) \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

La somme de l'offre, ainsi que de la demande, est 180.

Réalisabilité et optimalité

Première étape : montrer que le problème est réalisable.

Soit S la demande totale (et donc, l'offre totale).

$$x_{ij}^0 = \frac{a_i b_j}{S}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

est réalisable :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{S} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{S} = b_j$$

De plus, x_{ij} est bornée par a_i (et b_j). Un programme avec un ensemble réalisable et borné a toujours une solution optimale. Dès lors, un problème de transport a toujours une solution optimale.

Redondance

Nous avons un ensemble de $m + n$ contraintes linéaires. Toutefois,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i, \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j.$$

On a formé deux combinaisons linéaires distinctes des contraintes, pour former des termes de gauche identiques (et les termes de droite sont également identiques en vertu de l'hypothèse de départ).

Considérons la première contrainte :

$$\sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=2}^m a_i$$

Redondance

Autrement, nous avons pu réécrire la première contrainte comme une combinaison linéaire des autres contraintes.

On pourrait faire la même chose avec n'importe quelle contrainte.
Il y a donc une contrainte redondante.

On va établir qu'on ne peut trouver qu'une redondance, et donc ramener le problème à un ensemble de $m + n - 1$ vecteurs. Une solution de base réalisable non-dégénérée consistera de $m + n - 1$ variables.

Théorème

Un problème de transport a toujours une solution, mais il y a exactement une contrainte d'égalité redondante. Quand on retire n'importe laquelle des contraintes d'égalité, le système restant de $n + m - 1$ contraintes d'égalité est linéairement indépendant.

Preuve

L'existence d'une solution et la redondance ont déjà été établis. La somme de toutes les contraintes d'origine moins la somme de toutes les contraintes de destination est égale à zéro, et n'importe quelle contrainte peut être exprimée comme une combinaison linéaire des autres. On peut donc retirer n'importe laquelle de ces contraintes. Supposons qu'on retire la dernière.

Théorème

Supposons par l'absurde qu'il existe une combinaison linéaire des équations restante qui soit nulle.

Notons les coefficients d'une telle combinaison α_i , $i = 1, 2, \dots, m$, et β_j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Comme nous avons écarté la dernière contrainte, x_{in} , $i = 1, 2, \dots, m$ apparaît seulement dans la i^e équation. Dès lors, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Dans les équations restantes, chaque x_{ij} n'apparaît que dans une équation (jamais si $j = n$), aussi $\beta_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Dès lors, l'ensemble d'équations est linéairement indépendant.

Découverte d'une solution réalisable de base

Du théorème précédent, on voit qu'une base pour le problème de transport consiste de $m + n - 1$ vecteurs, et qu'un solution réalisable de base non dégénérée consiste de $m + n - 1$ variables.

Tableau de solution :

| | | | | | |
|----------|----------|----------|-----|----------|-------|
| x_{11} | x_{12} | x_{13} | ... | x_{1n} | a_1 |
| x_{21} | x_{22} | x_{23} | ... | x_{2n} | a_2 |
| : | : | : | .. | : | : |
| x_{m1} | x_{m2} | x_{m3} | ... | x_{mn} | a_m |
| b_1 | b_2 | b_3 | ... | b_n | |

Les éléments individuels du tableau apparaissent dans des cellules et représentent une solution. Une cellule dénote une valeur nulle.

Règle du coin Nord-Ouest

Etape 0. Le tableau est créé, avec toutes les cellules vides.

Etape 1. On sélectionne la cellule dans le coin supérieur gauche (d'où le nom de la méthode).

Etape 2. On alloue le montant maximum réalisable compatible avec les exigences de sommes sur la ligne et la colonne impliquant cette colonne (au moins une de ces exigences sera remplie).

Etape 3. On se déplace d'une cellule vers la droite s'il reste des exigences de ligne à satisfaire (offre). Autrement, on se déplace d'une cellule vers le bas. Si toutes les exigences sont remplies, arrêt. Sinon, retour à l'étape 2.

Règle du coin Nord-Ouest : exemple

$$\mathbf{a} = (30, 80, 10, 60)$$

$$\mathbf{b} = (10, 50, 20, 80, 20)$$

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 20 | | | | 30 |
| | 30 | 20 | 30 | | 80 |
| | | | 10 | | 10 |
| | | | 40 | 20 | 60 |
| 10 | 50 | 20 | 80 | 20 | |

Règle du coin Nord-Ouest : dégénérescence

Il existe la possibilité qu'à un certain point, les exigences de ligne et de colonne correspondant à une cellule soient toutes deux remplies.

La prochaine entrée sera alors un zéro, indiquant une solution de base dégénérée. Dans pareil cas, il y a un choix à faire quand à l'endroit où place le zéro : à droite ou en-dessous.

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 30 | | | | 30 |
| 20 | 20 | | | 40 |
| | 0 | 20 | | 20 |
| | | 20 | 40 | 60 |
| 50 | 20 | 40 | 40 | |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 30 | | | | 30 |
| 20 | 20 | 0 | | 40 |
| | | 20 | | 20 |
| | | 20 | 40 | 60 |
| 50 | 20 | 40 | 40 | |

Matrices triangulaires

Définition. Une matrice carrée M non singulière est dite triangulaire si elle peut être mise sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure au moyen d'une permutation de ses lignes et colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème de triangularité de base

Chaque base du problème de transport est triangulaire.

On repart du système de contraintes

$$\begin{array}{llll} x_{11} + \dots + x_{1n} & = & a_1 \\ x_{21} + \dots + x_{2n} & = & a_2 \\ \vdots & & \\ x_{m1} + \dots + x_{mn} & = & a_m \\ x_{11} & + x_{21} & + x_{m1} & = b_1 \\ x_{12} & & + x_{22} & + x_{m2} & = b_2 \\ \vdots & & & & \\ x_{1n} & & + x_{2n} & + x_{mn} & = b_n \end{array}$$

Théorème de triangularité de base

Changeons le signe de la demi-partie supérieure du systèmes ; la matrice de coefficients consiste d'entrées égales à +1, -1 ou 0. On peut également supprimer n'importe quelle de ces équations pour éliminer la redondance. De la matrice de coefficients résultante, on forme une base **B** en sélectionnant un sous-ensemble non singulier de $m + n - 1$ colonnes.

Chaque colonne de **B** contient au plus deux entrées non-nulles : un +1 et un -1. Dès lors, il y a au plus $2(m + n - 1)$ entrées non nulles dans la base.

Cependant, si chaque colonne contient deux entrées non nulles, alors la somme de toutes les lignes serait zéro, contredisant la non-singularité de **B**.

Théorème de triangularité de base

Dès lors, au moins une colonne de \mathbf{B} doit contenir seulement une entrée non nulle. Ceci signifie que le nombre totale d'entrées non nulles dans \mathbf{B} est inférieur à $2(m + n - 1)$.

Dès lors, il y a au moins une ligne avec seulement une entrée non-nulle, que l'on peut isoler pour créer la première ligne de la matrice triangulaire.

Un argument similaire peut être appliqué à la sous-matrice de \mathbf{B} obtenue en supprimant la ligne contenant une seule entrée non nulle et la colonne correspondant à cette entrée. Cette sous-matrice doit également contenir une ligne avec une seule entrée non-nulle. On repète l'argument jusqu'à obtenir \mathbf{B} triangulaire.

Théorème de triangularité de base : illustration

Considérons la solution réalisable

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 20 | | | | 30 |
| | 30 | 20 | 30 | | 80 |
| | | | 10 | | 10 |
| | | | 40 | 20 | 60 |
| 10 | 50 | 20 | 80 | 20 | |

Il est facile de voir que la matrice x est triangulaire.

Puisque n'importe quelle matrice de base est triangulaire et que tous les éléments non nuls sont égaux à 1 (ou -1), il suit que le processus de substitution en arrière impliquera simplement des additions et des soustractions de lignes et de colonnes. Aucune multiplication n'est requise.

Il suit que si les lignes et les colonnes originales sont entières, les valeurs de toutes les variables de base sont entières.