

IFT 3245

Simulation et modèles

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Automne 2012

Variables antithétiques (AV)

Semblable à l'idée des VAC, sauf que l'on veut maintenant estimer une seule espérance par un moyen de plusieurs estimateurs négativement corrélés.

Supposons que l'on a k estimateurs sans biais de μ , $(X^{(1)}, \dots, X^{(k)})$, avec $\text{Var}[X^{(1)}] = \dots = \text{Var}[X^{(k)}]$.

La moyenne

$$X_a = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k X^{(\ell)}$$

est un estimateur sans biais de μ , avec variance

$$\text{Var}[X_a] = \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \text{Cov}[X^{(j)}, X^{(\ell)}] = \frac{\text{Var}[X^{(1)}]}{k} + \frac{2}{k^2} \sum_{j < \ell} \text{Cov}[X^{(j)}, X^{(\ell)}]$$

Variables antithétiques

Si les $X^{(\ell)}$ sont indépendants, les covariances sont nulles.

La variance est réduite ssi $\text{Var}[X_a] < \text{Var}[X_{(1)}]/k$,
ssi la somme des covariances est négative.

Pour un total de $n = mk$ répétitions, on définit

$$\bar{X}_{a,n} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{a,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^k X_i^{(\ell)},$$

où $X_{a,1}, \dots, X_{a,m}$ sont des copies i.i.d. de X_a .

Estimateur sans biais de $\text{Var}[X_a]$; variance empirique:

$$S_{a,m}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_{a,i} - \bar{X}_{a,n})^2.$$

Méthode AV générale

Soit $\mu = E[X]$, où $X = f(\mathbf{U})$ et $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots)$ une suite i.i.d. $U(0, 1)$. Pour $\ell = 1, \dots, k$, soit $X^{(\ell)} = f(\mathbf{U}^{(\ell)})$ où $\mathbf{U}^{(\ell)}$ est une suite i.i.d. $U(0, 1)$.

Le but de l'approche de variables antithétiques généralisées est d'induire une dépendance entre les \mathbf{U}_ℓ de manière à rendre $\sum_{j < \ell} \text{Cov}[X^{(j)}, X^{(\ell)}] < 0$.

Paires antithétiques

On a $k = 2$,

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots),$$

$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{one} - \mathbf{U} = (1 - U_1, 1 - U_2, \dots)$, la suite antithétique.

Posons $X_a = [X^{(1)} + X^{(2)}]/2$,

$$\begin{aligned}\text{Var}[X_a] &= (\text{Var}[X^{(1)}] + \text{Var}[X^{(2)}] + 2 \text{Cov}[X^{(1)}, X^{(2)}])/4 \\ &= (\text{Var}[X^{(1)}] + \text{Cov}[X^{(1)}, X^{(2)}])/2,\end{aligned}$$

et $\text{Var}[X_a] < \text{Var}[X]/2$ ssi $\text{Cov}[X^{(1)}, X^{(2)}] < 0$.

Intuition: Les événements désastreux pour $X^{(1)}$ seront compensés par des événements antithétiques chanceux pour $X^{(2)}$, et vice-versa.

Combinaison VAC-AV

Supposons que l'on veut comparer deux systèmes en utilisant des VAC, et aussi des paires de répétitions antithétiques.

Si ces deux méthodes fonctionnent bien séparément, fera-t-on nécessairement mieux en les combinant ? Non.

Soit $X_k^{(1)} = f_k(\mathbf{U})$ et $X_k^{(2)} = f_k(\mathbf{one} - \mathbf{U})$ la paire antithétique pour le système k . On a

$$\begin{aligned}& \text{Var} \left[\frac{X_2^{(1)} + X_2^{(2)}}{2} - \frac{X_1^{(1)} + X_1^{(2)}}{2} \right] \\&= \frac{\text{Var}[X_1^{(1)}] + \text{Var}[X_1^{(2)}] + \text{Var}[X_2^{(1)}] + \text{Var}[X_2^{(2)}]}{4} \\&\quad + \frac{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_1^{(2)}] + \text{Cov}[X_2^{(1)}, X_2^{(2)}]}{2} - \frac{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}] + \text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(2)}]}{2} \\&\quad - \frac{\text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(1)}] + \text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(2)}]}{2}. \\&= \text{Var}[X_1^{(1)}] + \underbrace{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_1^{(2)}]}_{\square} - \underbrace{\text{Cov}[X_1^{(1)}, X_2^{(1)}]}_{\square} - \underbrace{\text{Cov}[X_1^{(2)}, X_2^{(1)}]}_{\square}.\end{aligned}$$