IFT 3245
Simulation et modèles

Fabian Bastin
DIRO
Université de Montréal

Automne 2012

Récurrences linéaires dans $\mathcal{F}_2$

Considérons $\mathcal{F}_2$, l'ensemble $\{0, 1\}$ sur lequel sont définies les opérations d'addition et de multiplication modulo 2.

A partir du vecteur d'état $\boldsymbol{x}_{n-1}$, à l'étape $n-1$, nous définissons comme précédemment la récurrence linéaire:

$$\boldsymbol{x}_n = X\boldsymbol{x}_{n-1}.$$

Toutefois, $\boldsymbol{x}_n$ est exprimé à présent comme un vecteurs de k bits, de sorte que chaque composante se trouve bien dans $\mathcal{F}_2$.

Le vecteur de sortie y_n, défini sur w bits, est obtenu comme suit:

$$\boldsymbol{y}_n = B\boldsymbol{x}_n.$$

Récurrences linéaires dans $\mathcal{F}_2$

Il nous reste à définir la sortie, à savoir un réel compris dans l'intervalle $[0, 1)$:

$$u_n = \sum_{j=1}^{w} y_{n,j-1} 2^{-j} \;=\; .y_{n,0}\; y_{n,1}\; y_{n,2}\; \cdots$$

Chaque coordonnée de $\boldsymbol{x}_n$ et de $\boldsymbol{y}_n$ suit la récurrence linéaire

$$x_{n,j} = (\alpha_1 x_{n-1,j} + \cdots + \alpha_k x_{n-k,j}) \bmod 2,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 1\}$, ce qui permet de définir le

$$P(z) = z^k - \alpha_1 z^{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} z - \alpha_k = \det(X - zI).$$

La période maximale $\rho = 2^k - 1$ est atteinte ssi $P(z)$ est primitif sur $\mathcal{F}_2$ (c'est-à-dire qu'il n'est pas factorisable en produit de polynômes).

Récurrences linéaires dans $\mathcal{F}_2$

De même que pour les MRG's, il est possible de sauter en avant dans le séquence ainsi produite, par blocs de i étapes, en procédant comme suit:

$$\boldsymbol{x}_{n+i} = \underbrace{(X^i \mod 2)}_{\text{précalculer}} \boldsymbol{x}_n \mod 2.$$

Générateur de Tausworthe (ou LFSR: linear feedback shift register)

De tels générateurs ont été introduits par Tausworthe, en 1965. Nous définissons une séquence $x_1, x_2, \ldots$ de chiffres binaires par la récurrence

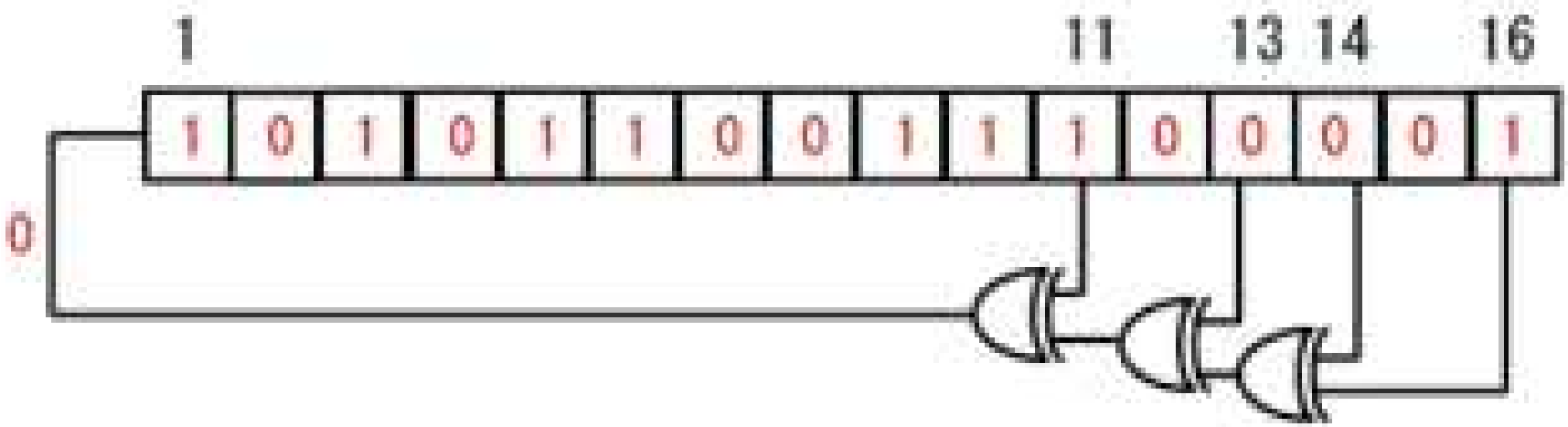
$$x_n = (a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k}) \mod 2,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 1\}$, et $a_k \neq 0$.

Le nom du générateur vient de la possibilité d'utilisation d'un registre de décalage (shift register), alimenté par une fonction de feedback linéaire, avec 16 bits. La fonction de sortie est définie comme

$$u_n = \sum_{l=1}^{w} x_{n\nu+l-1} 2^{-l} \;=\; .x_{n\nu} x_{n\nu+1} x_{n\nu+2} \cdots x_{n\nu+w-1}.$$

Registre de décalage à feedback linéaire.



Cela revient à choisir

$$X = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} & \cdots & a_1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\nu} \text{ et } B = I.$$

Comme précédemment, la période maximale est $\rho = 2^k - 1$, laquelle est atteinte ssi $Q(z) = z^k - a_1 z^{k-1} - \cdots - a_{k-1} z - a_k$ est primitif et le plus grand commun diviseur de ν et $2^k - 1$ vaut 1.

Dans la plupart des applications, seulement deux des coefficients sont non nuls pour simplifier l'implantation, ce qui donne le trinôme: $Q(z) = z^k - a_r z^{k-r} - a_k$.

Comme on travaille dans $\mathcal{F}_2$, cela donne la récurrence

$$x_n = (x_{n-r} + x_{n-k}) \mod 2.$$

L'exécution de l'addition modulo 2 est équivalente à l'instruction ou-exclusif (xor) sur les bits:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n-r} = x_{n-k}, \\ 1 & \text{si } x_{n-r} \neq x_{n-k}. \end{cases}$$

LFSR

Plus généralement, on construit une implantation très rapide par des shifts, xors, masques, etc., si $\nu \leq r$ et $2r > k$.

Les générateurs LFSR sont connus pour avoir des déficiences statistiques. On peut cependant en améliorer les propriétés en considérant des LFSR combinés.

Generalized feedback shift register (GFSR)

Introduit par Lewis et Payne (1973), ce générateur se base sur la récurrence

$$\boldsymbol{v}_n = (a_1 \boldsymbol{v}_{n-1} + \cdots + a_r \boldsymbol{v}_{n-r}) \mod 2 = (v_{n,0}, \ldots, v_{n,w-1})^T,$$

et

$$\boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{v}_n.$$

Generalized feedback shift register (GFSR)

Si $P(z)$ est un trinôme, ce qui est courant dans les implantations, nous avons

$$\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_{n+m-r} + \boldsymbol{v}_{n-r}) \mod 2,$$

ce qui donne

$$X = \begin{pmatrix} & & & & I_w & & I_w \\ I_w & & & & & & \\ & I_w & & & & & \\ & & & I_w & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & I_w & \end{pmatrix}$$

Generalized feedback shift register (GFSR)

Plus généralement, $P(z) = z^r - a_1 z^{r-1} - \cdots - a_{r-1} z - a_r$ et la période maximale est $2^r - 1$ même si l'état a rw bits.

Ceci signifie que nous utilisons w copies de la récurrence du LFSR, avec des valeurs initiales différentes, et on utilise une copie pour chaque chiffre de l'expansion fractionnelle de u_n. Si $\{x_{j,n}\}$ désigne la j^{e} copie et si $x_{j,n} = x_{n+d_j}$ pour tout j, n,

$$u_n = \sum_{j=1}^{w} x_{n+d_j} 2^{-j}.$$

Souvent, $d_j = (j-1)d$, pour un certain d fixéé

Twisted GFSR

Ces générateurs, proposés par Matsumoto et Kurita 1992, 1994, généralisent les GFSR comme suit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_n &= (\boldsymbol{v}_{n+m-r} + A\boldsymbol{v}_{n-r}) \mod 2 \\ \boldsymbol{y}_n &= \boldsymbol{v}_n \text{ ou } \boldsymbol{y}_n = T\boldsymbol{v}_n, \\ X &= \begin{pmatrix} & & & I_w & & A \\ I_w & & & & & \\ & I_w & & & & \\ & & I_w & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & I_w & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La période maximale est $2^{rw} - 1$, atteinte ssi $Q(z^r + z^m)$ est primitif de degré rw, oô Q est le polynôme caractéristique de A (i.e. $\det(XI - A)$). L'exemple le plus connu est le générateur `TT800`, qui atteint une période de $2^{800} - 1$.

Récurrence multiple matricielle

(Niederreiter 1995)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_n &= A_1 \boldsymbol{v}_{n-1} + A_2 \boldsymbol{v}_{n-2} + \cdots + A_r \boldsymbol{v}_{n-r}, \\
\boldsymbol{y}_n &= \boldsymbol{v}_n, \\
X &= \begin{pmatrix}
A_1 & A_2 & \cdots & A_{r-1} & A_r \\
I_w & & & & \\
 & I_w & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & I_w &
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La période maximale est $2^{rw} - 1$.

Mersenne Twister

La période peut être considérablement améliorée en considérant une récurrence de la forme

$$\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_{n+m-r} + A(\boldsymbol{v}^u_{n-r} | \boldsymbol{v}^l_{n-r+1}) \mod 2,$$
$$\boldsymbol{y}_n = T\boldsymbol{v}_n.$$

L'exposant u signifie que nous prenons les $(w - p)$ bits de poids forts, et l, les p bits de poids faible. Cette relation est connue sous le nom Mersenne Twister, comme introduit par Matsumoto et Nishimura (1998).

La récurrence peut être réécrite

$$\boldsymbol{v}_n = \left(\boldsymbol{v}_{n+m-r} + A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} v_{n-r+1} \begin{pmatrix} I_{w-p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_{n-r} \right) \mod 2,$$

Mersenne Twister

Nous pouvons exprimer X comme la matrice $(nw-p)\times(nw-p)$

$$\begin{pmatrix} & & & & I_w & & 0 \\ A\,\mathrm{rot}_p(I) & & & & & & \\ I_w & & & & & & \\ & I_w & & & & & \\ & & I_w & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & I_w & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 & I_{w-p} & 0 \end{pmatrix}.$$

en considérant dans le vecteur d'état les r vecteurs $v_n,\ldots,v_{n-r+2}$ ainsi que, de manière répétée, les p bits de poids fort de v_{n-r+1}.

Mersenne Twister

$\text{rot}_p(I)$ est défini comme

$$\begin{pmatrix} 0 & I_{w-p} \\ I_p & 0 \end{pmatrix}.$$

La période maximale est $2^{rw-p} - 1$. Un exemple populaire est le générateur `MT19937`, dont la période de $2^{19937} - 1$.

Générateurs combinés sur $\mathcal{F}_2$

J générateurs $\mathcal{F}_2$-linéaires de paramétres $(k_j, w, \boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_j)$ et états $\boldsymbol{x}_{j,i}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_n &= \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{x}_{1,n} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{B}_J \boldsymbol{x}_{J,n}, \\ u_n &= \sum_{\ell=1}^{w} y_{n,\ell-1} 2^{-\ell}, \end{aligned}$$

Equivalent à un générateur $\mathcal{F}_2$-linéaire ayant $k = k_1 + \cdots + k_J$, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_J)$, et $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_J)$.

Générateurs combinés sur $\mathcal{F}_2$

Si on combine des LFSRs ayant des polynômes caractéristiques $P_j(z)$, le générateur combiné a comme polynôme caractéristique $P(z) = P_1(z) \cdots P_J(z)$ et sa période peut atteindre le produit des périodes.

En combinant des LFSR, TGFSR, ou Mersenne twister entre eux, on obtient des générateurs ayant de bien meilleures équidistributions.

LFSR113

```
unsigned long z1, z2, z3, z4;

double lfsr113 ()
   {  /* Generates numbers between 0 and 1. */
   unsigned long b;
   b  = (((z1 <<  6) ^ z1) >> 13);
   z1 = (((z1 & 4294967294) << 18) ^ b);
   b  = (((z2 <<  2) ^ z2) >> 27);
   z2 = (((z2 & 4294967288) <<  2) ^ b);
   b  = (((z3 << 13) ^ z3) >> 21);
   z3 = (((z3 & 4294967280) <<  7) ^ b);
   b  = (((z4 <<  3) ^ z4) >> 12);
   z4 = (((z4 & 4294967168) << 13) ^ b);
   return ((z1^z2^z3^z4)*2.3283064365387e-10);
   }
```

LFSR113

Les opérations utilisées sont

- &: opérateur et.
- ^: ou exlusif.
- $<<$: decale à gauche; revient à multiplier par une puissance de 2.
- $>>$: decale à droite; revient à diviser par une puissance de 2.