

On va construire deux graphes et prouver qu'il sont presque sûrement isomorphes. Rappelons que ω est l'ordinal qui énumère \mathbb{N} et si on écrit $i < \omega$ c'est la même chose que $i \in \mathbb{N}$. On a aussi $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

1 Graphe aléatoire

Ce graphe, noté R , a comme l'ensemble de sommets \mathbb{N} . Chaque arête ij apparaît avec la probabilité 0.5.

2 Une condition (*)

On considère la condition suivante, que l'on va appeler (*), qu'un graphe $G = (V, E)$ pourrait vérifier :

$\forall X, Y \subset V$ finis tels que $X \cap Y = \emptyset$ il existe un sommet $u \in V \setminus \{X \cup Y\}$ adjacent à tous les sommets de X et à aucun sommet de Y .

En mots, quels que soient deux ensembles X, Y de sommets, finis et disjoints, il existe toujours un sommet adjacent à tous les sommets de X et à aucun sommet de Y .

Il n'est pas évident qu'un graphe qui vérifie (*) existe. Mais il devrait être clair qu'un tel graphe est infini. On va le construire.

3 Construction de G

On construit une suite de graphes $\{G_i = (V_i, E_i)\}_{i < \omega}$ tels que $G_i \leq G_{i+1}$, i.e. G_i est un sous-graphe de G_{i+1} . Pour le faire on utilise (*). Si X, Y sont deux ensemble disjoints de sommets, on dira le sommet u garanti par (*) est *bien adjacent* à (X, Y) .

Soit x_0 un sommet et $V_0 = \{x_0\}$, $E_0 = \emptyset$. Ayant construit G_i pour $i \in [n]$, on définit V_n et E_n pour obtenir G_n . Pour chaque $X \subseteq V_{n-1}$ on définit $\bar{X} = V_{n-1} \setminus X$ et on ajoute un sommet v_X^{n-1} ainsi que toutes les arêtes entre v_X^{n-1} et X . Plus précisément, soit v_X^{n-1} un nouveau sommet

bien adjacent à (X, \overline{X}) . On définit $V_n = V_{n-1} \cup \{v_X^{n-1} : X \subseteq V_{n-1}\}$, et $E_n = E_{n-1} \cup \bigcup_{X \subseteq V_{n-1}} \{v_X^{n-1}x : x \in X\}$. On définit $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$; évidemment $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ et $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ pour avoir $G = (V, E)$. Il est facile de voir que $v_X^{n-1} \neq v_{X'}^{n-1}$ si $X \neq X'$.

Pour voir que G vérifie (*), soit $X, Y \subset V$ finis tels que $X \cap Y = \emptyset$. Soit n le plus petit entier tel que $X, Y \subseteq V_n$. Par construction de V_{n+1} , il existe un sommet v_X^n bien adjacent à (X, \overline{X}) , donc adjacent à tous les sommets de X et aucun de \overline{X} , à fortiori à aucun sommet de $Y \subseteq \overline{X}$.

4 Unicité du graphe G

Théorème 1 *Soit $G = (V, E)$ et $H = (U, F)$ deux graphes dénombrables qui vérifient (*). Alors ils sont isomorphes.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $V = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $U = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. On va construire un isomorphisme ϕ entre G et H par un argument appelé *va-et-vient*. Il permet de s'assurer que l'on construit une bijection.

On construit des ensembles $S_n \subset V$ et $T_n \subset U$ et des isomorphismes ϕ_n entre $G[S_n]$ et $H[T_n]$. On commence par l'évident : soit $S_0 = \{x_0\}$ et $T_0 = \{y_0\}$, avec $\phi_0(x_0) = y_0$. Supposons que l'on ait déjà S_n et T_n ainsi que l'isomorphisme $\phi_n : S_n \rightarrow T_n$ entre $G[S_n]$ et $H[T_n]$. On doit procéder différemment suivant la parité de n .

- Si n est impair, on construit d'abord T_{n+1} . Soit $m = \min\{i : y_i \notin T_n\}$. Soit X_H^n l'ensemble des sommets de T_n adjacent à y_m et $Y_H^n = T_n \setminus X_H^n$ (donc y_m est bien adjacent à (X_H^n, Y_H^n)). Puisque ϕ_n est un isomorphisme entre $G[S_n]$ et $H[T_n]$, on peut définir X_G^n et Y_G^n par $X_G^n = \phi_n^{-1}(X_H^n)$ et $Y_G^n = \phi_n^{-1}(Y_H^n) = S_n \setminus \phi_n^{-1}(X_H^n)$. Ensuite on utilise (*) pour trouver le sommet dans G dont l'image est y_m . En effet, (*) garanti l'existence d'un sommet $x_j \in V \setminus S_n$ bien adjacent à (X_G^n, Y_G^n) . On définit alors $S_{n+1} = S_n \cup \{x_j\}$, $T_{n+1} = T_n \cup \{y_m\}$ et $\phi_{n+1}(u) = \phi_n(u)$ pour $u \in T_n$ et $\phi_{n+1}(x_j) = y_m$. Par construction, ϕ_{n+1} est un isomorphisme entre $G[S_{n+1}]$ et $H[T_{n+1}]$.
- Si n est pair, on commence par S_{n+1} . Soit $m = \min\{i : x_i \notin S_n\}$. Soit X_G^n be the subset of S_n of vertices adjacent to x_m . Soit $X_H^n = \phi_n(X_G^n)$

et $Y_H^n = T_n \setminus X_H^n = \phi_n(T_n \setminus X_G^n)$. Par (*), il y a un sommet $y_j \in U \setminus T_n$ bien adjacent à (X_H^n, Y_H) . On peut donc définir $S_{n+1} = S_n \cup \{x_m\}$, $T_{n+1} = T_n \cup \{y_j\}$ et $\phi_{n+1}(u) = \phi_n(u)$ pour $u \in S_n$ et $\phi_{n+1}(x_m) = y_j$. Par construction, ϕ_{n+1} est un isomorphisme entre $G[S_{n+1}]$ et $H[T_{n+1}]$. \square

Nous venons de prouver que le graphe dénombrable qui vérifie (*) est unique à l'isomorphie près.

5 Isomorphisme entre G et R

Les graphes G et R sont presque sûrement isomorphes, i.e. la probabilité qu'ils le soient tend vers 1. On va prouver que la probabilité que R vérifie (*) tend vers 1.

Soit $X, Y \subset \mathbb{N}$ finis tels que $X \cap Y = \emptyset$. Soit $|X| + |Y| = k$. Soit $i \in \mathbb{N} \setminus (X \cup Y)$. La probabilité que i soit bien adjacent à (X, Y) est $\frac{1}{2^k}$ parce que chaque arête entre i et $X \cup Y$ est présente avec probabilité $\frac{1}{2}$ et donc la probabilité que i ne soit *pas* bien adjacent à (X, Y) est $1 - \frac{1}{2^k}$. Si $Z \subset \mathbb{N}$ avec $|Z| = n$ et $Z \cap (X \cup Y) = \emptyset$, la probabilité qu'aucun des n sommets de Z soit bien adjacent à (X, Y) est $(1 - \frac{1}{2^k})^n$. Puisque $1 - \frac{1}{2^k} < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} = 0$. Ce qui nous dit que la probabilité qu'aucun sommet de $\mathbb{N} \setminus (X \cup Y)$ n'est bien adjacent à (X, Y) est zéro. Il y en a donc un qui *est* bien adjacent et (*) est vérifiée. La section précédente complète la preuve. \square