

Définition 1 Soit X un ensemble.

- Une relation binaire R sur X est une partie de $X \times X$. On écrit souvent xRy (parfois $x \sim_R y$) pour $(x, y) \in R$.
- Une relation binaire R sur X est une relation d'équivalence si elle est
 - réflexive : xRx pour tout $x \in X$;
 - symétrique : si xRy alors yRx ;
 - transitive : si xRy et yRz alors xRz .
- Soient $x \in X$ et R une relation d'équivalence sur X . La classe d'équivalence de x , noté $[x]_R$ est l'ensemble $\{y \in X : xRy\}$.
- Une partition de X est une famille $\Pi = \{X_i\}_{i \in I}$ de parties de X , I un ensemble d'indices, telle que $\cup_{i \in I} X_i = X$ et $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour $i, j \in I$, $i \neq j$.

Exercice 1 Soit X un ensemble et soit R une relation d'équivalence sur X . Prouvez que $[x]_R = [y]_R$ si et seulement si xRy .

Exercice 2 Soit X un ensemble et soit Π une partition de X . Prouvez que pour tout $X, Y \in \Pi$ soit $X = Y$ soit $X \cap Y = \emptyset$.

Lemme 1 Soit X un ensemble.

1. Soit R une relation d'équivalence sur X . Alors les classes d'équivalence de R forment une partition de X .
2. Soit $\{X_i\}_{i \in I}$ une partition de X . Alors R , définie par xRy si et seulement si il existe un $i \in I$ tel que $x, y \in X_i$, est une relation d'équivalence et ses classes d'équivalence sont exactement les ensembles X_i , $i \in I$.

Démonstration.

1. On prend $I = X$. Il est clair que $X = \cup_{x \in X} \{x\} = \cup_{x \in X} [x]_R$ car $x \in [x]_R$ pour tout $x \in X$. Par l'exercice ??, $[x]_R = [y]_R$ si et seulement si xRy . Si $[x]_R \neq [y]_R$ alors $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$, car sinon, il y aurait un $z \in [x]_R \cap [y]_R$ et, par transitivité et symétrie, on aurait que xRy , donc $[x]_R = [y]_R$. Donc les classes d'équivalence de R partitionnent X .
2. D'abord, pour tout $x \in X$, x appartient un des ensembles X_i , $i \in I$. On a alors xRx (réflexivité). Si x et y appartiennent à X_i , alors xRy et yRx , par définition (symétrie). Si x et y appartiennent à X_i (xRy) et y et z appartiennent à X_j (yRz), alors $i = j$ et x et z sont dans X_i , donc xRz . Pour les classes d'équivalences, on a que $[x]_R = \{y \in X : xRy\} = \{y \in X : y \in X_i \text{ tel que } x \in X_i\} = X_i$.

□