

Théorèmes de Ramsey
version 1.0
13 mars 2025

On (re) prouve le théorème d'Erdős et Szekeres dans un langage différent de celui de Bondy et Murty, avec plus de détails.

Si les arêtes du graphe complet $K_n = (V, E)$ sont coloriées en deux couleurs par $c : E \rightarrow \{0, 1\}$, on obtient une partition de E en $E_0 \sqcup E_1$, $E_i = \{e \in E : c(e) = i\}$, $i = 0, 1$. On dit alors que le graphe est 2-colorié. Pour $i = 0, 1$ on dira qu'un sous-graphe H est i -chromatique si toutes ses arêtes sont coloriées par la couleur i , i.e. $E(H) \subseteq E_i$. Avec ceci on peut définir le nombre de Ramsey.

Définition 1 *Le nombre de Ramsey $r(k, \ell)$ est le plus petit n tel que si K_n est 2-colorié, alors il contient soit K_k 0-chromatique, soit K_ℓ 1-chromatique.*

On peut faire ceci, pour l'exercice, plus précis.

Définition 2 *Le nombre de Ramsey $r(k, \ell)$ est le plus petit n tel que quelle que soit la 2-coloration $c : E(K_n) \rightarrow \{0, 1\}$, il existe soit $K \subseteq V(K_n)$ avec $|K| = k$ et $G[K]$ 0-chromatique, soit $S \subseteq V$ avec $|S| = \ell$ et $G[S]$ 1-chromatique.*

Théorème 1

$$r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1).$$

Si $r(k-1, \ell)$ et $r(k, \ell-1)$ sont tous les deux pairs, alors

$$r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1.$$

Démonstration. Soit $n = r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1)$ et soit $G = (V, E)$ le graphe complet K_n 2-colorié par $c : E \rightarrow \{0, 1\}$. Soit $E_i = \{e \in E : c(e) = i\}$, $i = 0, 1$. Soit $v \in V$ et, pour $i = 0, 1$, soit $N_i = \{u \in V : vu \in E_i\}$. Si $|N_0| < r(k-1, \ell)$ et $|N_1| < r(k, \ell)$

$$n-1 = |N(v)| = |N_0| + |N_1| \leq r(k-1, \ell) - 1 + r(k, \ell-1) - 1 \leq n-2$$

et donc on a deux possibilités.

1. $|N_0| \geq r(k-1, \ell)$,
 et alors soit il y a $S \subseteq N_0$ avec $|S| = \ell$ et $G[S]$ 1-chromatique, soit il y a $K \subseteq N_0$ avec $|K| = k-1$ et $G[K \cup \{v\}]$ 0-chromatique;
2. $|N_1| \geq r(k, \ell)$
 et alors soit il y a $S \subseteq N_1$ avec $|S| = \ell-1$ et $G[S \cup \{v\}]$ 1-chromatique, soit il y a $K \subseteq N_1$ avec $|K| = k$ et $G[K]$ 0-chromatique.

Si $r(k-1, \ell)$ et $r(k, \ell-1)$ sont tous les deux pairs, alors $n = r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1$ est impair. Si G est 2-colorié, les sous-graphes $G[E_0]$ et $G[E_1]$ induits par E_0, E_1 , respectivement, ont comme ensemble de sommets V_0 et V_1 , respectivement (notons que $V_0 \cap V_1$ peut être non-vide). Puisque $V = V_0 \cup V_1$, on a

$$|V| = |V_0 \cup V_1| = |V_0| + |V_1| - |V_0 \cap V_1|$$

et on observe que si V_0 et V_1 ont la même parité, $|V_0 \cap V_1|$ est impaire car V l'est. Il en découle que soit $|V_0|$ soit $|V_1|$ est impaire. Sans perte de généralité, soit $|V_0|$ impaire. Puisque le nombre de sommets de degré impair est pair, il existe $v \in V_0$ de degré pair dans $G[V_0]$. On peut maintenant répéter l'argument de la première partie - on définit, pour $i = 0, 1$, $N_i = \{u \in V : vu \in E_i\}$ et on se souvient que $|N(v)| = |N_0| + |N_1| = r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 2$, un nombre pair. Puisque $|N_0|$ est impaire, $|N_1|$ l'est aussi. Mais si $|N_0| \leq r(k-1, \ell) - 1$ et $|N_1| \leq r(k, \ell-1) - 1$, on obtient une contradiction comme avant et donc soit $|N_0| \geq r(k-1, \ell) + 1$ ou $|N_1| \geq r(k, \ell-1) + 1$. Les deux cas son analogues aux cas de la première partie.