

Lemme 1 *Soit G un graphe fini acyclique. Alors $\delta(G) \leq 1$, et si G est connexe, alors $\delta(G) = 1$.*

Preuve : Ceci découle du théorème déjà prouvé qui dit que tout graphe avec $\delta(G) \geq 2$ contient un cycle. \square

Lemme 2 *Un arbre avec n sommets a $n - 1$ arêtes.*

Preuve : Si $n = 1$, l'arbre est sans arêtes et l'énoncé est vérifié. Pour $n > 0$, soit u un sommet de degré 1 dans l'arbre T ; il y en a un car si $\delta(T) \geq 2$, T contiendrait un cycle. Le graphe $T - u$ est un arbre avec $n - 1$ sommets, donc il a $n - 2$ arêtes par l'hypothèse de récurrence. L'arbre T a alors $n - 1$ arêtes. \square

Théorème 1 *Tout graphe connexe fini contient un arbre couvrant*

Preuve : Soit G un graphe connexe fini et soit H un sous-graphe couvrant connexe de G avec le nombre minimum d'arêtes. Ce graphe est un arbre, car s'il avait un cycle C , alors quelle que soit l'arête e de C , le graphe $H - e$ resterait un graphe couvrant connexe de G , contredisant la minimalité du nombre d'arêtes. \square

Corollaire 1 *Un graphe connexe avec n sommets a au moins $n - 1$ arêtes.*

Théorème 2 *Soit $T = (V, E)$ un graphe (simple, non-orienté) avec $|V| = n$ et $|E| = m$. Les énoncés suivants sont équivqlents (l.é.s.s.é.) :*

1. T est un arbre, i.e. un graphe connexe et acyclique;
2. Quels que soient $u \neq v \in V$, il existe une chaîne unique entre u et v ;
3. T est connexe mais $T - e$ ne l'est pas quelle que soit l'arête $e \in E$;
4. T est acyclique et $m = n - 1$;
5. T est connexe et $m = n - 1$;
6. T est acyclique mais $T + uv$ contient un cycle unique pour tout $uv \notin E$.

Preuve : On va prouver $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$. On peut supposer que $n \geq 3$ car pour les graphes avec un ou deux sommets tous les énoncés sont vrais, souvent trivialement.

$1 \Rightarrow 2$: Soit $u \neq v \in V$. Puisque T est connexe, il existe une chaîne entre u et v . S'il y en avait deux, les deux chaînes ensemble formeraient un parcours fermé qui contient un cycle, comme nous avons prouvé. Refaisons-le. Soient $u_0u_1 \dots u_k$ et $u_ku_{k+1}u_{k+2} \dots u_{k+\ell}$ avec $u = u_0$, $v = u_k$ deux chaînes différentes entre u et v , soit i le plus petit indice tel qu'il existe $j < i$ avec $u_i = u_j$. Alors $u_j \dots u_{i-1}$ est un cycle élémentaire dans T , contredisant l'acyclicité de T .

$2 \Rightarrow 3$: Puisque pour tout $u, v \in V$ il y a une chaîne entre eux, T est connexe. Soit $uv \in E$. Si $T - uv$ était connexe, la chaîne P entre u et v dans $T - uv$ en serait une dans T , contredisant l'unicité de uv .

$3 \Rightarrow 4$: Prouvons par récurrence sur n que tout graphe T qui vérifie 3 est acyclique et a $m = n - 1$. Ceci est vrai par inspection pour $n = 3$. On a que T est connexe. Supposons que C est un cycle dans T et soit $uv \in E(C)$. Alors $T - uv$ reste connexe, contredisant la supposition que $T - uv$ ne l'est pas. Donc T est acyclique. Par le lemme 1, T contient un sommet w de degré 1. Le graph $T - w$ vérifie toujours 3, il a donc $m - 1 = (n - 1) - 1$ arêtes. Il en découle que dans T , $m = n - 1$.

$4 \Rightarrow 5$: Soit T acyclique avec $m = n - 1$. Soient $T_i, i \in [k] = \{0, 1, \dots, k-1\}$, les composantes connexes de T , avec n_i sommets et m_i arêtes, respectivement. On vient de prouver qu'un graphe connexe et acyclique avec n sommets a $n - 1$ arêtes. Donc $m_i = n_i - 1$ pour $i \in [k]$. Ce qui veut dire que

$$n - 1 = m = \sum_{i=0}^{k-1} m_i = \sum_{i=0}^{k-1} n_i - 1 = n - k$$

et donc $k = 1$, i.e. T est connexe.

$5 \Rightarrow 6$: On a prouvé que si T est connexe, il contient un arbre couvrant qui, lui, a $n - 1$ arêtes. Il en découle que T est un arbre et est donc acyclique. Si $uv \notin E$, l'arête uv avec la chaîne entre u et v (qui doit exister car le graphe est connexe) formerait un cycle, contredisant l'acyclicité de T .

$6 \Rightarrow 1$: Il suffit de prouver que T est connexe et pour le voir il suffit de montrer qu'entre deux sommets non-adjacents il existe une chaîne. Soit u, v deux sommets non-adjacents dans T . Puisque $T + uv$ contient un cycle unique C et T est acyclique, il existe une chaîne $C - uv$ dans T entre u et v . \square