

# IFT-3655, Modèles Stochastiques

## Chaînes de Markov en temps continu (CMTC)

**Prof. Pierre L'Ecuyer**

DIRO, Université de Montréal

Ces “diapos” sont surtout un support pour les présentations en classe.

Elles ne contiennent pas toutes les explications détaillées.

Pour cela il est recommandé d'étudier le livre recommandé, de Sheldon Ross.

## Chaîne de Markov en temps continu (CMTC)

En gros, une CMTC est un peu comme une CM en temps discret, mais avec des durées entre les transitions qui suivent une loi exponentielle, un peu comme pour un processus de Poisson, mais avec un taux de saut (taux de transition) qui dépend en général de l'état courant.

## Chaîne de Markov en temps continu (CMTC)

En gros, une CMTC est un peu comme une CM en temps discret, mais avec des durées entre les transitions qui suivent une loi exponentielle, un peu comme pour un processus de Poisson, mais avec un taux de saut (taux de transition) qui dépend en général de l'état courant.

On considère un processus stochastique en temps continu  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  dont l'espace d'états  $\mathcal{X}$  est dénombrable. On va numéroter les états par des entiers non négatifs, pour avoir par exemple  $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, r\}$  (fini) ou  $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$  (infini).

Le processus  $X$  est Markovien si pour tout  $s, t \geq 0$  et  $i, j \in \mathcal{X}$ ,

$$\mathbb{P}[X(s+t) = j \mid X(s) = i, \text{ et } X(u) = x(u) \text{ pour } 0 \leq u < s] = \mathbb{P}[X(s+t) = j \mid X(s) = i].$$

Autrement dit, la loi de probabilité du futur conditionnellement à l'état présent  $X(s) = i$  ne dépend pas du passé (avant le temps  $s$ ).

Il est stationnaire si cette probabilité conditionnelle ne dépend pas de  $s$ .

Une chaîne de Markov en temps continu (CMTC) est un processus ayant ces 2 propriétés.

Supposons que le processus démarre dans l'état  $i$  et soit  $T_1$  le premier instant de saut (le premier instant où il change d'état). Puisque le processus est Markovien et stationnaire, pour tous  $s, t \geq 0$  on a

$$\mathbb{P}[T_1 > s + t \mid T_1 > s] = \mathbb{P}[T_1 > t] \quad (\text{indépendant de } s).$$

Supposons que le processus démarre dans l'état  $i$  et soit  $T_1$  le premier instant de saut (le premier instant où il change d'état). Puisque le processus est Markovien et stationnaire, pour tous  $s, t \geq 0$  on a

$$\mathbb{P}[T_1 > s + t \mid T_1 > s] = \mathbb{P}[T_1 > t] \quad (\text{indépendant de } s).$$

Ainsi, la loi de  $T_1$  est sans mémoire, ce qui implique que ce doit être la loi exponentielle, avec un taux  $v_i$  qui ne peut dépendre que de  $i$ , et on a donc  $\mathbb{P}[T_1 > x] = e^{-v_i x}$  pour tout  $x \geq 0$ . Autrement dit, à chaque visite dans l'état  $i$ , la durée de séjour dans cet état est  $\text{Expon}(v_i)$ , et cela est vrai pour tout état  $i$ .

Supposons que le processus démarre dans l'état  $i$  et soit  $T_1$  le premier instant de saut (le premier instant où il change d'état). Puisque le processus est Markovien et stationnaire, pour tous  $s, t \geq 0$  on a

$$\mathbb{P}[T_1 > s + t \mid T_1 > s] = \mathbb{P}[T_1 > t] \quad (\text{indépendant de } s).$$

Ainsi, la loi de  $T_1$  est sans mémoire, ce qui implique que ce doit être la loi exponentielle, avec un taux  $v_i$  qui ne peut dépendre que de  $i$ , et on a donc  $\mathbb{P}[T_1 > x] = e^{-v_i x}$  pour tout  $x \geq 0$ . Autrement dit, à chaque visite dans l'état  $i$ , la durée de séjour dans cet état est  $\text{Expon}(v_i)$ , et cela est vrai pour tout état  $i$ .

Lorsque la chaîne quitte l'état  $i$  elle va à l'état  $j$  avec une certaine probabilité  $P_{i,j}$ , et ces probabilités ne peuvent dépendre que de  $i$  et  $j$ , puisque le processus est Markovien. On a aussi  $P_{i,i} = 0$  (sauter sur place ne compte pas) et  $\sum_{j \in \mathcal{X}} P_{i,j} = 1$  pour tout  $i$ .

Supposons que le processus démarre dans l'état  $i$  et soit  $T_1$  le premier instant de saut (le premier instant où il change d'état). Puisque le processus est Markovien et stationnaire, pour tous  $s, t \geq 0$  on a

$$\mathbb{P}[T_1 > s + t \mid T_1 > s] = \mathbb{P}[T_1 > t] \quad (\text{indépendant de } s).$$

Ainsi, la loi de  $T_1$  est sans mémoire, ce qui implique que ce doit être la loi exponentielle, avec un taux  $v_i$  qui ne peut dépendre que de  $i$ , et on a donc  $\mathbb{P}[T_1 > x] = e^{-v_i x}$  pour tout  $x \geq 0$ . Autrement dit, à chaque visite dans l'état  $i$ , la durée de séjour dans cet état est  $\text{Expon}(v_i)$ , et cela est vrai pour tout état  $i$ .

Lorsque la chaîne quitte l'état  $i$  elle va à l'état  $j$  avec une certaine probabilité  $P_{i,j}$ , et ces probabilités ne peuvent dépendre que de  $i$  et  $j$ , puisque le processus est Markovien. On a aussi  $P_{i,i} = 0$  (sauter sur place ne compte pas) et  $\sum_{j \in \mathcal{X}} P_{i,j} = 1$  pour tout  $i$ .

Ainsi, la CMTC contient une CMTD sous-jacente avec probabilités de transition  $P_{i,j}$ , et toute la théorie des CMTD s'applique à cette chaîne. Par contre, les durées de séjour pour la CMTC sont exponentielles et indépendantes. La durée de séjour dans un état est aussi indépendante du prochain état visité: Ci-haut,  $T_1$  et  $X(T_1)$  sont indépendants! Sinon, si le prochain état dépendait de la durée de séjour, ce qui contredirait la propriété Markovienne.

# Les probabilités de transition de la CMTC

Posons

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[X(s+t) = j \mid X(s) = i].$$

Ces probabilités sont moins simples à déterminer que pour les CMTD (résolution d'un système d'équations linéaires), car elles dépendent aussi de  $t$ .

Équations de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{X}} P_{i,k}(s)P_{k,j}(t).$$



# Les probabilités de transition de la CMTC

Posons

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[X(s+t) = j \mid X(s) = i].$$

Ces probabilités sont moins simples à déterminer que pour les CMTD (résolution d'un système d'équations linéaires), car elles dépendent aussi de  $t$ .

Équations de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{X}} P_{i,k}(s)P_{k,j}(t).$$

Quand on est dans l'état  $i$ , le **taux de transition** est  $v_i$  et la probabilité que la prochaine transition se fasse vers l'état  $j$  est  $P_{i,j}$ . Donc le **taux de transition vers  $j$**  est

$$q_{i,j} = v_i P_{i,j}.$$

# Les probabilités de transition de la CMTC

Posons

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[X(s+t) = j \mid X(s) = i].$$

Ces probabilités sont moins simples à déterminer que pour les CMTD (résolution d'un système d'équations linéaires), car elles dépendent aussi de  $t$ .

Équations de Chapman-Kolmogorov:

$$P_{i,j}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{X}} P_{i,k}(s)P_{k,j}(t).$$

Quand on est dans l'état  $i$ , le **taux de transition** est  $v_i$  et la probabilité que la prochaine transition se fasse vers l'état  $j$  est  $P_{i,j}$ . Donc le **taux de transition vers  $j$**  est

$$q_{i,j} = v_i P_{i,j}.$$

On a

$$\sum_j q_{i,j} = v_i \sum_j P_{i,j} = v_i \quad \text{et} \quad P_{i,j} = \frac{q_{i,j}}{v_i} = \frac{q_{i,j}}{\sum_j q_{i,j}}.$$

## Taux de transition

Comme dans la décomposition d'un processus de Poisson, on peut voir  $q_{i,j}$  comme un "taux d'arrivée" des événements de type  $j$  et  $v_i$  comme le taux d'arrivée global.

Pour  $h > 0$  très petit, si on est dans l'état  $i$ , la probabilité qu'il y ait une seule transition dans les  $h$  prochaines unités de temps et qu'elle soit vers  $j$  est  $q_{i,j}h + o(h)$ .

La probabilité d'une seule transition est donc  $v_i h + o(h)$ .

## Taux de transition

Comme dans la décomposition d'un processus de Poisson, on peut voir  $q_{i,j}$  comme un "taux d'arrivée" des événements de type  $j$  et  $v_i$  comme le taux d'arrivée global.

Pour  $h > 0$  très petit, si on est dans l'état  $i$ , la probabilité qu'il y ait une seule transition dans les  $h$  prochaines unités de temps et qu'elle soit vers  $j$  est  $q_{i,j}h + o(h)$ .

La probabilité d'une seule transition est donc  $v_i h + o(h)$ .

La probabilité de deux transitions ou plus est  $o(h)$  et la probabilité d'aucune transition est  $1 - v_i h + o(h)$ .

## Taux de transition

Comme dans la décomposition d'un processus de Poisson, on peut voir  $q_{i,j}$  comme un "taux d'arrivée" des événements de type  $j$  et  $v_i$  comme le taux d'arrivée global.

Pour  $h > 0$  très petit, si on est dans l'état  $i$ , la probabilité qu'il y ait une seule transition dans les  $h$  prochaines unités de temps et qu'elle soit vers  $j$  est  $q_{i,j}h + o(h)$ .

La probabilité d'une seule transition est donc  $v_i h + o(h)$ .

La probabilité de deux transitions ou plus est  $o(h)$  et la probabilité d'aucune transition est  $1 - v_i h + o(h)$ .

On a ainsi  $P_{i,j}(h) = q_{i,j}h + o(h)$  et  $P_{i,i}(h) = 1 - v_i h + o(h)$ . On en déduit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,j}(h)}{h} = q_{i,j} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_{i,i}(h)}{h} = v_i.$$

## Taux de transition

Comme dans la décomposition d'un processus de Poisson, on peut voir  $q_{i,j}$  comme un "taux d'arrivée" des événements de type  $j$  et  $v_i$  comme le taux d'arrivée global.

Pour  $h > 0$  très petit, si on est dans l'état  $i$ , la probabilité qu'il y ait une seule transition dans les  $h$  prochaines unités de temps et qu'elle soit vers  $j$  est  $q_{i,j}h + o(h)$ .

La probabilité d'une seule transition est donc  $v_i h + o(h)$ .

La probabilité de deux transitions ou plus est  $o(h)$  et la probabilité d'aucune transition est  $1 - v_i h + o(h)$ .

On a ainsi  $P_{i,j}(h) = q_{i,j}h + o(h)$  et  $P_{i,i}(h) = 1 - v_i h + o(h)$ . On en déduit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,j}(h)}{h} = q_{i,j} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_{i,i}(h)}{h} = v_i.$$

Avec ceci, on va montrer que les  $P_{i,j}(t)$  satisfont deux systèmes d'équations différentielles. Ce sont les **équations de Kolmogorov** pour les processus de sauts.

Il existe une autre version de ces systèmes pour des **processus de diffusion**, pour lesquels l'état varie continûment selon des équations différentielles stochastiques.

# Équations de Kolmogorov vers l'arrière (“backward”)

**Théorème.** Pour tous  $i, j$  et  $t \geq 0$ ,

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t).$$

# Équations de Kolmogorov vers l'arrière ("backward")

**Théorème.** Pour tous  $i, j$  et  $t \geq 0$ ,

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t).$$

**Preuve.** On a

$$P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathcal{X}} P_{i,k}(h) P_{k,j}(t) - P_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathcal{X}, k \neq i} P_{i,k}(h) P_{k,j}(t) - [1 - P_{i,i}(h)] P_{i,j}(t).$$

Puis en prenant la limite (ici on peut toujours échanger la limite et la somme),

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sum_{k \neq i} \frac{P_{i,k}(h)}{h} P_{k,j}(t) - \frac{(1 - P_{i,i}(h))}{h} P_{i,j}(t) \right] \\ &= \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t). \quad [\text{On différencie la partie "arrière" du terme dans la somme.}] \end{aligned}$$



## Équations de Kolmogorov vers l'avant ("forward")

**Théorème.** Pour tous  $i, j$  et  $t \geq 0$ , sous certaines conditions de régularité,

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t)q_{k,j} - P_{i,j}(t)v_j.$$

## Équations de Kolmogorov vers l'avant ("forward")

**Théorème.** Pour tous  $i, j$  et  $t \geq 0$ , sous certaines conditions de régularité,

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t)q_{k,j} - P_{i,j}(t)v_j.$$

**Preuve.** On a

$$P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathcal{X}} P_{i,k}(t)P_{k,j}(h) - P_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathcal{X}, k \neq j} P_{i,k}(t)P_{k,j}(h) - [1 - P_{j,j}(h)]P_{i,j}(t).$$

En prenant la limite, et à condition de pouvoir échanger la limite et la somme,

$$\begin{aligned} P'_{i,j}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) \frac{P_{k,j}(h)}{h} - \frac{(1 - P_{j,j}(h))}{h} P_{i,j}(t) \right] \\ &= \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t)q_{k,j} - P_{i,j}(t)v_j. \quad \text{[On différencie la partie "avant" du terme dans la somme.]} \end{aligned}$$

## Probabilités limites

En supposant que la limite existe et ne dépend pas de  $i$ , la **probabilité limite de l'état  $j$**  est

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,j}(t).$$

Une **condition suffisante** pour cela est que tous les états communiquent et sont récurrents positifs. On peut alors trouver des équations pour les  $P_j$  via les équations de Kolmogorov. Avec l'équation vers l'avant:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P'_{i,j}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - P_{i,j}(t) v_j \right] = \sum_{k \neq j} P_k q_{k,j} - P_j v_j.$$

Cela donne les **équations d'équilibre** pour les  $P_j$ , qui sont aussi les **proba. stationnaires**.

$$\underbrace{P_j v_j}_{\text{taux de sortie de } j} = \underbrace{\sum_{k \neq j} P_k q_{k,j}}_{\text{taux d'entrée à } j} \quad \text{pour tout } j, \quad \text{et} \quad \sum_j P_j = 1.$$

## Générateur infinitésimal et formulation matricielle

La matrice  $\mathbf{A}$  dont les éléments  $(i, j)$  sont

$$a_{i,j} = \begin{cases} q_{i,j} & \text{si } j \neq i, \\ -v_i & \text{si } j = i, \end{cases}$$

s'appelle le **générateur infinitésimal** de la CMTC. On a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -v_0 & q_{0,1} & q_{0,2} & \cdots & q_{0,i} & \cdots \\ q_{1,0} & -v_1 & q_{1,2} & \cdots & q_{1,i} & \cdots \\ q_{2,0} & q_{2,1} & -v_2 & \cdots & q_{2,i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Les équations d'équilibre s'écrivent alors:  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{1} = 1$  où  $\mathbf{p} = (P_0, P_1, P_2, \dots)$ .

Si  $\mathbf{P}(t)$  est la matrice des  $P_{i,j}(t)$ , on a  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ , et on peut écrire

$$\mathbf{P}(h) = \mathbf{I} + \mathbf{A}h + o(h),$$

d'où

$$\mathbf{P}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{P}(0)}{h} = \mathbf{A}.$$

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent

$$\mathbf{P}(s + t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t).$$

On a ainsi

$$\frac{\mathbf{P}(t + h) - \mathbf{P}(t)}{h} = \mathbf{P}(t) \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h} = \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h} \mathbf{P}(t).$$

En prenant la limite quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient les équations de Kolmogorov vers l'avant et vers l'arrière (selon la position du générateur infinitésimal  $\mathbf{A}$ ):

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{P}(t).$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}.$$

En prenant la limite quand  $t \rightarrow \infty$ , on retrouve les **équations d'équilibre**:

$$\mathbf{0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t)\mathbf{A} = (\mathbf{1} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{A}.$$

où  $\mathbf{p}$  est le vecteur ligne des probabilités d'équilibre  $P_j$ ,  $\mathbf{1}$  est un vecteur colonne de 1's, et  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{p}$  est une matrice dont chaque ligne est  $\mathbf{p}$  (notation de Ross).

Cela donne  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . On y ajoute  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{1} = 1$  (la somme des probabilités vaut 1).

## Calcul de $P(t)$ pour $t$ fini

Dans certains cas simples on peut trouver une formule explicite pour  $P(t)$  en résolvant l'équation différentielle (voir prochain exemple), mais ces cas sont des exceptions.

## Calcul de $P(t)$ pour $t$ fini

Dans certains cas simples on peut trouver une formule explicite pour  $P(t)$  en résolvant l'équation différentielle (voir prochain exemple), mais ces cas sont des exceptions.

Solution générale de l'équation différentielle matricielle  $P'(t) = P(t)A$ :

$$\frac{d \log P(t)}{dt} = \frac{P'(t)}{P(t)} = A \Rightarrow \log P(t) = At \Rightarrow P(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

mais la convergence de cette série est lente. Très inefficace pour calculer  $P(t)$  en général.



## Calcul de $P(t)$ pour $t$ fini

Dans certains cas simples on peut trouver une formule explicite pour  $P(t)$  en résolvant l'équation différentielle (voir prochain exemple), mais ces cas sont des exceptions.

Solution générale de l'équation différentielle matricielle  $P'(t) = P(t)A$ :

$$\frac{d \log P(t)}{dt} = \frac{P'(t)}{P(t)} = A \Rightarrow \log P(t) = At \Rightarrow P(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

mais la convergence de cette série est lente. Très inefficace pour calculer  $P(t)$  en général.

Une meilleure approche est d'utiliser l'une des deux identités

$$e^{At} = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_+)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_-)^n, \quad \text{où } M_+ = I + At/n \text{ et } M_- = (I - At/n)^{-1}.$$

On pose  $n = 2^k$  pour un grand entier  $k$  (par exemple 30 ou 50) puis on approxime  $e^{At}$  par  $(M_+)^n$  ou  $(M_-)^n$ .

## Calcul de $P(t)$ pour $t$ fini

Dans certains cas simples on peut trouver une formule explicite pour  $P(t)$  en résolvant l'équation différentielle (voir prochain exemple), mais ces cas sont des exceptions.

Solution générale de l'équation différentielle matricielle  $P'(t) = P(t)A$ :

$$\frac{d \log P(t)}{dt} = \frac{P'(t)}{P(t)} = A \Rightarrow \log P(t) = At \Rightarrow P(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

mais la convergence de cette série est lente. Très inefficace pour calculer  $P(t)$  en général.

Une meilleure approche est d'utiliser l'une des deux identités

$$e^{At} = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_+)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (M_-)^n, \quad \text{où } M_+ = I + At/n \text{ et } M_- = (I - At/n)^{-1}.$$

On pose  $n = 2^k$  pour un grand entier  $k$  (par exemple 30 ou 50) puis on approxime  $e^{At}$  par  $(M_+)^n$  ou  $(M_-)^n$ . Pour calculer efficacement l'une de ces deux quantités, on utilise:

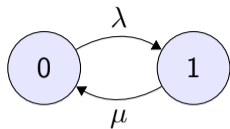
**Algorithme** approximer  $P(t) = e^{At}$ :

Initialiser ( $M \leftarrow M_+$ ) ou ( $M \leftarrow M_-$ );

Pour  $j = 1, \dots, k$  faire  $M \leftarrow M \times M$ ;

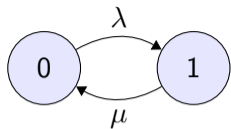
Retourner  $M$  comme approximation de  $P(t)$ .

## Mini-Exemple: Une CMTC à deux états



$$\mathbf{p} = (P_0, P_1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

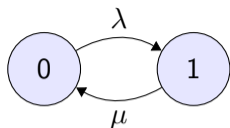
## Mini-Exemple: Une CMTC à deux états



$$\mathbf{p} = (P_0, P_1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Équations d'équilibre:  $\mathbf{p}\mathbf{A} = 0$  et  $\mathbf{p}\mathbf{1} = P_0 + P_1 = 1$ .

## Mini-Exemple: Une CMTC à deux états

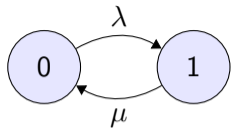


$$\mathbf{p} = (P_0, P_1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Équations d'équilibre:  $\mathbf{p}\mathbf{A} = 0$  et  $\mathbf{p}\mathbf{1} = P_0 + P_1 = 1$ .

Cela donne  $-P_0\lambda + P_1\mu = 0$  et  $P_0\lambda - P_1\mu = 0$ , donc  $P_1 = P_0\lambda/\mu$ ,

## Mini-Exemple: Une CMTC à deux états



$$\mathbf{p} = (P_0, P_1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

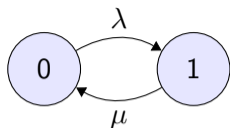
Équations d'équilibre:  $\mathbf{p}\mathbf{A} = 0$  et  $\mathbf{p}\mathbf{1} = P_0 + P_1 = 1$ .

Cela donne  $-P_0\lambda + P_1\mu = 0$  et  $P_0\lambda - P_1\mu = 0$ , donc  $P_1 = P_0\lambda/\mu$ ,

$\Rightarrow 1 - P_0 = P_1 = P_0\lambda/\mu \Rightarrow 1 = P_0(\lambda/\mu + 1) = P_0((\lambda + \mu)/\mu)$

$\Rightarrow P_0 = \mu/(\lambda + \mu)$  et  $P_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

## Mini-Exemple: Une CMTC à deux états



$$\mathbf{p} = (P_0, P_1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Équations d'équilibre:  $\mathbf{p}\mathbf{A} = 0$  et  $\mathbf{p}\mathbf{1} = P_0 + P_1 = 1$ .

Cela donne  $-P_0\lambda + P_1\mu = 0$  et  $P_0\lambda - P_1\mu = 0$ , donc  $P_1 = P_0\lambda/\mu$ ,

$$\Rightarrow 1 - P_0 = P_1 = P_0\lambda/\mu \Rightarrow 1 = P_0(\lambda/\mu + 1) = P_0((\lambda + \mu)/\mu)$$

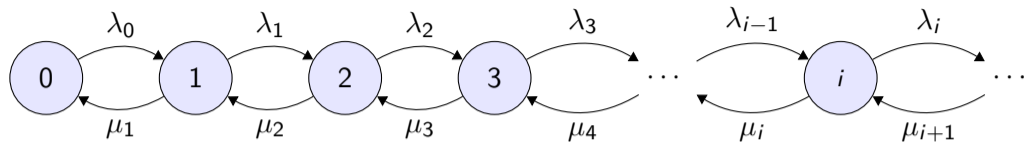
$$\Rightarrow P_0 = \mu/(\lambda + \mu) \text{ et } P_1 = \lambda/(\lambda + \mu).$$

On trouve aussi, en intégrant les équations différentielles de Kolmogorov (Ross, page 371):

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} P_0 + P_1 e^{-(\lambda+\mu)t} & P_1 - P_1 e^{-(\lambda+\mu)t} \\ P_0 - P_0 e^{-(\lambda+\mu)t} & P_1 + P_0 e^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}.$$

Les éléments convergent bien vers les probabilités d'équilibre quand  $t \rightarrow \infty$ .

## Processus de naissance et de mort



$X(t)$  représente la taille de la population (nombre d'individus) au temps  $t$ .

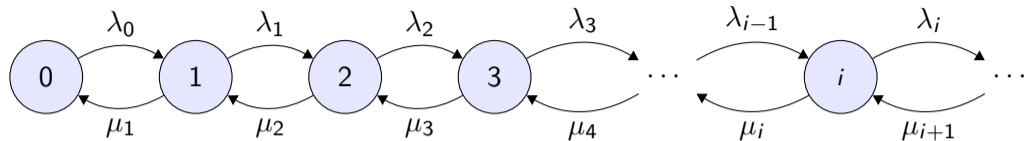
Dans l'état  $i$ , on a un taux de transition  $\lambda_i$  vers  $i + 1$  et  $\mu_i$  vers  $i - 1$ .

On appelle  $\lambda_i$  le **taux d'arrivée** (ou de naissance) et  $\mu_i$  le **taux de départ** (ou de mort).

On pose  $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$ .



## Processus de naissance et de mort



$X(t)$  représente la taille de la population (nombre d'individus) au temps  $t$ .

Dans l'état  $i$ , on a un taux de transition  $\lambda_i$  vers  $i + 1$  et  $\mu_i$  vers  $i - 1$ .

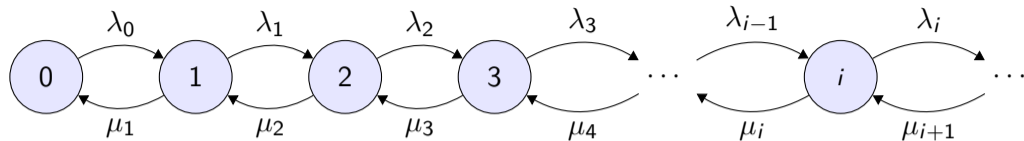
On appelle  $\lambda_i$  le **taux d'arrivée** (ou de naissance) et  $\mu_i$  le **taux de départ** (ou de mort).

On pose  $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$ .

La **durée de séjour dans l'état  $i$**  est exponentielle de taux  $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$  (moyenne  $1/\nu_i$ ).

C'est le minimum de deux exponentielles indépendantes.

## Processus de naissance et de mort



$X(t)$  représente la taille de la population (nombre d'individus) au temps  $t$ .

Dans l'état  $i$ , on a un taux de transition  $\lambda_i$  vers  $i + 1$  et  $\mu_i$  vers  $i - 1$ .

On appelle  $\lambda_i$  le **taux d'arrivée** (ou de naissance) et  $\mu_i$  le **taux de départ** (ou de mort).

On pose  $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$ .

La **durée de séjour dans l'état  $i$**  est exponentielle de taux  $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$  (moyenne  $1/\nu_i$ ).

C'est le minimum de deux exponentielles indépendantes.

Les probabilités de transition de la CMTD sous-jacente sont:

$P_{i,i+1} = \lambda_i/\nu_i$ , et  $P_{i,i-1} = \mu_i/\nu_i$ .

# Équations de Kolmogorov vers l'arrière et vers l'avant pour un processus de naissance et de mort

Rappel: Pour le cas général,  $P'(t) = P(t)A = AP(t)$ , c'est à dire

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \quad \text{et} \quad P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - P_{i,j}(t) v_j.$$

Dans ce cas-ci:

Équation arrière:  $P'_{i,j}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,j}(t).$

# Équations de Kolmogorov vers l'arrière et vers l'avant pour un processus de naissance et de mort

Rappel: Pour le cas général,  $P'(t) = P(t)A = AP(t)$ , c'est à dire

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \quad \text{et} \quad P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - P_{i,j}(t) v_j.$$

Dans ce cas-ci:

Équation arrière:  $P'_{i,j}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,j}(t).$

Équation avant:  $P'_{i,j}(t) = P_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} + P_{i,j+1}(t) \mu_{j+1} - P_{i,j}(t) (\lambda_j + \mu_j).$

# Équations de Kolmogorov vers l'arrière et vers l'avant pour un processus de naissance et de mort

Rappel: Pour le cas général,  $P'(t) = P(t)A = AP(t)$ , c'est à dire

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - v_i P_{i,j}(t) \quad \text{et} \quad P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - P_{i,j}(t) v_j.$$

Dans ce cas-ci:

Équation arrière:  $P'_{i,j}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,j}(t)$ .

Équation avant:  $P'_{i,j}(t) = P_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} + P_{i,j+1}(t) \mu_{j+1} - P_{i,j}(t) (\lambda_j + \mu_j)$ .

Équations d'équilibre: on prend la limite quand  $t \rightarrow \infty$ . Cela donne  $pA = 0$ , i.e.,

$$P_{j-1} \lambda_{j-1} + P_{j+1} \mu_{j+1} - P_j (\lambda_j + \mu_j) = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1, 2, \dots$$

On ajoute  $p\mathbf{1} = 1$  et la solution (si elle existe) donne les probabilités stationnaires  $P_j$ ,  $j \geq 0$ .

Les équations d'équilibre:

$$\begin{aligned}\lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) P_1 &= \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \\ (\lambda_2 + \mu_2) P_2 &= \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (\lambda_i + \mu_i) P_i &= \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre:

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) P_1 &= \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \\ (\lambda_2 + \mu_2) P_2 &= \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (\lambda_i + \mu_i) P_i &= \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En additionnant la première équation à la seconde, on obtient:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_1) P_1 + \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 + \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \\ \text{qui donne} \quad \lambda_1 P_1 &= \mu_2 P_2. \end{aligned}$$

Puis en additionnant cette dernière équation à la troisième du haut, on obtient:

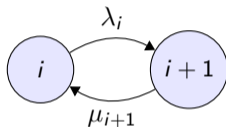
$$\begin{aligned} (\lambda_2 + \mu_2) P_2 + \lambda_1 P_1 &= \mu_2 P_2 + \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 \\ \text{qui donne} \quad \lambda_2 P_2 &= \mu_3 P_3. \end{aligned}$$

En répétant cette procédure, on obtient

$$\lambda_i P_i = \mu_{i+1} P_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_i P_i = \mu_{i+1} P_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

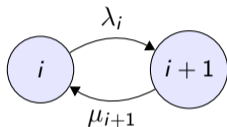
Interprétation: Ce sont les équations de conservation de flût pour chaque paire de noeuds successifs: Le taux de transition à long terme vers la droite doit équaler celui vers la gauche.





$$\lambda_i P_i = \mu_{i+1} P_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Interprétation: Ce sont les équations de conservation de flût pour chaque paire de noeuds successifs: Le taux de transition à long terme vers la droite doit égaliser celui vers la gauche.



Ces équations permettent d'exprimer facilement chaque  $P_i$  en fonction de  $P_0$ . On a

$$P_1 = P_0 \lambda_0 / \mu_1$$

$$P_2 = P_1 \lambda_1 / \mu_2 = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}$$

$$\vdots$$

$$P_i = P_{i-1} \lambda_{i-1} / \mu_i = P_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \stackrel{\text{def}}{=} P_0 Q_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \quad (Q_0 = 1).$$

Pour trouver  $P_0$ , on utilise l'équation  $\mathbf{p}\mathbf{1} = 1$ :

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right) = P_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \right)$$

qui donne

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i.$$

La solution **existe si et seulement si** cette dernière série converge.

Note: ressemble beaucoup à la CMTD, diapos 51–53 sur les chaînes de Markov.

## Temps espéré pour atteindre un état $j$

Dans un processus de naissance et de mort, soit  $\tau_i$  le temps requis pour atteindre l'état  $i + 1$  pour la première fois si on part de l'état  $i$ . On veut calculer  $\mathbb{E}[\tau_i]$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

## Temps espéré pour atteindre un état $j$

Dans un processus de naissance et de mort, soit  $\tau_i$  le temps requis pour atteindre l'état  $i + 1$  pour la première fois si on part de l'état  $i$ . On veut calculer  $\mathbb{E}[\tau_i]$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

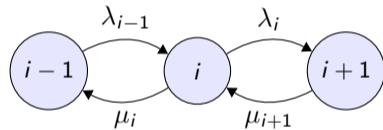
On sait que  $\tau_0 \sim \text{Expon}(\lambda_0)$ , et donc  $\mathbb{E}[\tau_0] = 1/\lambda_0$ .

Partant de l'état  $i$ , soit  $I_i = \mathbb{I}[\text{le prochain état est } i + 1]$ . On a  $\mathbb{P}[I_i = 0] = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$ ,

$$\mathbb{E}[\tau_i \mid I_i = 1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i},$$

$$\mathbb{E}[\tau_i \mid I_i = 0] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}[\tau_{i-1}] + \mathbb{E}[\tau_i], \quad \text{et donc}$$

$$\mathbb{E}[\tau_i] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (\mathbb{E}[\tau_{i-1}] + \mathbb{E}[\tau_i]) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \mathbb{E}[\tau_i] = 1 + \mu_i \mathbb{E}[\tau_{i-1}], \quad i \geq 1.$$



On peut ainsi calculer facilement les  $\mathbb{E}[\tau_i]$  par récurrence.

Et puis pour  $j > i$ , le temps espéré pour atteindre  $j$  en partant de  $i$  est  $\mathbb{E}[\tau_i] + \dots + \mathbb{E}[\tau_{j-1}]$ .

## Temps espéré pour atteindre un état $j$

Dans un processus de naissance et de mort, soit  $\tau_i$  le temps requis pour atteindre l'état  $i + 1$  pour la première fois si on part de l'état  $i$ . On veut calculer  $\mathbb{E}[\tau_i]$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

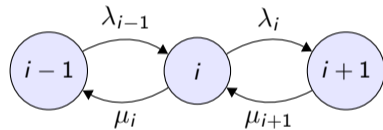
On sait que  $\tau_0 \sim \text{Expon}(\lambda_0)$ , et donc  $\mathbb{E}[\tau_0] = 1/\lambda_0$ .

Partant de l'état  $i$ , soit  $I_i = \mathbb{I}[\text{le prochain état est } i + 1]$ . On a  $\mathbb{P}[I_i = 0] = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$ ,

$$\mathbb{E}[\tau_i \mid I_i = 1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i},$$

$$\mathbb{E}[\tau_i \mid I_i = 0] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}[\tau_{i-1}] + \mathbb{E}[\tau_i], \quad \text{et donc}$$

$$\mathbb{E}[\tau_i] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (\mathbb{E}[\tau_{i-1}] + \mathbb{E}[\tau_i]) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \mathbb{E}[\tau_i] = 1 + \mu_i \mathbb{E}[\tau_{i-1}], \quad i \geq 1.$$



On peut ainsi calculer facilement les  $\mathbb{E}[\tau_i]$  par récurrence.

Et puis pour  $j > i$ , le **temps espéré pour atteindre  $j$  en partant de  $i$**  est  $\mathbb{E}[\tau_i] + \dots + \mathbb{E}[\tau_{j-1}]$ .

Ross (2014) montre aussi comment calculer  $\text{Var}[\tau_i]$ .

## Processus de naissance pur

Si  $\mu_i = 0$  pour tout  $i$ , on a un processus de naissance pur.

## Processus de naissance pur

Si  $\mu_i = 0$  pour tout  $i$ , on a un processus de naissance pur.

### Processus de Poisson stationnaire:

C'est un processus de naissance pur pour lequel  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ .

## Processus de naissance pur

Si  $\mu_i = 0$  pour tout  $i$ , on a un processus de naissance pur.

### Processus de Poisson stationnaire:

C'est un processus de naissance pur pour lequel  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ .

### Processus de Yule:

C'est un processus de naissance pur pour lequel  $\lambda_i = i\lambda$  pour tout  $i \geq 0$ .

Le taux de naissance est proportionnel au nombre d'individus dans le système (i.e., linéaire).

Interprétation: chaque individu se reproduit au taux  $\lambda$ , indépendamment des autres.

Si on part de  $X(0) = i > 0$ , cela donne lieu à une croissance exponentielle!



## Processus de naissance pur

Si  $\mu_i = 0$  pour tout  $i$ , on a un processus de naissance pur.

### Processus de Poisson stationnaire:

C'est un processus de naissance pur pour lequel  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ .

### Processus de Yule:

C'est un processus de naissance pur pour lequel  $\lambda_i = i\lambda$  pour tout  $i \geq 0$ .

Le taux de naissance est proportionnel au nombre d'individus dans le système (i.e., linéaire).

Interprétation: chaque individu se reproduit au taux  $\lambda$ , indépendamment des autres.

Si on part de  $X(0) = i > 0$ , cela donne lieu à une croissance exponentielle!

Pour ces processus, les équations d'équilibre n'ont pas de solution:

on a  $P_i = 0$  pour tout  $i$ , sauf si l'un des  $\lambda_j$  vaut 0, auquel cas  $P_j = 1$ .

## Calcul des probabilités $P_{i,j}(t)$ pour un processus de naissance pur

Soit  $A_k$  le temps passé dans l'état  $k$ , pour  $k \geq 0$ . Partant de  $i$ , pour  $j > i$ , on a

$$X(t) < j \quad \Leftrightarrow \quad T_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} A_i + \cdots + A_{j-1} > t \quad (\text{pas rendu à } j \text{ au temps } t),$$

et donc

$$\mathbb{P}[X(t) < j \mid X(0) = i] = \mathbb{P}[T_{i,j} > t].$$

## Calcul des probabilités $P_{i,j}(t)$ pour un processus de naissance pur

Soit  $A_k$  le temps passé dans l'état  $k$ , pour  $k \geq 0$ . Partant de  $i$ , pour  $j > i$ , on a

$$X(t) < j \Leftrightarrow T_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} A_i + \dots + A_{j-1} > t \quad (\text{pas rendu à } j \text{ au temps } t),$$

et donc

$$\mathbb{P}[X(t) < j \mid X(0) = i] = \mathbb{P}[T_{i,j} > t].$$

Ce  $T_{i,j}$  est une somme d'exponentielles indépendantes de paramètres  $\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$ .

C'est la loi **hypo-exponentielle** de paramètres  $(\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1})$ .

Pour cette loi, en supposant que  $\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$  sont tous distincts, on a

$$\mathbb{P}[T_{i,j} > t] = \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r=i, r \neq k}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}.$$

## Calcul des probabilités $P_{i,j}(t)$ pour un processus de naissance pur

Soit  $A_k$  le temps passé dans l'état  $k$ , pour  $k \geq 0$ . Partant de  $i$ , pour  $j > i$ , on a

$$X(t) < j \Leftrightarrow T_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} A_i + \dots + A_{j-1} > t \quad (\text{pas rendu à } j \text{ au temps } t),$$

et donc

$$\mathbb{P}[X(t) < j \mid X(0) = i] = \mathbb{P}[T_{i,j} > t].$$

Ce  $T_{i,j}$  est une somme d'exponentielles indépendantes de paramètres  $\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$ .

C'est la loi **hypo-exponentielle** de paramètres  $(\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1})$ .

Pour cette loi, en supposant que  $\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$  sont tous distincts, on a

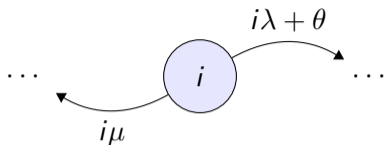
$$\mathbb{P}[T_{i,j} > t] = \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{r=i, r \neq k}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}.$$

On peut ensuite calculer

$$P_{i,j}(t) = \mathbb{P}[X(t) < j+1 \mid X(0) = i] - \mathbb{P}[X(t) < j \mid X(0) = i] = \mathbb{P}[T_{i,j+1} > t] - \mathbb{P}[T_{i,j} > t]$$

pour  $i < j$  et  $P_{i,i}(t) = \mathbb{P}[A_i > t] = e^{-\lambda_i t}$ . **Exercice:** Donne quoi pour un processus de Yule?

## Croissance linéaire avec mortalité et immigration

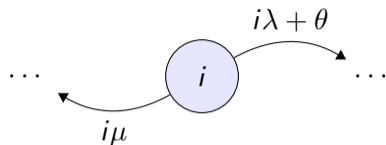


$$\lambda_i = i\lambda + \theta \text{ pour } i \geq 0;$$

$$\mu_i = i\mu \text{ pour } i \geq 1.$$

Chaque individu se reproduit au taux  $\lambda$  et a un taux de mortalité  $\mu$ .  
Il y a aussi un **taux d'immigration**  $\theta$ .

## Croissance linéaire avec mortalité et immigration



$$\lambda_i = i\lambda + \theta \text{ pour } i \geq 0;$$

$$\mu_i = i\mu \text{ pour } i \geq 1.$$

Chaque individu se reproduit au taux  $\lambda$  et a un taux de mortalité  $\mu$ .  
Il y a aussi un **taux d'immigration**  $\theta$ . On a ici

$$Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{\theta(\theta + \lambda) \cdots (\theta + (i-1)\lambda)}{\mu(2\mu) \cdots i\mu}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Q_{i+1}}{Q_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\theta + i\lambda}{(i+1)\mu} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

On a donc  $\sum_{i=0}^{\infty} Q_i < \infty$  et des probabilités stationnaires non nulles ssi  $\lambda/\mu < 1$  (série asymptotiquement géométrique), peu importe  $\theta$ .

Les  $P_i = P_0 Q_i$  sont proportionnels aux  $Q_i$ . Augmenter  $\theta$  augmente  $Q_i$  par un plus grand facteur pour les plus grands  $i$  (voir formule pour  $Q_i$ ) et donc augmente ces  $P_i$ .

## File d'attente $M/M/s$

Des clients arrivent à un système selon un **processus de Poisson** de taux  $\lambda$ .

Il y a  $s$  serveurs identiques et chacun peut servir un client à la fois, au taux de service  $\mu$ ; i.e., les **durées de service** sont indépendantes et **exponentielles** de moyenne  $1/\mu$ .

$X(t)$  représente le nombre de clients dans le système.

On a  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ ,  $\mu_i = i\mu$  pour  $1 \leq i \leq s$ ,  $\mu_i = s\mu$  pour  $i > s$ .

## File d'attente $M/M/s$

Des clients arrivent à un système selon un **processus de Poisson** de taux  $\lambda$ .

Il y a  $s$  serveurs identiques et chacun peut servir un client à la fois, au taux de service  $\mu$ ; i.e., les **durées de service** sont indépendantes et **exponentielles** de moyenne  $1/\mu$ .

$X(t)$  représente le nombre de clients dans le système.

On a  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ ,  $\mu_i = i\mu$  pour  $1 \leq i \leq s$ ,  $\mu_i = s\mu$  pour  $i > s$ .

Quand  $X(t) = i \leq s$ ,  $i$  serveurs sont occupés; et quand  $X(t) = i > s$ ,  $s$  serveurs sont occupés et il y a  $i - s$  clients dans la file d'attente.



## File d'attente $M/M/s$

Des clients arrivent à un système selon un **processus de Poisson** de taux  $\lambda$ .

Il y a  $s$  serveurs identiques et chacun peut servir un client à la fois, au taux de service  $\mu$ ; i.e., les **durées de service** sont indépendantes et **exponentielles** de moyenne  $1/\mu$ .

$X(t)$  représente le nombre de clients dans le système.

On a  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ ,  $\mu_i = i\mu$  pour  $1 \leq i \leq s$ ,  $\mu_i = s\mu$  pour  $i > s$ .

Quand  $X(t) = i \leq s$ ,  $i$  serveurs sont occupés; et quand  $X(t) = i > s$ ,  $s$  serveurs sont occupés et il y a  $i - s$  clients dans la file d'attente. On a ici

$$Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} & \text{pour } i \leq s; \\ \frac{\lambda^i}{s! s^{i-s} \mu^i} & \text{pour } i > s; \end{cases} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Q_{i+1}}{Q_i} = \frac{\lambda}{s\mu}.$$

La somme  $\sum_{i=0}^{\infty} Q_i$  converge ssi  $\lambda/(s\mu) < 1$ .

Sinon, on a une file d'attente qui s'accumule à l'infini et pas de solution pour des  $P_i \neq 0$ .

## File d'attente $M/M/s$

Des clients arrivent à un système selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .

Il y a  $s$  serveurs identiques et chacun peut servir un client à la fois, au taux de service  $\mu$ ; i.e., les durées de service sont indépendantes et exponentielles de moyenne  $1/\mu$ .

$X(t)$  représente le nombre de clients dans le système.

On a  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ ,  $\mu_i = i\mu$  pour  $1 \leq i \leq s$ ,  $\mu_i = s\mu$  pour  $i > s$ .

Quand  $X(t) = i \leq s$ ,  $i$  serveurs sont occupés; et quand  $X(t) = i > s$ ,  $s$  serveurs sont occupés et il y a  $i - s$  clients dans la file d'attente. On a ici

$$Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} & \text{pour } i \leq s; \\ \frac{\lambda^i}{s! s^{i-s} \mu^i} & \text{pour } i > s; \end{cases} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{Q_{i+1}}{Q_i} = \frac{\lambda}{s\mu}.$$

La somme  $\sum_{i=0}^{\infty} Q_i$  converge ssi  $\lambda/(s\mu) < 1$ .

Sinon, on a une file d'attente qui s'accumule à l'infini et pas de solution pour des  $P_i \neq 0$ .

**File d'attente  $M/M/1$ :** Un seul serveur. On a  $\mu_i = \mu$  pour tout  $i \geq 1$ .

## File d'attente $M/M/s$

Pour trouver les probabilités stationnaires  $P_i$ , il faut calculer

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{i=0}^s \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s! s^{i-s} \mu^i},$$

et ensuite  $P_i = P_0 Q_i$  pour tout  $i > 0$ . On peut calculer ces valeurs numériquement.

## File d'attente $M/M/s$

Pour trouver les probabilités stationnaires  $P_i$ , il faut calculer

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{i=0}^s \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s! s^{i-s} \mu^i},$$

et ensuite  $P_i = P_0 Q_i$  pour tout  $i > 0$ . On peut calculer ces valeurs numériquement.

Ensuite on peut calculer plusieurs choses, comme par exemple la [proportion des clients qui doivent attendre](#), qui est égale à la proportion du temps que les serveurs sont tous occupés, soit  $1 - P_0 - \dots - P_{s-1}$ .

## File d'attente $M/M/s$

Pour trouver les probabilités stationnaires  $P_i$ , il faut calculer

$$\frac{1}{P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \sum_{i=0}^s \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} + \sum_{i=s+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s! s^{i-s} \mu^i},$$

et ensuite  $P_i = P_0 Q_i$  pour tout  $i > 0$ . On peut calculer ces valeurs numériquement.

Ensuite on peut calculer plusieurs choses, comme par exemple la **proportion des clients qui doivent attendre**, qui est égale à la proportion du temps que les serveurs sont tous occupés, soit  $1 - P_0 - \dots - P_{s-1}$ .

Si un nouveau client arrive quand il y a  $i \geq s$  clients dans le système, il doit attendre pour  $i - s + 1$  fins de service avant de débuter son service. Puisque le taux de service avec  $s$  serveurs est  $s\mu$ , le temps jusqu'à la prochaine fin de service est une exponentielle de moyenne  $1/(s\mu)$ . Ainsi, le temps espéré d'attente pour ce client sera  $(i - s + 1)/(s\mu)$ .

Globalement, le **temps moyen d'attente par client** sera donc  $\sum_{i=s}^{\infty} P_i \cdot (i + 1 - s)/(s\mu)$ .

## Un modèle de réparation de machines

On a  $M$  machines et un seul réparateur. Chaque machine tombe en panne au taux  $\lambda$  (durée de bon fonctionnement exponentielle) et les durées de réparation sont indépendantes et exponentielles de taux  $\mu$ . Soit  $X(t)$  le nombre de machines en panne au temps  $t$ . Donc  $M - X(t)$  fonctionnent. Ici, les arrivées correspondent aux pannes des machines.

## Un modèle de réparation de machines

On a  $M$  machines et un seul réparateur. Chaque machine tombe en panne au taux  $\lambda$  (durée de bon fonctionnement exponentielle) et les durées de réparation sont indépendantes et exponentielles de taux  $\mu$ . Soit  $X(t)$  le nombre de machines en panne au temps  $t$ . Donc  $M - X(t)$  fonctionnent. Ici, les arrivées correspondent aux pannes des machines.

Cela donne un processus de naissance et de mort avec  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_i = \mu$  pour  $i \geq 1$ ,  $\lambda_i = 0$  pour  $i \geq M$ , et  $\lambda_i = (M - i)\lambda$  pour  $i < M$ . On obtient

$$Q_i = M\lambda \cdot (M-1)\lambda \cdots (M-i+1)\lambda / \mu^i = (\lambda/\mu)^i M! / (M-i)!,$$

$$1/P_0 = 1 + \sum_{i=1}^M Q_i, \quad P_i = P_0 Q_i.$$

## Un modèle de réparation de machines

On a  $M$  machines et un seul réparateur. Chaque machine tombe en panne au taux  $\lambda$  (durée de bon fonctionnement exponentielle) et les durées de réparation sont indépendantes et exponentielles de taux  $\mu$ . Soit  $X(t)$  le nombre de machines en panne au temps  $t$ . Donc  $M - X(t)$  fonctionnent. Ici, les arrivées correspondent aux pannes des machines.

Cela donne un processus de naissance et de mort avec  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_i = \mu$  pour  $i \geq 1$ ,  $\lambda_i = 0$  pour  $i \geq M$ , et  $\lambda_i = (M - i)\lambda$  pour  $i < M$ . On obtient

$$Q_i = M\lambda \cdot (M-1)\lambda \cdots (M-i+1)\lambda / \mu^i = (\lambda/\mu)^i M! / (M-i)!,$$

$$1/P_0 = 1 + \sum_{i=1}^M Q_i, \quad P_i = P_0 Q_i.$$

Le nombre moyen de machines en panne est

$$\nu_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^M iP_i = P_0 \sum_{i=1}^M iQ_i.$$

La proportion du temps que chaque machine passe en panne est  $\nu_p/M$  et la proportion du temps où elle est opérationnelle est  $1 - \nu_p/M$ . On peut calculer tout ça numériquement.



## Évolution à reculons et chaînes réversibles

Pour une CMTC donnée, supposons que la CMTD sous-jacente a un vecteur de probabilités d'état stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  tel que On a  $\pi \mathbf{P} = \pi$  et  $\pi \mathbf{1} = 1$ .

À reculons, cette chaîne a les probabilités de transition  $Q_{i,j} = P_{j,i} \pi_j / \pi_i$ .

On a vu que la CMTD est réversible ssi  $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$  pour tous  $i, j$ .

## Évolution à reculons et chaînes réversibles

Pour une CMTC donnée, supposons que la CMTD sous-jacente a un vecteur de probabilités d'état stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  tel que On a  $\pi P = \pi$  et  $\pi \mathbf{1} = 1$ .

À reculons, cette chaîne a les probabilités de transition  $Q_{i,j} = P_{j,i}\pi_j/\pi_i$ .

On a vu que la CMTD est réversible ssi  $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$  pour tous  $i, j$ .

Pour faire évoluer la CMTC à reculons, il faut aussi connaître la loi de la durée jusqu'au prochain saut à reculons, i.e., la durée depuis le dernier saut pour la chaîne qui avance.

Soit  $X(t) = i$  et  $T = t - D < t$  l'instant du dernier saut avant  $t$ . On ne connaît pas  $D$ .

Mais en supposant que le processus est stationnaire et évolue depuis un temps infini, on a

$$\mathbb{P}[D > x \mid X(t) = i] = \frac{\mathbb{P}[X(t-x) = i \text{ et } D > x]}{\mathbb{P}[X(t) = i]} = \frac{\mathbb{P}[X(t-x) = i] \cdot e^{-v_i x}}{\mathbb{P}[X(t) = i]} = e^{-v_i x}.$$

Donc le temps  $D$  depuis le dernier saut est une exponentielle de taux  $v_i^* = v_i$ .

## Évolution à reculons et chaînes réversibles

Pour une CMTC donnée, supposons que la CMTD sous-jacente a un vecteur de probabilités d'état stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$  tel que On a  $\pi P = \pi$  et  $\pi \mathbf{1} = 1$ .

À reculons, cette chaîne a les probabilités de transition  $Q_{i,j} = P_{j,i}\pi_j/\pi_i$ .

On a vu que la CMTD est réversible ssi  $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$  pour tous  $i, j$ .

Pour faire évoluer la CMTC à reculons, il faut aussi connaître la loi de la durée jusqu'au prochain saut à reculons, i.e., la durée depuis le dernier saut pour la chaîne qui avance.

Soit  $X(t) = i$  et  $T = t - D < t$  l'instant du dernier saut avant  $t$ . On ne connaît pas  $D$ .

Mais en supposant que le processus est stationnaire et évolue depuis un temps infini, on a

$$\mathbb{P}[D > x \mid X(t) = i] = \frac{\mathbb{P}[X(t-x) = i \text{ et } D > x]}{\mathbb{P}[X(t) = i]} = \frac{\mathbb{P}[X(t-x) = i] \cdot e^{-v_i x}}{\mathbb{P}[X(t) = i]} = e^{-v_i x}.$$

Donc le temps  $D$  depuis le dernier saut est une exponentielle de taux  $v_i^* = v_i$ . Si on fait évoluer le système à reculons, le taux de saut sera encore  $v_i$  quand on est dans l'état  $i$ , et le taux de saut vers  $j$  sera  $q_{i,j}^* = v_i Q_{i,j} = v_i P_{j,i}\pi_j/\pi_i = q_{j,i} P_j/P_i$ . En fait, la durée de séjour dans un état  $i$  doit être la même quand on regarde la trajectoire à reculons que vers l'avant!

On sait que les  $\pi_i$  sont les mêmes pour la chaîne inverse que pour celle qui avance.  
Il en est de même pour les probabilités stationnaires  $P_i$  de la CMTC ordinaire ou inverse.

On sait que  $q_{i,j} = v_j P_{i,j}$ . En posant  $P_i = (\pi_i/v_i)/\kappa$  où  $\kappa = \sum_i \pi_i/v_i$ , on obtient

$$\kappa v_j P_j = \pi_j = \sum_{i \neq j} \pi_i P_{i,j} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{i,j}/v_i = \kappa \sum_{i \neq j} P_i q_{i,j}.$$

On voit que ces  $P_i$  satisfont les équations d'équilibre!

Ces  $P_i$  sont donc les probabilités stationnaires pour la CMTC.

C'est tout à fait logique, car  $\pi_i$  est la proportion des transitions qui se font vers  $i$ , et la durée de séjour moyenne dans cet état est  $1/v_i$ .

**Paradoxe?** Quand on est dans l'état  $i$  au temps  $t$ , le temps depuis le dernier saut est exponentiel de moyenne  $1/v_i$  et le temps jusqu'au prochain saut est aussi exponentiel de moyenne  $1/v_i$ . Cela fait une durée de séjour totale qui est une somme de ces deux exponentielles, donc de moyenne  $2/v_i$  au lieu de  $1/v_i$ . Contradiction? Non. C'est parce que pour  $t$  fixé, l'intervalle entre deux sauts qui contient (tombe sur)  $t$  a plus de chances d'être plus grand, car les intervalles plus grands sont avantagés!

Supposons par exemple que des autobus arrivent à un arrêt selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . i.e., les durées  $A_i$  entre les arrivées successives sont i.i.d. exponentielles de moyenne  $1/\lambda$ , de densité  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ . Si vous arrivez à l'arrêt à un instant aléatoire indépendant des  $A_i$ , la probabilité que cet instant tombe dans un intervalle inter-arrivées donné est proportionnelle à sa longueur  $A_i$ . La densité de la longueur  $A$  de l'intervalle choisi est donc proportionnelle à  $xf(x)$ . On doit multiplier par  $\lambda$  pour que l'intégrale de la densité donne 1, ce qui donne  $x\lambda^2 e^{-\lambda x}$  pour  $x > 0$ . Ceci est la densité d'une loi Gamma(2,  $\lambda$ ), dont l'espérance est  $2/\lambda$ , et qui est aussi la loi de la somme de deux exponentielles indépendantes de moyenne  $1/\lambda$ . Tout concorde! Par exemple, si la durée moyenne entre les autobus successifs est de 10 minutes, à votre arrivée, la durée entre le dernier passage et le prochain passage est une v.a. Gamma de moyenne 20 minutes.

## Équations dont la solution donne les $q_{i,j}^*$ et les $P_i$ .

**Proposition.** Si les  $q_{i,j}$  sont les taux de transition d'une CMTC irréductible et si on peut trouver des  $q_{i,j}^*$  et des  $P_i \geq 0$  qui somment à 1 et qui satisfont

$$P_i q_{i,j}^* = P_j q_{j,i} \text{ pour tout } i \neq j \text{ et } \sum_{j \neq i} q_{i,j}^* = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \text{ pour tout } i,$$

alors les  $q_{i,j}^*$  sont nécessairement les taux de transition de la chaîne inverse et les  $P_i$  sont les probabilités limites (et stationnaires) pour les deux chaînes.

**Preuve.** Il suffit de montrer que les  $P_i$  satisfont les équations d'équilibre  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = 0$ . En sommant la première équation sur  $j$ , puis en utilisant la deuxième, on a

$$\sum_{j \neq i} P_j q_{j,i} = \sum_{j \neq i} P_i q_{i,j}^* = \sum_{j \neq i} P_i q_{i,j}.$$

Donc les  $P_i$  satisfont les équations d'équilibre (taux d'arrivée à  $i =$  taux de sortie de  $i$ ). Et puisque  $P_i q_{i,j}^* = P_j q_{j,i}$ , les  $q_{i,j}^*$  sont les taux de transition de la chaîne inverse.

## Conditions de réversibilité pour la CMTC.

Puisque  $\pi_i P_{i,j} = P_i v_i q_{i,j} / v_i = P_i q_{i,j}$ , on a

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i} \text{ ssi } P_i q_{i,j} = P_j q_{j,i} .$$

Ce sont les **conditions de réversibilité pour la CMTC**. Elles disent que pour toute paire d'états  $(i, j)$  le taux (fréquence) des transitions de  $i$  à  $j$  est le même que pour les transitions de  $j$  à  $i$ .

## Conditions de réversibilité pour la CMTC.

Puisque  $\pi_i P_{i,j} = P_i v_i q_{i,j} / v_i = P_i q_{i,j}$ , on a

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i} \text{ ssi } P_i q_{i,j} = P_j q_{j,i} .$$

Ce sont les **conditions de réversibilité pour la CMTC**. Elles disent que pour toute paire d'états  $(i, j)$  le taux (fréquence) des transitions de  $i$  à  $j$  est le même que pour les transitions de  $j$  à  $i$ .

Quand la chaîne est réversible, on a  $q_{i,j}^* = v_i Q_{i,j} = v_i P_{i,j} = q_{i,j}$ .

La chaîne qui recule a alors les mêmes taux de saut  $q_{i,j}$  que celle qui avance.



## Conditions de réversibilité pour la CMTC.

Puisque  $\pi_i P_{i,j} = P_i v_i q_{i,j} / v_j = P_i q_{i,j}$ , on a

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i} \text{ ssi } P_i q_{i,j} = P_j q_{j,i} .$$

Ce sont les **conditions de réversibilité pour la CMTC**. Elles disent que pour toute paire d'états  $(i, j)$  le taux (fréquence) des transitions de  $i$  à  $j$  est le même que pour les transitions de  $j$  à  $i$ .

Quand la chaîne est réversible, on a  $q_{i,j}^* = v_i Q_{i,j} = v_i P_{i,j} = q_{i,j}$ .

La chaîne qui recule a alors les mêmes taux de saut  $q_{i,j}$  que celle qui avance.

**Proposition.** Si des  $P_i \geq 0$  satisfont les équations  $P_i q_{i,j} = P_j q_{j,i}$  pour tout  $(i, j)$  et  $\sum_i P_i = 1$ , ces  $P_i$  sont nécessairement les probabilités stationnaires et la chaîne est réversible.

**Exemple.** Un processus de naissance et de mort ergodique (irréductible et récurrent positif) est toujours réversible. En effet, on peut vérifier que  $P_i q_{i,i+1} = P_i \lambda_i = P_{i+1} \mu_{i+1} = P_{i+1} q_{i+1,i}$  pour tout  $i > 0$ .

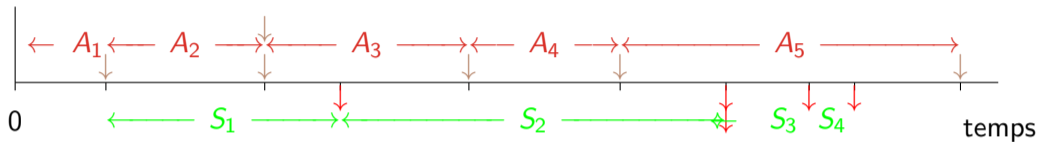
**Exemple.** Un processus de naissance et de mort ergodique (irréductible et récurrent positif) est toujours réversible. En effet, on peut vérifier que

$$P_i q_{i,i+1} = P_i \lambda_i = P_{i+1} \mu_{i+1} = P_{i+1} q_{i+1,i} \text{ pour tout } i > 0.$$

**Exemple.** Soit une file  $M/M/s$  avec taux d'arrivée  $\lambda$  et taux de service  $\mu$  tels que  $\lambda < s\mu$ . Soit  $X(t)$  le nombre de clients dans le système au temps  $t$ .

Quand la chaîne évolue vers l'avant,  $X(t)$  augmente de 1 à chaque arrivée et diminue de 1 à chaque départ. Quant elle va vers l'arrière, c'est l'inverse,  $X(t)$  augmente de 1 à chaque départ. Mais ce processus à reculons a exactement les mêmes taux de transition que le processus avant, donc le processus des départs vu à reculons doit être un processus de Poisson stationnaire de taux  $\lambda$ . Mais un tel processus a la même loi qu'il évolue dans un sens ou dans l'autre.

Cela implique que le processus des départs (sans regarder  $X(t)$ ) doit être un processus de Poisson de taux  $\lambda$ .



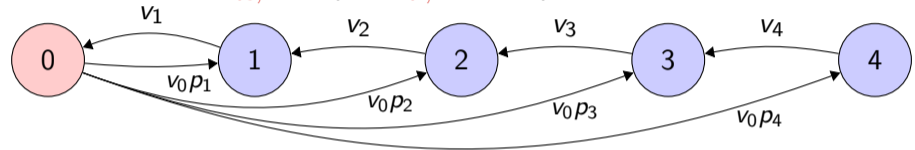
**Exemple.** Soit une file  $M/M/1$  avec taux d'arrivée  $\lambda$  et taux de service  $\mu$ , à l'état stationnaire. Soit  $T$  le temps passé dans le système par un client donné. Conditionnellement à  $T = t$ , quelle est la loi de probabilité du nombre  $N$  de clients dans le système lorsque ce client est arrivé?

Ce  $N$  est égal au nombre de départs durant les  $t$  unités de temps où ce client était présent. Mais pour le processus qui évolue à reculons, ce nombre  $N$  est le nombre d'arrivées durant cet intervalle de temps, qui suit la loi de Poisson de moyenne  $\lambda t$ .

## Chaîne inverse d'une CMTC qui saute puis redescend pas à pas

Ross, Exemple 6.21. Une chaîne passe de l'état 0 à l'état  $i > 0$  avec probabilité  $p_i = P_{0,i}$ , telles que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ , puis  $P_{i,i-1} = 1$  pour tout  $i > 0$ .

Les taux de transition sont  $q_{0,i} = v_0 p_i$  et  $q_{i,i-1} = v_i$  pour  $i > 0$ .



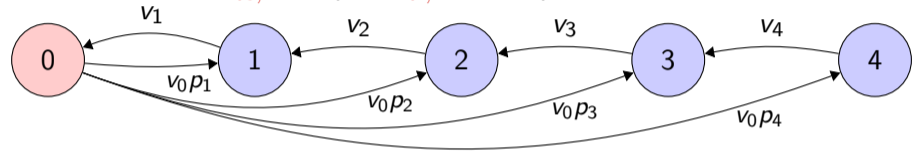
Soit  $N$  une v.a. telle que  $\mathbb{P}(N = i) = p_i$  pour  $i > 0$ . La chaîne passe une durée  $\text{Expon}(v_0)$  à 0, puis saute à  $N$ , puis à  $N - 1, N - 2, \dots, 1, 0$ , dans cet ordre, et recommence.

Comment trouver les probabilités  $P_i$  d'état stationnaire?

## Chaîne inverse d'une CMTC qui saute puis redescend pas à pas

Ross, Exemple 6.21. Une chaîne passe de l'état 0 à l'état  $i > 0$  avec probabilité  $p_i = P_{0,i}$ , telles que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ , puis  $P_{i,i-1} = 1$  pour tout  $i > 0$ .

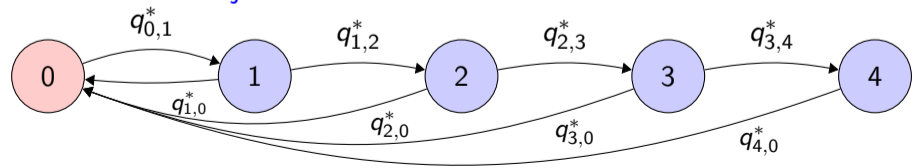
Les taux de transition sont  $q_{0,i} = v_0 p_i$  et  $q_{i,i-1} = v_i$  pour  $i > 0$ .



Soit  $N$  une v.a. telle que  $\mathbb{P}(N = i) = p_i$  pour  $i > 0$ . La chaîne passe une durée  $\text{Expon}(v_0)$  à 0, puis saute à  $N$ , puis à  $N - 1, N - 2, \dots, 1, 0$ , dans cet ordre, et recommence.

Comment trouver les probabilités  $P_i$  d'état stationnaire?

La chaîne inverse fera la trajectoire inverse:  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N \rightarrow 0$ .



Supposons que la chaîne est dans l'état  $i > 0$ . L'état précédent peut être 0 ou  $i + 1$ .

Il est 0 si  $N = i$  pour ce cycle, ce qui se produit avec probabilité

$$Q_{i,0} = \mathbb{P}[N = i \mid N \geq i] = p_i / \mathbb{P}[N \geq i]$$

et il est  $i + 1$  avec probabilité

$$Q_{i,i+1} = 1 - p_i / \mathbb{P}[N \geq i] = \mathbb{P}[N \geq i + 1] / \mathbb{P}[N \geq i].$$

Les taux de transition de la chaîne inverse sont donc

$$q_{i,0}^* = v_i p_i / \mathbb{P}[N \geq i] \quad \text{et} \quad q_{i,i+1}^* = v_i \mathbb{P}[N \geq i + 1] / \mathbb{P}[N \geq i], \quad i \geq 0.$$

Supposons que la chaîne est dans l'état  $i > 0$ . L'état précédent peut être 0 ou  $i + 1$ .

Il est 0 si  $N = i$  pour ce cycle, ce qui se produit avec probabilité

$$Q_{i,0} = \mathbb{P}[N = i \mid N \geq i] = p_i / \mathbb{P}[N \geq i]$$

et il est  $i + 1$  avec probabilité

$$Q_{i,i+1} = 1 - p_i / \mathbb{P}[N \geq i] = \mathbb{P}[N \geq i + 1] / \mathbb{P}[N \geq i].$$

Les taux de transition de la chaîne inverse sont donc

$$q_{i,0}^* = v_i p_i / \mathbb{P}[N \geq i] \quad \text{et} \quad q_{i,i+1}^* = v_i \mathbb{P}[N \geq i + 1] / \mathbb{P}[N \geq i], \quad i \geq 0.$$

Les équations  $q_{i,j}^* = q_{j,i} P_j / P_i$  sont ici  $q_{i,0}^* = q_{0,i} P_0 / P_i$  et  $q_{i,i+1}^* = q_{i+1,i} P_{i+1} / P_i$  pour  $i \geq 0$ .

En égalant les deux expressions pour  $q_{i,0}^*$  et aussi pour  $q_{i,i+1}^*$ , on obtient, pour  $i \geq 0$ :

$$\begin{aligned} v_i p_i P_i &= q_{0,i} P_0 \mathbb{P}[N \geq i] = v_0 p_i P_0 \mathbb{P}[N \geq i]; \\ v_i \mathbb{P}[N \geq i + 1] / \mathbb{P}[N \geq i] &= q_{i+1,i} P_{i+1} / P_i = v_{i+1} P_{i+1} / P_i. \end{aligned}$$



Ce sont les équations d'équilibre, qui se réécrivent:

$$\begin{aligned}v_i P_i &= v_0 P_0 \mathbb{P}[N \geq i]; \\v_{i+1} P_{i+1} &= v_i P_i \mathbb{P}[N \geq i+1] / \mathbb{P}[N \geq i].\end{aligned}$$

Ce sont les équations d'équilibre, qui se réécrivent:

$$\begin{aligned}v_i P_i &= v_0 P_0 \mathbb{P}[N \geq i]; \\v_{i+1} P_{i+1} &= v_i P_i \mathbb{P}[N \geq i+1] / \mathbb{P}[N \geq i].\end{aligned}$$

En sommant les  $P_i$  écrits en fonction de  $P_0$  via la première équation, on a la condition

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = v_0 P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}[N \geq i] / v_i,$$

ce qui donne  $\frac{1}{v_0 P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}[N \geq i] / v_i,$

puis  $P_i = v_0 P_0 \mathbb{P}[N \geq i] / v_i, \quad i \geq 0.$

Ce sont les équations d'équilibre, qui se réécrivent:

$$\begin{aligned}v_i P_i &= v_0 P_0 \mathbb{P}[N \geq i]; \\v_{i+1} P_{i+1} &= v_i P_i \mathbb{P}[N \geq i + 1] / \mathbb{P}[N \geq i].\end{aligned}$$

En sommant les  $P_i$  écrits en fonction de  $P_0$  via la première équation, on a la condition

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = v_0 P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}[N \geq i] / v_i,$$

ce qui donne  $\frac{1}{v_0 P_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}[N \geq i] / v_i,$

puis  $P_i = v_0 P_0 \mathbb{P}[N \geq i] / v_i, \quad i \geq 0.$

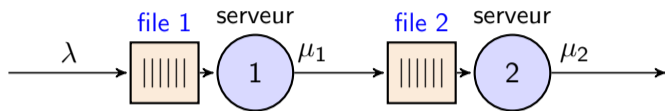
On peut ensuite vérifier que ces  $P_i$  satisfont la seconde équation:

$$v_{i+1} P_{i+1} / \mathbb{P}[N \geq i + 1] = v_0 P_0 = v_i P_i / \mathbb{P}[N \geq i].$$

Il est donc certain que ces  $P_i$  sont les probabilités d'état stationnaire.

## Une file d'attente en tandem, et la chaîne inverse

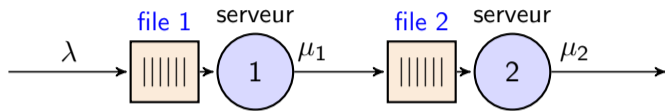
Ross, Exemple 6.22. On considère une file d'attente en tandem, avec 2 postes de service.



Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , les durées de service sont toutes exponentielles et indépendantes, le taux de service au premier poste est  $\mu_1$ , celui au deuxième poste est  $\mu_2$ , il y a un serveur par poste, et la politique est premier arrivé premier servi.

## Une file d'attente en tandem, et la chaîne inverse

Ross, Exemple 6.22. On considère une file d'attente en tandem, avec 2 postes de service.



Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , les durées de service sont toutes exponentielles et indépendantes, le taux de service au premier poste est  $\mu_1$ , celui au deuxième poste est  $\mu_2$ , il y a un serveur par poste, et la politique est premier arrivé premier servi.

**État**  $(n, m)$ :  $n$  clients au poste 1 et  $m$  clients au poste 2. Taux de transition vers  $(n, m)$ :

$$q_{i,j} = \begin{cases} \lambda & \text{pour } i = (n-1, m) \rightarrow j = (n, m), n \geq 1; & \text{(une arrivée)} \\ \mu_1 & \text{pour } i = (n+1, m-1) \rightarrow j = (n, m), m \geq 1; & \text{(départ du poste 1)} \\ \mu_2 & \text{pour } i = (n, m+1) \rightarrow j = (n, m); & \text{(départ du poste 2)} \end{cases}$$

Il y a une infinité d'états.

On peut trouver les probabilités limites  $P_j = P_{(n,m)}$  en utilisant la chaîne inverse.

Les clients arrivent alors au serveur 2, puis passent au serveur 1, puis quittent.

Le taux moyen d'arrivée des clients doit être aussi  $\lambda$ , mais on ne sait pas si c'est un processus de Poisson. On va faire l'hypothèse que c'en est un, Puis vérifier si cette hypothèse tient.

Dans le processus inverse, les durées de séjour des clients aux postes 1 et 2 doivent être les mêmes et donc avoir la même loi que dans le processus original; ce sont des exponentielles de taux  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , respectivement.

Sous ces hypothèses, les taux de transition du processus inverse à partir de  $i = (n, m)$  sont

$$q_{i,j}^* = \begin{cases} \lambda & \text{pour } i = (n, m) \rightarrow j = (n, m + 1), n \geq 1; & \text{(arrivée au poste 2)} \\ \mu_2 & \text{pour } i = (n, m) \rightarrow j = (n + 1, m - 1), m \geq 1; & \text{(départ du poste 2 vers 1)} \\ \mu_1 & \text{pour } i = (n, m) \rightarrow j = (n - 1, m); & \text{(départ du poste 1)} \end{cases}$$

Le taux de transition total partant de  $i = (n, m)$  pour la chaîne inverse est alors

$$v_i^* = \lambda + \mu_1 \mathbb{I}[n > 0] + \mu_2 \mathbb{I}[m > 0] = v_i.$$

On sait que l'on doit avoir  $P_i q_{i,j} = q_{j,i}^* P_j$ , ce qui donne avec les  $q_{j,i}^*$  précédents:

$$\begin{aligned} P_{(n-1,m)} \lambda &= \mu_1 P_{(n,m)}, & n > 0; \\ P_{(n+1,m-1)} \mu_1 &= \mu_2 P_{(n,m)}, & m > 0; \\ P_{(n,m+1)} \mu_2 &= \lambda P_{(n,m)}. \end{aligned}$$

En itérant la première équation, on obtient

$$P_{(n,m)} = P_{(n-1,m)}(\lambda/\mu_1) = P_{(n-2,m)}(\lambda/\mu_1)^2 = \cdots = P_{(0,m)}(\lambda/\mu_1)^n.$$

Puis en fixant  $n = 0$  dans la troisième équation, on obtient

$$P_{(0,m)} = P_{(0,m-1)}(\lambda/\mu_2) = P_{(0,m-2)}(\lambda/\mu_2)^2 = \cdots = P_{(0,0)}(\lambda/\mu_2)^m.$$

Ces deux équations impliquent que  $P_{(n,m)} = (\lambda/\mu_1)^n (\lambda/\mu_2)^m P_{(0,0)}$ . Avec la condition

$$1 = \sum_n \sum_m P_{(n,m)} = P_{(0,0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu_1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda/\mu_2)^m = P_{(0,0)} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu_1)} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu_2)},$$

on trouve  $P_{(0,0)} = (1 - \lambda/\mu_1)(1 - \lambda/\mu_2)$  puis

$$P_{(n,m)} = (\lambda/\mu_1)^n \cdot (1 - \lambda/\mu_1) \cdot (\lambda/\mu_2)^m \cdot (1 - \lambda/\mu_2).$$



Ces deux équations impliquent que  $P_{(n,m)} = (\lambda/\mu_1)^n (\lambda/\mu_2)^m P_{(0,0)}$ . Avec la condition

$$1 = \sum_n \sum_m P_{(n,m)} = P_{(0,0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu_1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda/\mu_2)^m = P_{(0,0)} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu_1)} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu_2)},$$

on trouve  $P_{(0,0)} = (1 - \lambda/\mu_1)(1 - \lambda/\mu_2)$  puis

$$P_{(n,m)} = (\lambda/\mu_1)^n \cdot (1 - \lambda/\mu_1) \cdot (\lambda/\mu_2)^m \cdot (1 - \lambda/\mu_2).$$

On peut vérifier que ces  $P_{(n,m)}$  satisfont les équations d'équilibre pour la chaîne inverse (voir page 8). Ce sont donc les probabilités d'état stationnaire pour la chaîne et son inverse.

Ces deux équations impliquent que  $P_{(n,m)} = (\lambda/\mu_1)^n (\lambda/\mu_2)^m P_{(0,0)}$ . Avec la condition

$$1 = \sum_n \sum_m P_{(n,m)} = P_{(0,0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu_1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda/\mu_2)^m = P_{(0,0)} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu_1)} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu_2)},$$

on trouve  $P_{(0,0)} = (1 - \lambda/\mu_1)(1 - \lambda/\mu_2)$  puis

$$P_{(n,m)} = (\lambda/\mu_1)^n \cdot (1 - \lambda/\mu_1) \cdot (\lambda/\mu_2)^m \cdot (1 - \lambda/\mu_2).$$

On peut vérifier que ces  $P_{(n,m)}$  satisfont les équations d'équilibre pour la chaîne inverse (voir page 8). Ce sont donc les probabilités d'état stationnaire pour la chaîne et son inverse.

Ces probabilités sont sous la forme produit, ce qui implique que les nombres de clients aux serveurs 1 et 2 sont indépendants! Chacune des deux stations se comporte exactement comme une file  $M/M/1$  avec taux d'arrivée  $\lambda$  et taux de service  $\mu_i$  pour la station  $i$ .

Ce résultat se généralise à des réseaux de files d'attente: les [réseaux de Jackson](#).

## Biologie: Modèle prédateur-proie

Deux populations: les prédateurs et les proies. Par ex.: loups vs lynx; requins vs thons; etc.

État du système:  $(x, y) \in \mathbb{N}_0^2$ , où  $x$  = nombre de prédateurs et  $y$  = nombre de proies.

On peut représenter l'évolution par une CMTC avec les transitions suivantes:

$(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$  (naissance d'un prédateur) au taux  $k_1xy$ ;

$(x, y) \rightarrow (x - 1, y)$  (décès d'un prédateur) au taux  $k_2x$ ;

$(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$  (naissance d'une proie) au taux  $k_3y$ ;

$(x, y) \rightarrow (x, y - 1)$  (mort d'une proie) au taux  $k_4xy$ ;

L'espace d'états est infini. Difficile de trouver une solution exacte, mais on peut simuler.

## Biologie: Modèle prédateur-proie

Deux populations: les prédateurs et les proies. Par ex.: **loups vs lynx**; **requins vs thons**; etc.

État du système:  $(x, y) \in \mathbb{N}_0^2$ , où  $x$  = nombre de **prédateurs** et  $y$  = nombre de **proies**.

On peut représenter l'évolution par une CMTC avec les transitions suivantes:

$(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$  (naissance d'un prédateur) au taux  $k_1xy$ ;

$(x, y) \rightarrow (x - 1, y)$  (décès d'un prédateur) au taux  $k_2x$ ;

$(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$  (naissance d'une proie) au taux  $k_3y$ ;

$(x, y) \rightarrow (x, y - 1)$  (mort d'une proie) au taux  $k_4xy$ ;

L'espace d'états est infini. Difficile de trouver une solution exacte, mais on peut simuler.

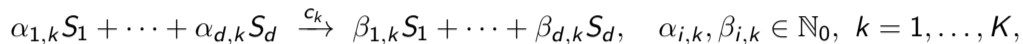
**Modèle fluide déterministe:** Quand  $x$  et  $y$  sont très grands, si on suppose que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et que  $x$  et  $y$  changent de façon continue et **déterministe**, on a le modèle approximatif suivant:

$$x'(t) = k_1x(t)y(t) - k_2x(t); \quad y'(t) = k_3y(t) - k_4x(t)y(t).$$

La modélisation de systèmes par ce genre de système d'équations différentielles et la simulation de ces modèles constitue un champs d'études appelé **la dynamique des systèmes** (system dynamics). Voir [https://en.wikipedia.org/wiki/System\\_dynamics](https://en.wikipedia.org/wiki/System_dynamics).

## Systèmes de réactions chimiques

On a  $d$  types de molécules dans un milieu homogène de petit volume, qui se combinent et se transforment via  $K$  types de réactions chimiques, de la forme:

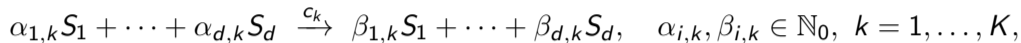


où la constante  $c_k$  représente le **taux de réaction** pour le type (ou canal)  $k$ .

**Réaction  $k$ :** On a un ensemble de  $\{\alpha_{1,k}$  molécules de type  $S_1, \dots, \alpha_{d,k}$  molécules de types  $S_d\}$  qui se transforment en  $\{\beta_{1,k}$  molécules de type  $S_1, \dots, \beta_{d,k}$  molécules de types  $S_d\}$ .

## Systèmes de réactions chimiques

On a  $d$  types de molécules dans un milieu homogène de petit volume, qui se combinent et se transforment via  $K$  types de réactions chimiques, de la forme:



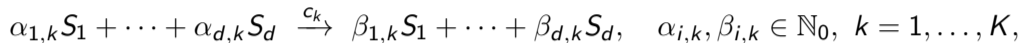
où la constante  $c_k$  représente le **taux de réaction** pour le type (ou canal)  $k$ .

**Réaction  $k$ :** On a un ensemble de  $\{\alpha_{1,k}$  molécules de type  $S_1, \dots, \alpha_{d,k}$  molécules de types  $S_d\}$  qui se transforment en  $\{\beta_{1,k}$  molécules de type  $S_1, \dots, \beta_{d,k}$  molécules de types  $S_d\}$ .

Soit  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t)) \in \mathbb{N}_0^d$ , où  $X_k(t)$  est le nombre de molécules de type  $k$  que l'on a au temps  $t$ . On modélise habituellement le processus  $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$  comme une CMTC où chaque saut correspond à l'occurrence d'une réaction.

## Systèmes de réactions chimiques

On a  $d$  types de molécules dans un milieu homogène de petit volume, qui se combinent et se transforment via  $K$  types de réactions chimiques, de la forme:



où la constante  $c_k$  représente le **taux de réaction** pour le type (ou canal)  $k$ .

**Réaction  $k$ :** On a un ensemble de  $\{\alpha_{1,k}$  molécules de type  $S_1, \dots, \alpha_{d,k}$  molécules de types  $S_d\}$  qui se transforment en  $\{\beta_{1,k}$  molécules de type  $S_1, \dots, \beta_{d,k}$  molécules de types  $S_d\}$ .

Soit  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t)) \in \mathbb{N}_0^d$ , où  $X_k(t)$  est le nombre de molécules de type  $k$  que l'on a au temps  $t$ . On modélise habituellement le processus  $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$  comme une CMTC où chaque saut correspond à l'occurrence d'une réaction.

Le taux d'occurrence de la réaction  $k$  au temps  $t$  est une fonction  $r_k(\mathbf{X}(t))$  du vecteur d'état  $\mathbf{X}(t)$ . En chimie ou biologie, on l'appelle la **propension** de la réaction  $k$ .

La réaction  $k$  fait sauter l'état de  $\mathbf{X}(t)$  à  $\mathbf{X}(t) + \Delta_k$ , où  $\Delta_k = (\beta_{1,k} - \alpha_{1,k}, \dots, \beta_{d,k} - \alpha_{d,k})$  est le vecteur stoechiométrique (vecteur des changements) pour cette réaction.

Le taux de saut pour la réaction  $k$  quand on est dans l'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  a habituellement la forme  $r_k(\mathbf{x}) = c_k h_k(\mathbf{x})$  où  $h_k(\mathbf{x})$  représente le nombre de combinaisons (nombre de façons de choisir) les molécules qui vont participer à la réaction  $k$ :

$$h_k(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \binom{x_j}{\alpha_{j,k}} = \prod_{j=1}^d \frac{x_j!}{\alpha_{j,k}!(x_j - \alpha_{j,k})!} \approx \prod_{j=1}^d \frac{x_j^{\alpha_{j,k}}}{\alpha_{j,k}!}$$

où l'approximation est valide quand  $x_k \gg \alpha_{j,k}$  pour tous  $j$  et  $k$ .



Le taux de saut pour la réaction  $k$  quand on est dans l'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  a habituellement la forme  $r_k(\mathbf{x}) = c_k h_k(\mathbf{x})$  où  $h_k(\mathbf{x})$  représente le nombre de combinaisons (nombre de façons de choisir) les molécules qui vont participer à la réaction  $k$ :

$$h_k(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \binom{x_j}{\alpha_{j,k}} = \prod_{j=1}^d \frac{x_j!}{\alpha_{j,k}!(x_j - \alpha_{j,k})!} \approx \prod_{j=1}^d \frac{x_j^{\alpha_{j,k}}}{\alpha_{j,k}!}$$

où l'approximation est valide quand  $x_j \gg \alpha_{j,k}$  pour tous  $j$  et  $k$ .

Le système d'équations de Kolmogorov vers l'arrière pour cette CMTC est connue comme l'équation maîtresse de la chimie ("**Chemical Master Equation**"). C'est un système d'équations fondamental pour étudier les réactions chimiques ou biologiques.

Ainsi, le modèle de CMTC est central en chimie, biochimie, et biologie.

Le taux de saut pour la réaction  $k$  quand on est dans l'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  a habituellement la forme  $r_k(\mathbf{x}) = c_k h_k(\mathbf{x})$  où  $h_k(\mathbf{x})$  représente le nombre de combinaisons (nombre de façons de choisir) les molécules qui vont participer à la réaction  $k$ :

$$h_k(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \binom{x_j}{\alpha_{j,k}} = \prod_{j=1}^d \frac{x_j!}{\alpha_{j,k}!(x_j - \alpha_{j,k})!} \approx \prod_{j=1}^d \frac{x_j^{\alpha_{j,k}}}{\alpha_{j,k}!}$$

où l'approximation est valide quand  $x_j \gg \alpha_{j,k}$  pour tous  $j$  et  $k$ .

Le système d'équations de Kolmogorov vers l'arrière pour cette CMTC est connue comme l'équation maîtresse de la chimie (“**Chemical Master Equation**”). C'est un système d'équations fondamental pour étudier les réactions chimiques ou biologiques.

Ainsi, le modèle de CMTC est central en chimie, biochimie, et biologie.

Question: Cette CMTC a combien d'états?

Le taux de saut pour la réaction  $k$  quand on est dans l'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  a habituellement la forme  $r_k(\mathbf{x}) = c_k h_k(\mathbf{x})$  où  $h_k(\mathbf{x})$  représente le nombre de combinaisons (nombre de façons de choisir) les molécules qui vont participer à la réaction  $k$ :

$$h_k(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d \binom{x_j}{\alpha_{j,k}} = \prod_{j=1}^d \frac{x_j!}{\alpha_{j,k}!(x_j - \alpha_{j,k})!} \approx \prod_{j=1}^d \frac{x_j^{\alpha_{j,k}}}{\alpha_{j,k}!}$$

où l'approximation est valide quand  $x_k \gg \alpha_{j,k}$  pour tous  $j$  et  $k$ .

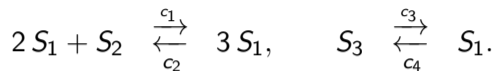
Le système d'équations de Kolmogorov vers l'arrière pour cette CMTC est connue comme l'équation maîtresse de la chimie ("**Chemical Master Equation**"). C'est un système d'équations fondamental pour étudier les réactions chimiques ou biologiques.

Ainsi, le modèle de CMTC est central en chimie, biochimie, et biologie.

Question: Cette CMTC a combien d'états? Indice: Dans le cas particulier où le nombre total de molécules est toujours constant, égal à  $N$ , c'est comme choisir les couleurs des pastilles dans une boîte de  $N$  Smarties s'il y a  $d$  couleurs.

## Exemple: système de Schlögl

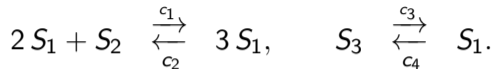
Trois types de molécules,  $S_1, S_2, S_3$ , et quatre types de réactions, de taux  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .



Les équations ne sont pas toujours réversibles. Chaque équation réversible compte pour deux.

## Exemple: système de Schlögl

Trois types de molécules,  $S_1, S_2, S_3$ , et quatre types de réactions, de taux  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .



Les équations ne sont pas toujours réversibles. Chaque équation réversible compte pour deux. Les vecteurs stoechiométriques:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^t, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^t, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^t, \quad \Delta_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^t.$$

Les fonctions de propension (taux de saut) pour  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \mathbf{x} + \Delta_k$ :

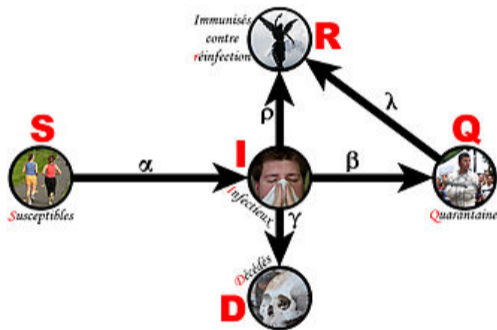
$$r_1(\mathbf{x}) = c_1 \binom{x_1}{2} \binom{x_2}{1} = c_1 x_1 (x_1 - 1) x_2 / 2, \quad r_2(\mathbf{x}) = c_2 \binom{x_1}{3} = c_2 x_1 (x_1 - 1) (x_1 - 2) / 6,$$

$$r_3(\mathbf{x}) = c_3 \binom{x_3}{1} = c_3 x_3, \quad r_4(\mathbf{x}) = c_4 \binom{x_4}{1} = c_4 x_1.$$

## Modèles d'épidémiologie

Population de  $N$  individus. Chacun se trouve dans un **état** (ou **compartiment**), par ex.:

**S**: susceptible; **E**: exposé; **I**: infectieux; **C**: porteur (carrier) mais asymptomatique;  
**Q**: quarantaine; **R**: immunisé contre réinfection; **M**: immunisé (maternel); **D**: décédé;



Il peut y avoir d'autres variantes, et plusieurs cas particuliers de modèles.

Réf.: [fr.wikipedia.org/wiki/Modèles\\_compartimentaux\\_en\\_épidémiologie](http://fr.wikipedia.org/wiki/Modèles_compartimentaux_en_épidémiologie)

## Modèles de base simples.

**Modèle SIS:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  susceptible (S).

E.g., rhume ordinaire, pas d'immunité.

**État** de la CMTC:  $I(t) = i$  = nombre de personnes infectieuses au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$i \rightarrow i + 1$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i)$ ;

$i \rightarrow i - 1$  (une personne infectieuse redevient susceptible) au taux  $b \cdot i$ ;

Le taux d'occurrence des infections est proportionnel à  $i(N - i)$  et le taux des guérisons est proportionnel à  $i$ .

## Modèles de base simples.

**Modèle SIS:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  susceptible (S).

E.g., rhume ordinaire, pas d'immunité.

**État** de la CMTC:  $I(t) = i$  = nombre de personnes infectieuses au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$i \rightarrow i + 1$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i)$ ;

$i \rightarrow i - 1$  (une personne infectieuse redevient susceptible) au taux  $b \cdot i$ ;

Le taux d'occurrence des infections est proportionnel à  $i(N - i)$  et le taux des guérisons est proportionnel à  $i$ .

Modèle approximatif **déterministe** en dynamique des systèmes:

$$I'(t) = a \cdot I(t)(N - I(t)) - b \cdot I(t).$$



**Modèle SIR:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  immunisé (R).

État de la CMTc:  $(I(t), R(t)) = (i, r)$  = nombre  $i$  de personnes infectieuses et nombre  $r$  de personnes immunisées au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t) - R(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$(i, r) \rightarrow (i + 1, r)$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i - r)$ ;

$(i, r) \rightarrow (i - 1, r + 1)$  (une personne infectieuse devient immunisée) au taux  $b \cdot i$ .

Le taux d'occurrence des infections est proportionnel à  $i(N - i - r)$  et le taux des passages à "immunisé" est proportionnel à  $i$

**Modèle SIR:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  immunisé (R).

État de la CMTc:  $(I(t), R(t)) = (i, r)$  = nombre  $i$  de personnes infectieuses et nombre  $r$  de personnes immunisées au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t) - R(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$(i, r) \rightarrow (i + 1, r)$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i - r)$ ;

$(i, r) \rightarrow (i - 1, r + 1)$  (une personne infectieuse devient immunisée) au taux  $b \cdot i$ .

Le taux d'occurrence des infections est proportionnel à  $i(N - i - r)$  et le taux des passages à "immunisé" est proportionnel à  $i$

Modèle approximatif déterministe en dynamique des systèmes:

$$I'(t) = a \cdot I(t)S(t) - b \cdot I(t) = a \cdot I(t)(N - I(t) - R(t)) - b \cdot I(t);$$

$$R'(t) = b \cdot I(t).$$

**Modèle SIR avec vaccination:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  immunisé (R)  
 et aussi (par vaccination) susceptible (S)  $\rightarrow$  immunisé (R).

État de la CMTC:  $(I(t), R(t)) = (i, r)$  = nombre  $i$  de personnes infectieuses et nombre  $r$  de personnes immunisées au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t) - R(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$(i, r) \rightarrow (i + 1, r)$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i - r)$ ;

$(i, r) \rightarrow (i - 1, r + 1)$  (une personne infectieuse devient immunisée) au taux  $b \cdot i$ ;

$(i, r) \rightarrow (i, r + 1)$  (une personne susceptible devient immunisée) au taux  $c$  lorsque  $S(t) > 0$ ,  
 en supposant un taux constant constant de vaccination par unité de temps, quelque soit  $S(t)$ .

**Modèle SIR avec vaccination:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  immunisé (R)  
 et aussi (par vaccination) susceptible (S)  $\rightarrow$  immunisé (R).

État de la CMTC:  $(I(t), R(t)) = (i, r)$  = nombre  $i$  de personnes infectieuses et nombre  $r$  de personnes immunisées au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t) - R(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$(i, r) \rightarrow (i + 1, r)$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i - r)$ ;

$(i, r) \rightarrow (i - 1, r + 1)$  (une personne infectieuse devient immunisée) au taux  $b \cdot i$ ;

$(i, r) \rightarrow (i, r + 1)$  (une personne susceptible devient immunisée) au taux  $c$  lorsque  $S(t) > 0$ ,  
 en supposant un taux constant de vaccination par unité de temps, quelque soit  $S(t)$ .

Modèle approximatif déterministe en dynamique des systèmes:

$$I'(t) = a \cdot I(t)S(t) - b \cdot I(t);$$

$$R'(t) = b \cdot I(t) + c \cdot \mathbb{I}[S(t) > 0].$$

**Modèle SIR avec mutation du virus:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  immunisé (R)  
 et aussi (par mutation) immunisé (R)  $\rightarrow$  susceptible (S).

État de la CMTC:  $(I(t), R(t)) = (i, r)$  = nombre  $i$  de personnes infectieuses et nombre  $r$  de personnes immunisées au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t) - R(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$(i, r) \rightarrow (i + 1, r)$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i - r)$ ;

$(i, r) \rightarrow (i - 1, r + 1)$  (une personne infectieuse devient immunisée) au taux  $b \cdot i$ ;

$(i, r) \rightarrow (i, r - 1)$  (une personne immunisée devient susceptible) au taux  $d$ .

**Modèle SIR avec mutation du virus:** susceptible (S)  $\rightarrow$  infectieux (I)  $\rightarrow$  immunisé (R)  
 et aussi (par mutation) immunisé (R)  $\rightarrow$  susceptible (S).

État de la CMTC:  $(I(t), R(t)) = (i, r)$  = nombre  $i$  de personnes infectieuses et nombre  $r$  de personnes immunisées au temps  $t$ .

On a  $S(t) = N - I(t) - R(t)$  nombre de personnes susceptibles au temps  $t$ .

Transitions:

$(i, r) \rightarrow (i + 1, r)$  (une personne susceptible devient infectieuse) au taux  $a \cdot i(N - i - r)$ ;

$(i, r) \rightarrow (i - 1, r + 1)$  (une personne infectieuse devient immunisée) au taux  $b \cdot i$ ;

$(i, r) \rightarrow (i, r - 1)$  (une personne immunisée devient susceptible) au taux  $d$ .

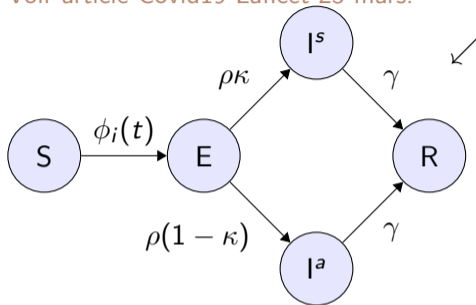
Modèle approximatif déterministe en dynamique des systèmes:

$$I'(t) = a \cdot I(t)S(t) - b \cdot I(t);$$

$$R'(t) = b \cdot I(t) - d \cdot R(t).$$

# Modèle pour Covid-19 (Prem et al., The Lancet, 25 mars 2020)

Voir article Covid19-Lancet-25 mars.



Population de taille  $N$  divisée en  $d$  groupes d'âges.

Transitions pour groupe d'âge  $i$ . ( $d = 16$ )

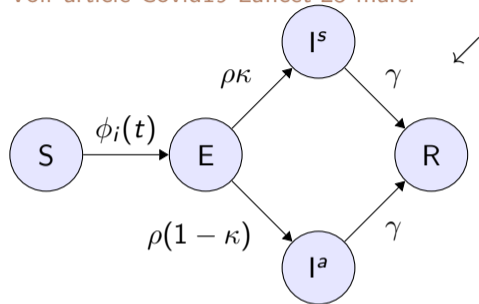
$$\phi_i(t) = \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j} (I_j^s(t) + \alpha I_j^a(t))$$

$C_{i,j}$  = mesure d'interaction entre les groupes  $i$  et  $j$ .

Les paramètres  $C_{i,j}$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$ , doivent être estimés à partir de données! Leurs valeurs sont très incertaines et peuvent changer bien des choses (e.g.,  $\alpha$  pour l'utilité des masques).

# Modèle pour Covid-19 (Prem et al., The Lancet, 25 mars 2020)

Voir article Covid19-Lancet-25 mars.



Population de taille  $N$  divisée en  $d$  groupes d'âges.

Transitions pour groupe d'âge  $i$ . ( $d = 16$ )

$$\phi_i(t) = \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j} (I_j^s(t) + \alpha I_j^a(t))$$

$C_{i,j}$  = mesure d'interaction entre les groupes  $i$  et  $j$ .

Les paramètres  $C_{i,j}$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$ , doivent être estimés à partir de données! Leurs valeurs sont très incertaines et peuvent changer bien des choses (e.g.,  $\alpha$  pour l'utilité des masques).

$S_i(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont susceptibles;

$E_i(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont exposés;

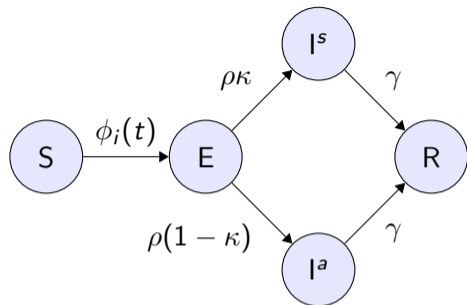
$I_i^s(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont infectieux et symptomatiques;

$I_i^a(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont infectieux et asymptomatiques;

$R_i(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont immunisés.

L'état de la CMTc est  $\mathbf{X}(t) = (S_1, E_1, I_1^s, I_1^a, R_1, \dots, S_d, E_d, I_d^s, I_d^a, R_d)(t)$ , en  $5d$  dimensions.





### Les transitions de la CMTc:

Un individu du groupe  $i$  passe

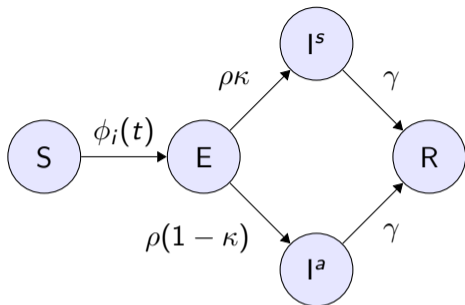
de S à E, taux de transition  $\phi_i(t)S_i(t)$ ;

de E à  $I^s$ , taux de transition  $\rho\kappa E_i(t)$ ;

de E à  $I^a$ , taux de transition  $\rho(1 - \kappa)E_i(t)$ ;

de  $I^s$  à R, taux de transition  $\gamma I_i^s(t)$ ;

de  $I^a$  à R, taux de transition  $\gamma I_i^a(t)$ .



### Les transitions de la CMTC:

Un individu du groupe  $i$  passe

de S à E, taux de transition  $\phi_i(t)S_i(t)$ ;

de E à  $I^s$ , taux de transition  $\rho\kappa E_i(t)$ ;

de E à  $I^a$ , taux de transition  $\rho(1 - \kappa)E_i(t)$ ;

de  $I^s$  à R, taux de transition  $\gamma I_i^s(t)$ ;

de  $I^a$  à R, taux de transition  $\gamma I_i^a(t)$ .

Dans la plupart des états, il y a 5d transitions possibles.

Le générateur infinitésimal est gigantesque, mais on peut simuler l'évolution de cette CMTC assez facilement, une transition à la fois.

Par contre, les taux de transition de la CMTC changent à chaque transition!

À cause de cela, la simulation peut être coûteuse.

## Modèle déterministe correspondant en dynamique des systèmes

On suppose ici que toutes les coordonnées du vecteur d'états  $\mathbf{X}(t)$  prennent des valeurs réelles et évoluent continûment selon des équations différentielles. les taux de transition deviennent des taux de changement de l'état.

$$\phi_i(t) = \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j} (I_j^s(t) + \alpha I_j^a(t));$$

$$S_i'(t) = -\phi_i(t) S_i(t);$$

$$E_i'(t) = \phi_i(t) S_i(t) - \rho E_i(t);$$

$$(I_i^s)'(t) = \rho \kappa E_i(t) - \gamma I_i^s(t);$$

$$(I_i^a)'(t) = \rho(1 - \kappa) E_i(t) - \gamma I_i^a(t);$$

$$R_i'(t) = \gamma (I_i^s(t) + I_i^a(t)).$$

On peut simuler ce système déterministe **approximativement** en discrétisant le temps.

On peut discrétiser le temps disons en intervalles de longueur  $\delta$ . Si  $\delta$  est très petit, on peut supposer que la dérivée ne change pas durant chaque intervalle de longueur  $\delta$ , ce qui donne:

$$\tilde{\phi}_i(t) = \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j} (\tilde{I}_j^s(t) + \alpha \tilde{I}_j^a(t));$$

$$\tilde{S}_i(t + \delta) = \tilde{S}_i(t) - \delta \tilde{\phi}_i(t) \tilde{S}_i(t);$$

$$\tilde{E}_i(t + \delta) = \tilde{E}_i(t) + \delta \tilde{\phi}_i(t) \tilde{S}_i(t) - \delta \rho \tilde{E}_i(t);$$

$$\tilde{I}_i^s(t + \delta) = \tilde{I}_i^s(t) + \delta \rho \kappa \tilde{E}_i(t) - \delta \gamma \tilde{I}_i^s(t);$$

$$\tilde{I}_i^a(t + \delta) = \tilde{I}_i^a(t) + \delta \rho (1 - \kappa) \tilde{E}_i(t) - \delta \gamma \tilde{I}_i^a(t);$$

$$\tilde{R}_i(t + \delta) = \tilde{R}_i(t) + \delta \gamma (\tilde{I}_i^s(t) + \tilde{I}_i^a(t)).$$

C'est la [méthode d'Euler \(1768, encore lui!\)](#) pour simuler les équations différentielles. Les "tilde" indiquent que ce ne sont pas les valeurs exactes, mais des approximations. C'est exactement ce que font les auteurs de l'article [Covid19-Lancet-25 mars](#).

## CMTC avec durées non exponentielles: loi par phases

Dans tous ces modèles de CMTC, on suppose toujours que la durée de séjour dans chaque état suit une **loi exponentielle**. Pas toujours réaliste!

Mais on peut approximer une loi quelconque pour la durée de séjour dans un état par une somme ou un **mélange aléatoire d'exponentielles**. L'idée est de remplacer cette transition par une sous-structure qui contient plusieurs sous-transitions.

Motivation: **davantage de flexibilité tout en conservant les propriétés d'une CMTC.**

## CMTC avec durées non exponentielles: loi par phases

Dans tous ces modèles de CMTC, on suppose toujours que la durée de séjour dans chaque état suit une **loi exponentielle**. Pas toujours réaliste!

Mais on peut approximer une loi quelconque pour la durée de séjour dans un état par une somme ou un **mélange aléatoire d'exponentielles**. L'idée est de remplacer cette transition par une sous-structure qui contient plusieurs sous-transitions.

Motivation: **davantage de flexibilité tout en conservant les propriétés d'une CMTC.**

Somme de  $k$  exponentielles i.i.d.: **Erlang**. Coefficient de variation  $1/\sqrt{k}$ .

## CMTC avec durées non exponentielles: loi par phases

Dans tous ces modèles de CMTC, on suppose toujours que la durée de séjour dans chaque état suit une **loi exponentielle**. Pas toujours réaliste!

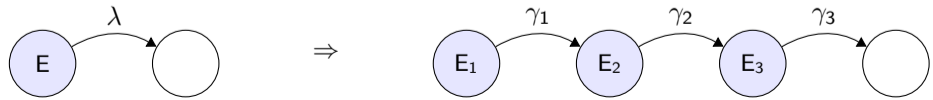
Mais on peut approximer une loi quelconque pour la durée de séjour dans un état par une somme ou un **mélange aléatoire d'exponentielles**. L'idée est de remplacer cette transition par une sous-structure qui contient plusieurs sous-transitions.

Motivation: **davantage de flexibilité tout en conservant les propriétés d'une CMTC**.

Somme de  $k$  exponentielles i.i.d.: **Erlang**. Coefficient de variation  $1/\sqrt{k}$ .

Somme de  $k$  exponentielles de taux  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ : **hypoexponentielle**( $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ).

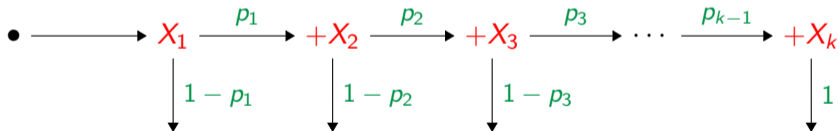
Coefficient de variation  $< 1$ . Idée: décompose une durée de transition en une somme de durées plus courtes, indépendantes.



## Loi à phases exponentielles.

$X = X_1 + \dots + X_R$  où  $X_1, \dots, X_k$  et  $R$  sont des v.a. indépendantes,  $X_j \sim \text{exponentielle}(\gamma_j)$ ,

$$\mathbb{P}[R = r] = \begin{cases} 1 - p_1 & \text{if } r = 1, \\ p_1 \cdots p_{r-1}(1 - p_r) & \text{if } 2 \leq r \leq k - 1, \\ p_1 \cdots p_{k-1} & \text{if } r = k. \end{cases}$$



**Théorème.** Si  $F$  est une fonction de répartition continue sur  $[0, \infty)$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une loi à phases exponentielles de cdf  $H$  telle que  $|H(t) - F(t)| < \epsilon$  pour tout  $t > 0$ .



## “Tau-leaping” pour les CMTC

Dans les systèmes où il y a des millions de molécules ou d'individus, simuler les transitions une par une peut devenir beaucoup trop long! On peut accélérer les choses considérablement en discrétisant le temps aussi pour la CMTC, tel que mis de l'avant par Gillespie (2001) pour les réactions chimiques. Très populaire en chimie et biologie.

## “Tau-leaping” pour les CMTC

Dans les systèmes où il y a des millions de molécules ou d'individus, simuler les transitions une par une peut devenir beaucoup trop long! On peut accélérer les choses considérablement en discrétisant le temps aussi pour la CMTC, tel que mis de l'avant par Gillespie (2001) pour les réactions chimiques. Très populaire en chimie et biologie.

On divise le temps en intervalles de longueur  $\tau$ . On considère une CMTC dont l'état est un vecteur  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}$  qui représente le nombre d'individus ou de molécules ou d'objets dans chaque catégorie. On suppose que chaque transition est comme une “réaction” d'un type  $k$ , qui ajoute un vecteur  $\Delta_k$  à l'état  $\mathbf{x}$ . En supposant (approximation) que le taux d'occurrence de cette réaction est constant, égal à  $r_k = r_k(\mathbf{x})$ , durant l'intervalle de longueur  $\tau$ , le nombre  $D_k$  de réalisations de cette réaction durant l'intervalle suit une loi de Poisson de taux  $r_k\tau$ .

Le  $\tau$ -leaping consiste à générer ces  $D_k$  indépendamment selon la loi de Poisson et à ajouter  $\mathbf{D} = \sum_{k=1}^K D_k \Delta_k$  à l'état courant  $\mathbf{X}$ , à chaque étape de longueur  $\tau$ .

## “Tau-leaping” pour les CMTC

Dans les systèmes où il y a des millions de molécules ou d'individus, simuler les transitions une par une peut devenir beaucoup trop long! On peut accélérer les choses considérablement en discrétisant le temps aussi pour la CMTC, tel que mis de l'avant par Gillespie (2001) pour les réactions chimiques. Très populaire en chimie et biologie.

On divise le temps en intervalles de longueur  $\tau$ . On considère une CMTC dont l'état est un vecteur  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}$  qui représente le nombre d'individus ou de molécules ou d'objets dans chaque catégorie. On suppose que chaque transition est comme une “réaction” d'un type  $k$ , qui ajoute un vecteur  $\Delta_k$  à l'état  $\mathbf{x}$ . En supposant (approximation) que le taux d'occurrence de cette réaction est constant, égal à  $r_k = r_k(\mathbf{x})$ , durant l'intervalle de longueur  $\tau$ , le nombre  $D_k$  de réalisations de cette réaction durant l'intervalle suit une loi de Poisson de taux  $r_k\tau$ .

Le  $\tau$ -leaping consiste à générer ces  $D_k$  indépendamment selon la loi de Poisson et à ajouter  $\mathbf{D} = \sum_{k=1}^K D_k \Delta_k$  à l'état courant  $\mathbf{X}$ , à chaque étape de longueur  $\tau$ .

Problèmes potentiels: des coordonnées de  $\mathbf{X}$  peuvent devenir négatives! Il y a des méthodes adaptatives pour traiter cela. Dans tous les cas, il y a des erreurs d'approximation!

## Équations différentielles stochastiques

Quand les  $D_k$  suivent des lois de Poisson avec des moyennes assez grandes, disons 20 ou plus par exemple, on peut **approximer ces lois de Poisson par des lois normales**, plus faciles à simuler, et laisser les  $X_i(t)$  prendre des valeurs réelles.

On peut supposer par exemple que les  $D_k$  sont indépendants et suivent une loi normale avec la même moyenne et variance que la loi de Poisson.

## Équations différentielles stochastiques

Quand les  $D_k$  suivent des lois de Poisson avec des moyennes assez grandes, disons 20 ou plus par exemple, on peut [approximer ces lois de Poisson par des lois normales](#), plus faciles à simuler, et laisser les  $X_i(t)$  prendre des valeurs réelles.

On peut supposer par exemple que les  $D_k$  sont indépendants et suivent une loi normale avec la même moyenne et variance que la loi de Poisson.

On peut aussi généraliser le modèle et supposer que le vecteur  $\mathbf{D}$  suit une loi multinormale, avec une moyenne (vecteur) et une matrice de covariance qui dépendent de l'état courant  $\mathbf{X}(t)$  de la chaîne. Cela équivaut à simuler une approximation discrète (méthode d'Euler) d'une [équation différentielle stochastique](#), qui est en gros une version du modèle de dynamique des systèmes auquel on a ajouté un bruit stochastique basé sur un [mouvement Brownien](#), un type de processus dont les accroissements sont indépendants et suivent une loi multinormale. (Observé pour les grains de pollen par Brown en 1827, puis étudié par Einstein en 1905 pour décrire le mouvement de particules dans l'espace.)

Ce genre d'approche est très populaire en physique, en chimie, en mathématiques financières, et dans de nombreux autres domaines.