DIRO
IFT 6150

TRAITEMENT D'IMAGES
SEGMENTATION D'IMAGES

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

SEGMENTATION D'IMAGES
SOMMAIRE

SEGMENTATION D'IMAGES
INTRODUCTION (1)

But de la Segmentation

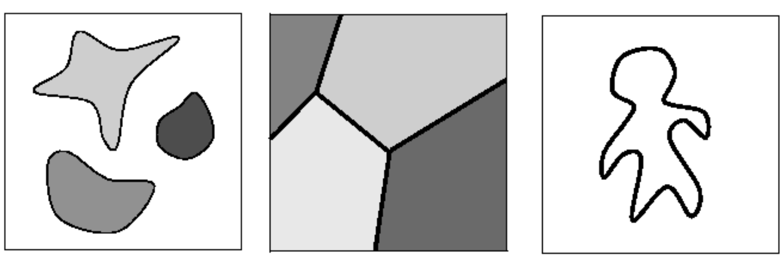
▶ Partitioner une image en régions homogènes (au sens des NdG, du mouvement, de la texture, etc.)

Exemples

NdG | Mouvement | Texture

Méthodes Possibles

- Détection des bords des différentes régions
  - ▶ segmentation des contours (ex : Snake)
- Détection directe des régions sans les contours
  - ▶ segmentation des régions (ex : Markov)



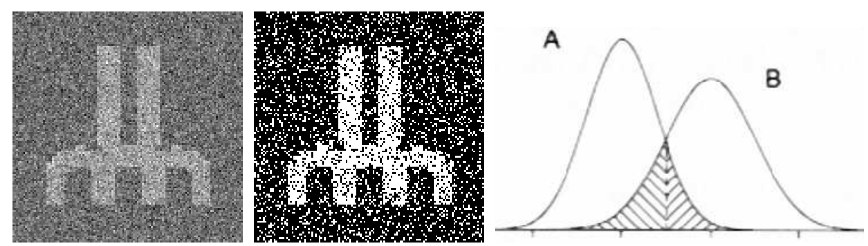
SEGMENTATION D'IMAGES
INTRODUCTION (2)

Conditions de toute bonne segmentation

- La segmentation doit être complète (i.e., chaque pixel doit être dans une classe)
- Les pixels appartenant à la même région doivent être connectés
- Les régions doivent être disjointes

Rappel

Seuillage MV

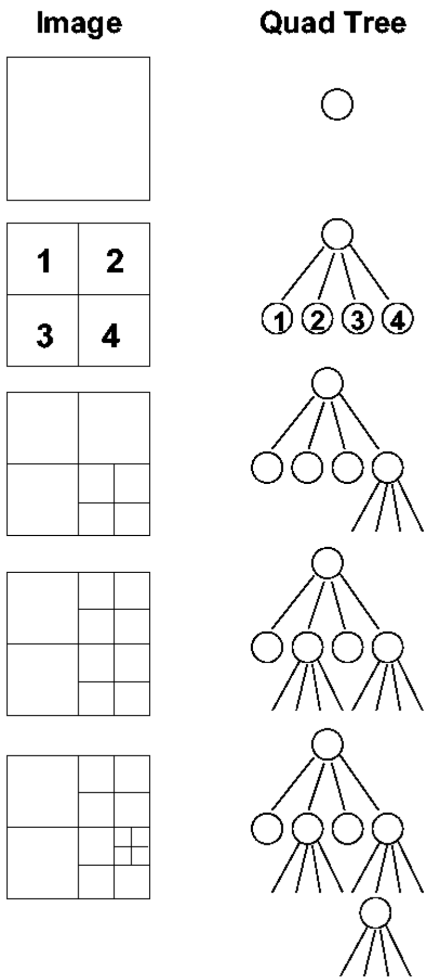


Amélioration possible grâce aux techniques utilisant la Morphologie Mathématique

▶ Cf. Chap. Binarisation & Morphologie Mathématique

SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR APPROCHE SPLIT & MERGE (1)

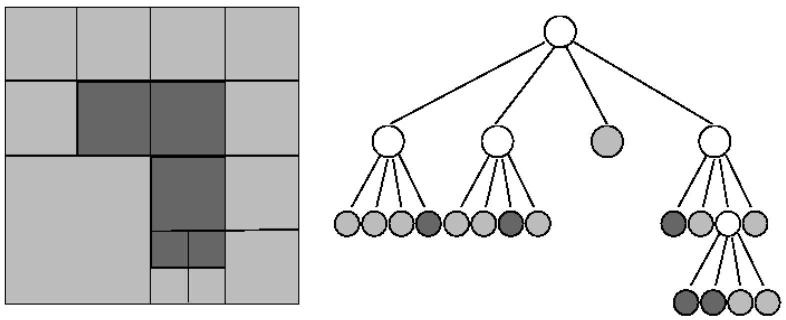
Représentation de l'image par un Quad-arbre



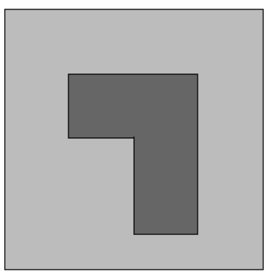
SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR APPROCHE SPLIT & MERGE (2)

Algorithme

- **Split**
  Divise l'image en régions en utilisant une représentation de l'image en Quad-arbre



- **Merge**
  Rassemble les feuilles du Quad-arbre qui sont voisines et similaire (au sens des NdG, textures, etc.)



SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR APPROCHE MARKOVIENNE (1)

Rappel sur les Probabilités et les Variables Aléatoires

Notons l'événement certain par $\mathbf{I}$. Considérant deux événements A et B, $A \cup B$, note l'évenement où tous les deux se produisent. A et B sont mutuellement exclusifs s'ils ne peuvent se produire en même temps ($A \cap B = \varnothing$).

Probabilité

La probabilité d'un événement A est le nombre $P(A)$ satisfaisant les axiomes suivantes

(i) $P(A)$ est positif : $0 \leq P(A) \leq 1$
(ii) La proba. de l'évenement certain est 1 : $P(\mathbf{I}) = 1$
(iii) Si A et B sont mutuellement exclusif, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de valeur (ex : l'ensemble R). Une variable aléatoire X associe aux événements aléatoires possibles une valeur x dans $\mathcal{X}$. on appelle

---

Fonction de Probabilité Cumulative

La fonction définie par,

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Dans le cas multivarié, $(X = (X_1, \ldots, X_n) \in R^n)$, on définit $F_X(x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x)$. La distribution cumulative empirique d'un échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\widehat{F}_X(x) = \frac{\# x_i \leq x}{n}$$

SEGMENTATION D'IMAGES
RAPPEL DE PROBABILITÉ (2)

Densité

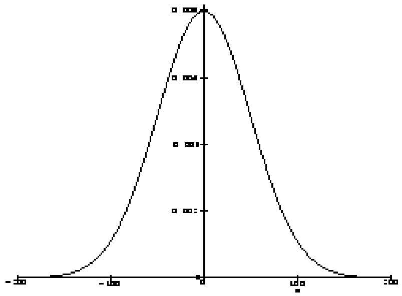
La dérivée de la fonction de Probabilité cumulative $F_X(x)$,

$$P_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

est la fonction de densité de X. Dans le cas ou $n = 2$ $(X = (X_1, X_2))$, on a $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_X(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$

Par abus de notation, $P_X(x)$ fait référence à une fonction de probabilité (qd X est discrète) ou à la densité de la v.a. X (qd X est continue).

Exemple : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ $\qquad P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$



Espérance Mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est l'intégrale,

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x) dx$$

où $P_X(x)$ est la fonction de densité de X

SEGMENTATION D'IMAGES
RAPPEL DE PROBABILITÉ (3)

Variance

La variance d'une variable aléatoire est,

$$\sigma^2 = E\{(X-\mu_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 P_X(x)dx$$

où $P_X(x)$ est la fonction de densité de X

Probabilité jointe

$$P_{X,Y}(x,y)$$

Pour le couple de variable aléatoire $Z=(X,Y)$ qui prend ses valeurs dans le produit cartésien de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

Probabilité conditionnelle

$$P_{X|Y}(x \mid y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

définit seulement quand $P_Y(y) \neq 0$

Probabilité totale

$$P_Y(y) = \int_x P_{Y|X}(y \mid x) P_X(x)\, dx$$

Indépendance

- si X et Y sont indépendants ssi $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$

SEGMENTATION D'IMAGES
RAPPEL DE PROBABILITÉ (4)

Théorème de Bayes

$$P_{X|Y}(x \mid y) = \frac{P_{Y|X}(y \mid x)P_X(x)}{P_Y(y)}$$

$P_{X|Y}(x \mid y)$ est appelé la probabilité *a posteriori*. $P_X(x)$ est la probabilité *a priori*. $P_{Y|X}(y \mid x)$ est appelé la vraisemblance

Chaînes de Markov

Soit $\{X_i\} = X_1, X_2, \ldots, X_n$, une séquence de variable aléatoire avec les valeurs possibles $a_1, \ldots, a_n$. Si la propriété markovienne est satisfaite,

$$\begin{aligned} P(X_n = a_{i_n} \mid X_{n-1} = a_{i_{n-1}}, \ldots, X_1 = a_{i_1}) \\ = P(X_n = a_{i_n} \mid X_{n-1} = a_{i_{n-1}}) \end{aligned}$$

Alors $\{X_i\}$ est une chaîne de Markov

SEGMENTATION D'IMAGES
CHAMPS MARKOVIEN (1)

L'image : Vecteur de v.a.

Soit une image définie sur une maille dont les sommets constituent un ensemble S de *sites* s

$$S = \{s = (i, j);\ 1 \leq i, j \leq N\}$$

A chaque site s (ou pixel) est associé une v.a., Y_s, dont les valeurs $\in \Lambda_{obs} = \{0, \ldots, 255\}$ (représentant les NdG)

L'image ($N \times N$) est donc représentée par un vecteur de v.a. $Y = \{Y_s, s \in S\}$ dont le vecteur $y = \{y_s, s \in S\}$, est une configuration (ou réalisation) $\in$ de l'espace $\Lambda_{obs}^{N\times N}$

$P_Y(y)$ est la probabilité de la configuration y, c'est la probabilité $P_Y(y_s, s{\in}S)$. $P_{Y_s}(ys)$ est la loi marginale de Y_s

Système de Voisinage

Un système de voisinage $\nu = (\nu_s, s \in S)$ est formé de parties ν_s de S, vérifiant les propriétés suivantes

$$s \notin \nu_s$$
$$s \in \nu_t \Leftrightarrow t \in \nu_s$$

L'ensemble ν_s est appelé le voisinage de s. t est dit voisin de s si $t \in \nu_s$

Champ Markovien

Un champs aléatoire X est dit *champ Markovien* associé à ce système de voisinages ssi

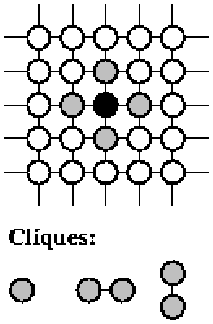
$$\begin{aligned} P_X(x) &> 0 \\ P_{X_s|X_r}(x_s \mid x_r, r \neq s) &= P_{X_s|X_r}(x_s \mid x_r, r \in \nu_s) \end{aligned}$$

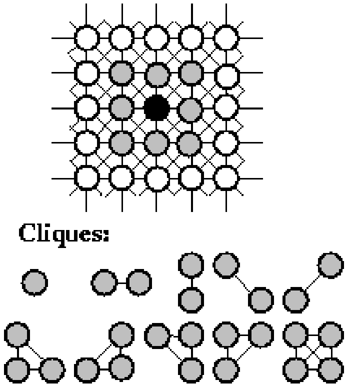
SEGMENTATION D'IMAGES
CHAMPS MARKOVIEN (2)

Clique

Un sous ensemble c de S est appelé une *clique* relative au système de voisinages ν si

- c est un singleton
- 2 pixels quelconques de c sont voisins (au sens de ν)





- L'ordre d'une clique correspond au nombre de ses éléments

Mesure de Gibbs et champs Markovien

Le théorème de Hammersley-Clifford démontre que X est un champ Markovien (associé à ν) ssi $P_X(x)$ est une mesure de Gibbs définie par

$$\boxed{\forall x \in \Omega, \quad P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp\left(-U(x)\right)}$$

où U est une fonction appelée énergie et Ω est l'ensemble des configurations possible pour X

SEGMENTATION D'IMAGES
CHAMPS MARKOVIEN (3)

$$\boxed{\forall x \in \Omega, \quad P_X(x) = \frac{1}{Z}\,\text{exp}\,(-U(x))}$$

où U est une fonction appelée énergie

$$\boxed{U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x)}$$

- Les fonctions V_c sont appelées des fonctions potentiels, et ne dépendent que des éléments de x qui appartiennent à la clique c (C est l'ensemble des cliques)
- On notera souvent $c = <s,t>$ une clique d'ordre 2

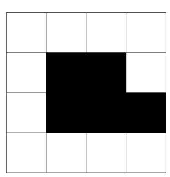
Z est la *fonction de partition* c'est en fait la constante de normalisation de la probabilité $P_X(x)$

$$Z = \sum_{x \in \Omega} \text{exp}\,(-U(x))$$

Exemple

$$U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x) \qquad V_c(x) = [1 - \delta(x_s, x_t)]$$

Voisinage du $1er$ ordre, clique binaire



$U(x) = 18$

SEGMENTATION D'IMAGES
APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (1)

L'image segmentée : Vecteur de v.a.

A chaque site s (ou pixel) est aussi associé une v.a. X_s dont les valeurs $\in \Omega_{classe} = \{c_0, \ldots, c_{q-1}\}$, représentant les q classes ou zones homogènes (en NdG) de l'image

L'image ($N \times N$) est donc représentée par un couple de vecteurs de v.a. $Z = (X, Y)$

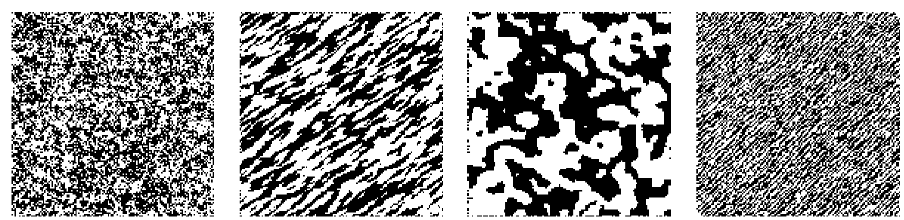
$P_X(x)$: Distribution Markovienne

On va supposer que X est un champ Markovien

$$\boxed{P_X(x) = \frac{1}{Z}\,\text{exp}\,(-\sum_{c \in C} V_c(x))}$$

Exemple

Pour $q = 2$ classes, et $V_c(x) = \beta_{s,t}\big(1 - \delta(x_s, x_t)\big)$



(a) (b) (c) (d)

pour $\beta_{s,t} = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ associé respectivement à la clique horizontale, verticale, diagonale droite & diagonale gauche

SEGMENTATION D'IMAGES
APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (2)

L'approche Bayesienne-Markovienne essaie de maximiser la probabilité conditionnelle (*a posteriori*) suivante

$$P_{X|Y}(x \mid y) = \frac{P_{Y|X}(y \mid x)\; P_X(x)}{P_Y(y)}$$

$P_Y(y)$ est constant car la réalisation du champ des observations (i.e., l'image) est connue, donc

$$P_{X|Y}(x \mid y) \propto P_{Y|X}(y \mid x)\; P_X(x)$$

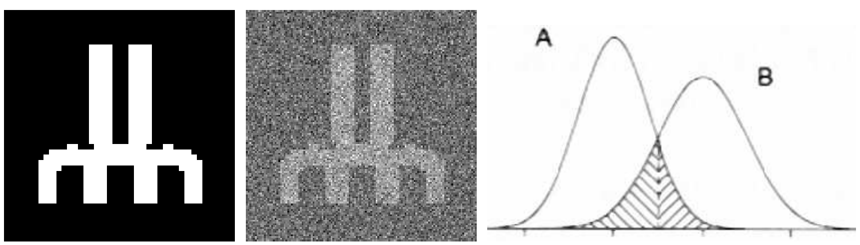
- $P_X(x)$: distribution Markovienne

On a supposer que X est un champ Markovien

$$P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp\big(-\sum_{c \in C} V_c(x)\big)$$

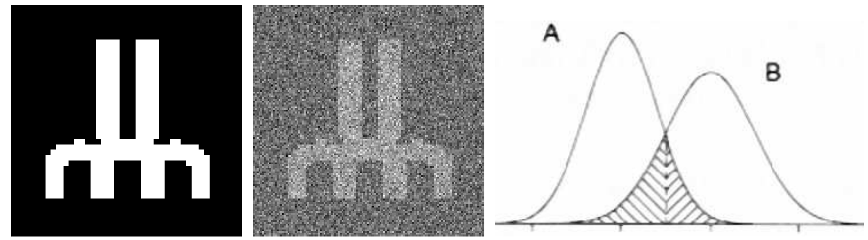
- $P_{Y|X}(y \mid x)$? : Modèle de dégradation de l'image

Exemple : segmentation au sens des NdG



Fond : classe 0 (ou classe c_0)
U et M : classe 1 (ou classe c_1)

SEGMENTATION D'IMAGES
APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (3)



Supposons $P_{Y_s|X_s}(y_s \,|\, c_0)$ et $P_{Y_s|X_s}(y_s \,|\, c_1)$ soit connus

Par exemple

$$\begin{aligned} P_{Y_s|X_s}(y_s \mid c_0) &= \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0) \\ P_{Y_s|X_s}(y_s \mid c_1) &= \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1) \end{aligned}$$

Si on suppose que

$$P_{Y|X}(y \mid x) = \prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s \mid x_s)$$

cad que le bruit sur chacune des classes est blanc, on obtient

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(x \mid y) &\propto \Big(\prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s \mid x_s)\Big)\Big(\frac{1}{Z}\exp\big(-\sum_{c \in C} V_c(x)\big)\Big) \\ &\propto \Bigg(\exp\Big[-\big(-\ln \prod_{s \in S} P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s)\big)\Big]\Bigg)\Big(\frac{1}{Z}\exp\big(-\sum_{c \in C} V_c(x)\big)\Big) \\ &\propto \Big(\frac{1}{Z}\exp\Big[-\Big(-\ln \prod_{s \in S} P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s) + \sum_{c \in C} V_c(x)\Big)\Big] \end{aligned}$$

SEGMENTATION D'IMAGES

APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (4)

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{MAP} &= \arg\max_x \{P_{X|Y}(x \mid y)\} \\
&= \arg\max_x \Big(\frac{1}{Z}\exp\Big[-\Big(-\ln\prod_{s\in S} P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s) + \sum_{c\in C} V_c(x)\Big)\Big]\\
&= \arg\max_x \Big(\frac{1}{Z}\exp\Big[-\Big(\sum_{s\in S}\underbrace{\big(-\ln P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s)\big)}_{V(x_s,y_s)} + \sum_{c\in C} V_c(x)\Big)\Big]\\
&= \arg\min_x \Big\{\sum_{s\in S} V(x_s,y_s) + \sum_{c\in C} V_c(x)\Big\}
\end{aligned}
$$

En prenant $V_c(x) = \beta_c[1-\delta(x_s,x_t)]$, en se souvenant que $P_{Y_s|X_s}(y_s \mid x_s) = \mathcal{N}(\mu_s,\sigma_s)$, on obtient pour des cliques d'ordre 2

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{MAP} &= \arg\min_x \Big\{\sum_{s\in S} V(x_s,y_s) + \sum_{c\in C} V_c(x)\Big\}\\
&= \arg\min_x \Big\{\underbrace{\sum_{s\in S}\Big[\ln(\sqrt{2\pi}\sigma_{x_s}) + \frac{(y_s-\mu_{x_s})^2}{2\sigma^2_{x_s}}\Big]}_{V(x,y)} + \underbrace{\sum_{c\in C}\beta_c[1-\delta(x_s,x_t)]}_{U(x)}\Big\}
\end{aligned}
$$

- $V(x,y)$: Terme d'attache aux données : Modélise le lien entre les étiquettes (i.e., les classes) et les observations (i.e., les NdG)
- $U(x)$: Terme d'énergie a priori : caractérise et modélise les propriétés du champ d'étiquette que l'on recherche (on recherche des zones de régions homogène ▶ $\beta_c = 1\ \forall c$)

SEGMENTATION D'IMAGES

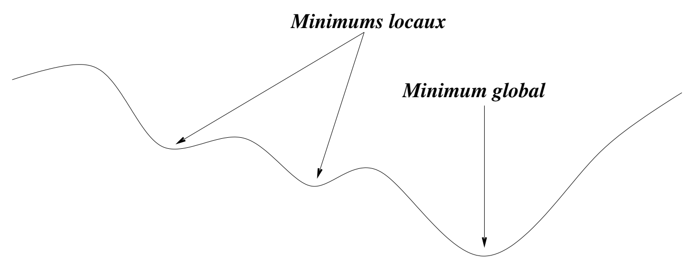
APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (5)

Trouver $\hat{x}_{MAP}$ est ensuite un problème classique d'optimisation (i.e., de minimisation de fonction d'énergie)

Notes

$V(x,y)+U(x)$: Fonction de 256×256 variables, chaque variable prend q valeurs discrètes correspondant aux q classes

2 types d'algorithmes



- **Algorithme déterministe** : Requiert une solution pas trop loin de la solution optimale (rapide mais sous optimale) (Exemple : Algorithme ICM)
- **Algorithme stochastique** : Insensible à l'initialisation (optimale mais lent) (Exemple : Algorithme du Recuit Simulé)

SEGMENTATION D'IMAGES

APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (6)

Algorithme ICM

| $\widehat{x}^{[0]}$ Configuration initiale

- Initialisation : on choisit une configuration initiale $\widehat{x}^{[0]}$, aussi proche que possible de la configuration optimale. On peut prendre par exemple une segmentation au sens du MV :

$$\widehat{x}_s^{[0]} = \arg\max_{x_s} \{ P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s) \} \qquad (\forall s \in S)$$

- Calcul de $\widehat{x}^{[k+1]}$ à partir de $\widehat{x}^{[k]}$:
  $x \leftarrow \widehat{x}^{[k]}$
  1. On balaie l'ensemble des sites s (selon une stratégie de visite de sites) et
     - En chaque site s, on calcule $P_{X_s/X_{\nu_s},Y_s}(x_s/\eta_s, y_s)$ pour chacune des classes possibles :

$$P_{X_s/X_{\nu_s},Y_s}(x_s/\eta_s, y_s) = \frac{1}{Z_s} \exp\Big(-\Big(\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x_s) + V(x_s, y_s) \Big) \Big) \; (\forall x_s \in \Omega)$$

     - On sélectionne la classe x_s qui correspond à la probabilité maximale (i.e., le mode)

$$\widehat{x}_s = \arg\max_{x_s \in \Omega} \{ P_{X_s/X_{\nu_s},Y_s}(x_s/\eta_s, y_s) \}$$

     $\widehat{x}^{[k+1]} \leftarrow x$
  2. Retour en 1. jusqu'à la réalisation d'un critère d'arrêt. Généralement

$$\text{si} \quad \widehat{x}_s^{[k+1]} \not\approx \widehat{x}_s^{[k]} \quad k \leftarrow k+1 \quad \text{et retour en 1.}$$

SEGMENTATION D'IMAGES

APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (7)

Algorithme RECUIT SIMULÉ (RS)

T_0	Température initiale
T_{min}	Température finale
$\widehat{x}_0$	Configuration initiale aléatoire
$F(.)$	Fonction de décroissance de la température

- $T \leftarrow T_0$
- $x^{[0]} \leftarrow \widehat{x}_0$

- Calcul de $\widehat{x}^{[k+1]}$ à partir de $\widehat{x}^{[k]}$:
  $x \leftarrow \widehat{x}^{[k]}$
  1. On balaie l'ensemble des sites s (peu importe l'ordre) et
     - En chaque site s, on calcule $P_{X_s/X_{\nu_s},Y_s}(x_s/\eta_s, y_s)$ pour chacune des classes possibles :

$$P_{X_s/X_{\nu_s},Y_s}(x_s/\eta_s, y_s) = \frac{1}{Z_s} \exp\Big\{ -\frac{1}{T_k} \Big(\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x_s) + V(x_s, y_s) \Big) \Big\} \; (\forall x_s \in \Omega)$$

     - On tire l'une des classes x_s selon les probabilités d'appartenance $P_{X_s/X_{\nu_s},Y_s}$ définies précédemment.
       $\widehat{x}^{[k+1]} \leftarrow x$
  2. Faire décroître la température $T_{k+1} = F(T_k)$ (ex : $T_{k+1} = 0.99^k T_0$) et incrémenter l'itération $k = k + 1$
  3. Retour en 1. jusqu'à la satisfaction d'un critère d'arrêt. Généralement

$$\text{si} \quad T_k \geq T_{min} \quad \text{retour en 1.}$$

SEGMENTATION D'IMAGES
APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (8)

Segmentation supervisée 2 classes

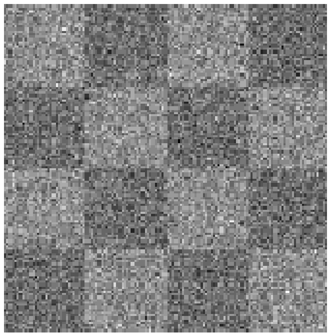


Image bruitée

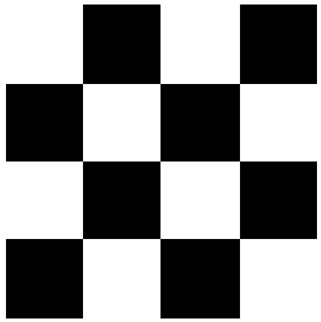
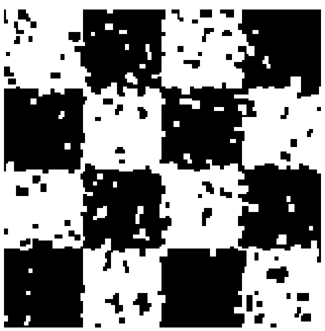
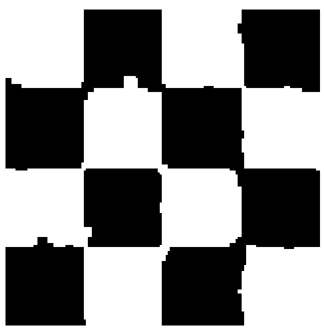


Image segmentée idéale



segmentation par ICM



Segmentation par RS

SEGMENTATION D'IMAGES
APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (9)

Segmentation supervisée 4 classes

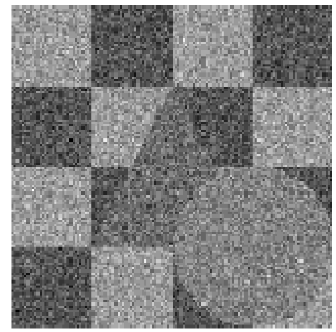


Image bruitée

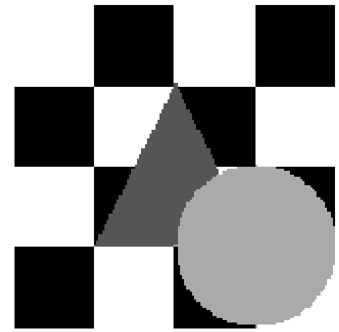
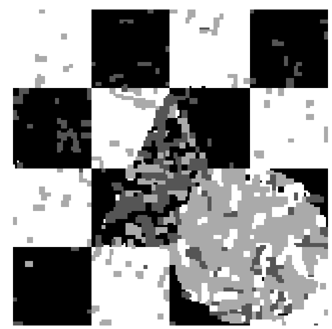
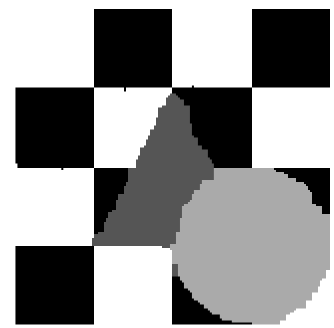


Image segmentée idéale



segmentation par ICM

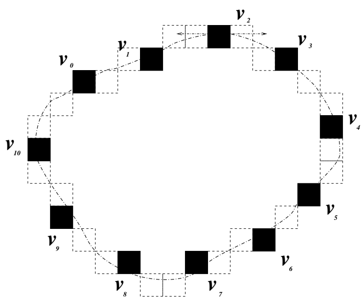


Segmentation par RS

SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR SNAKE (1)

Le modèle de contour actif (ou *snake*) présente le problème de la segmentation (des bords d'une région) directement comme un problème de minimisation de fonction d'énergie

Un *snake* V est défini par n noeuds, $V = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ (donnant les coordonnées des points d'un contour), liés par une B-spline cubique



Soit une image y, la fonction d'énergie que l'on doit minimiser est

$$\boxed{E_{\text{snake}}(V) = \sum_{i=1}^{n} \left(E_{\text{int}}(v_i) + \beta E_{\text{ext}}(v_i, y) \right)}$$

- E_{int} : Énergie interne du snake
  ▶ Permet d'exprimer la connaissance *a priori* sur la forme du contour que l'on doit détecter
- E_{ext} : Énergie externe du snake
  ▶ permet de *pousser* le snake près des caractéristiques désirées de l'image (bords, régions, texture, etc.)

SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR SNAKE (2)

Énergie interne

Afin d'obtenir un contour avec des courbures douces, une solution consiste à mesurer la courbure du snake à chaque noeud et utiliser la mesure suivante

$$\boxed{E_{\text{int}}(v_i) = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{v_{i-1}v_i} \cdot \overrightarrow{v_i v_{i+1}}}{\|\overrightarrow{v_{i-1}v_i}\| \cdot \|\overrightarrow{v_i v_{i+1}}\|} \right)}$$

qui est l'angle entre les 2 vecteurs $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ et $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$. $\|\overrightarrow{v}\|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{v}$ et " $\cdot$ " représente le produit scalaire entre deux vecteurs

Énergie externe

Les gradient de l'image sont exploités par la mesure suivante

$$\boxed{E_{\text{ext}}(v_i, y) = -\|\nabla y(v_i)\|}$$

Le contour optimal V_{opt}, peut être obtenu en trouvant celui qui minimise l'énergie $E_{\text{snake}}(V)$, i.e

$$V_{\text{opt}} = \arg\min_{\{v_i\}} E_{\text{snake}}(V)$$

où $\{v_i\}$ désigne l'ensemble des noeuds du snake

SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR SNAKE (3)

Optimisation par Programmation Dynamique (DP)

▶ Procédure particulièrement bien adaptée pour ce problème car

- La solution optimal contient des solutions optimale à des sous-problèmes
- Le problème d'optimisation revisite très souvent les même sous-problèmes

La fonction d'énergie peut s'écrire

$$\begin{aligned} E_{\text{snake}}(v_1, v_2, \ldots, v_n) &= E_1(v_1, v_2, v_3) + E_2(v_2, v_3, v_4) + \ldots \\ \ldots \quad & \quad + E_{n-2}(v_{n-2}, v_{n-1}, v_n) \end{aligned}$$

où $E_{i-1}(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) = E_{\text{int}}(v_i) + \beta E_{\text{ext}}(v_i, y)$

Dans la DP, chaque v_i peut prendre seulement m valeurs possibles, correspondant généralement à des positions voisines dans un voisinage

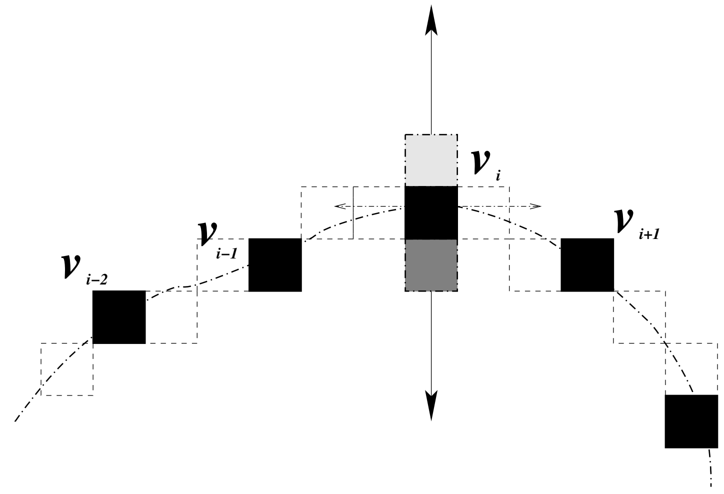
On peut efficacement définir la valeur de la solution optimal récursivement en terme de solutions optimales aux sous-problèmes d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} s_1(v_2, v_3) &= \min_{v_1} \{E_1(v_1, v_2, v_3)\} \\ s_2(v_3, v_4) &= \min_{v_2} \{s_1(v_2, v_3) + E_2(v_2, v_3, v_4)\} \\ & \ldots \\ s_{n-2}(v_{n-1}, v_n) &= \min_{v_{n-2}} \{s_{n-3}(v_{n-2}, v_{n-1}) + E_{n-2}(v_{n-2}, v_{n-1}, v_n)\} \end{aligned}$$

$$\boxed{V_{\text{opt}} = \arg\min_{\{v_i\}} E_{\text{snake}}(V) = \min_{v_{n-1}, v_n} s_{n-2}(v_{n-1}, v_n)}$$

SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR SNAKE (4)

Optimisation par Gradient



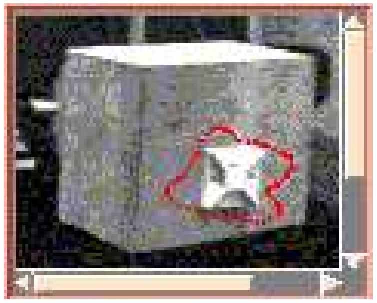
Jusqu'à convergence

Pour chaque noeud du snake

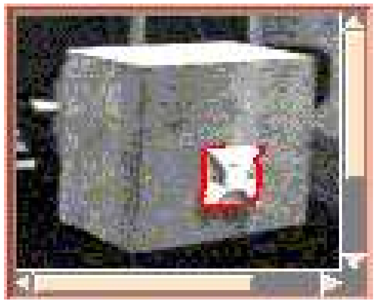
- On déplace chaque noeud suivant la position de la normale intérieur et extérieur au contour
- On prend le noeud (i.e., sa coordonnée) qui minimise l'énergie du snake

SEGMENTATION D'IMAGES
SEGMENTATION PAR SNAKE (4)

Exemples



Initialisation



Convergence

Initialisation

Convergence

Animation sur la page web du cours

Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150/
Rubrique : Notes de Cours additionnelles ; Cours animé