DIRO
IFT 6150

TRAITEMENT D'IMAGES

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Max Mignotte

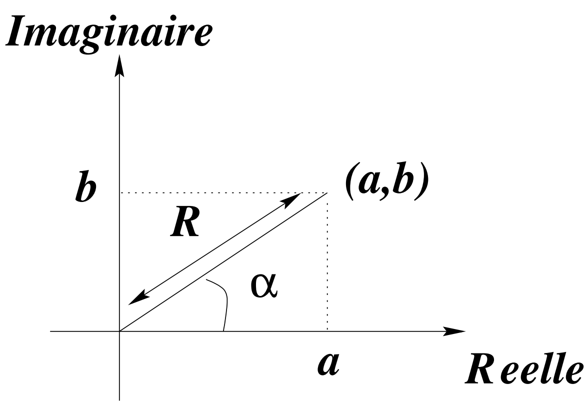
Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

TRANSFORMÉE DE FOURIER

SOMMAIRE

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOMBRES COMPLEXES (RAPPEL)



$$(a,b) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright a + jb \blacktriangleleft\!\blacktriangleright R\cos\alpha + jR\sin\alpha$$

Notation : $\exp(j\alpha) = \cos\alpha + j\sin\alpha, \quad j^2 = -1$

$$a + jb = R\cos\alpha + jR\sin\alpha = R\exp(j\alpha)$$

$$\begin{array}{rcll} R & = & \sqrt{a^2+b^2} & \text{Amplitude} \\ \alpha & = & \arctan(b/a) & \text{Phase} \end{array}$$

Propriétés

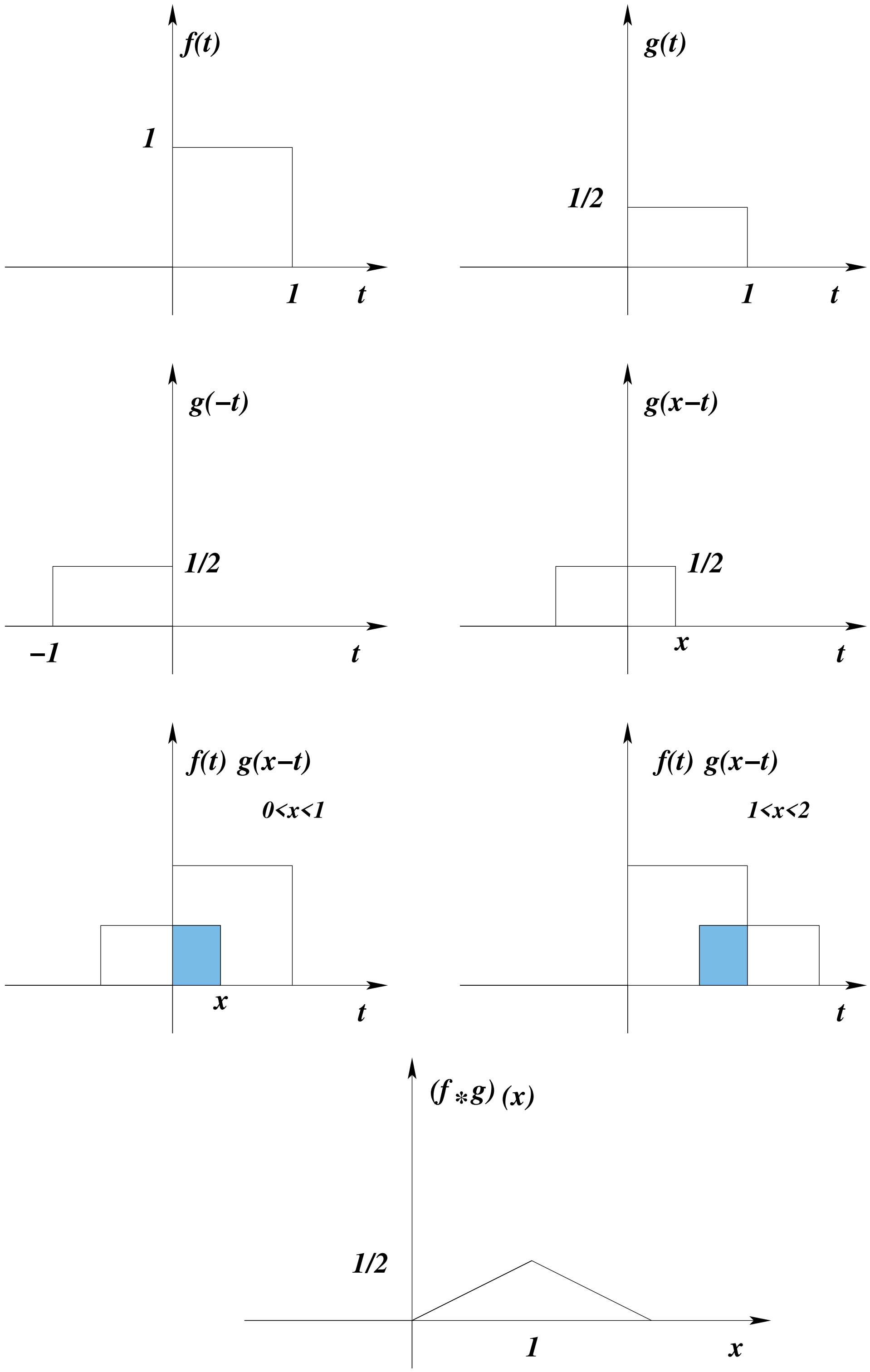
$$\begin{array}{rl} a + jb = R\exp(j\alpha) \quad a - jb = R\exp(-j\alpha) & \text{Conjugué} \\ R_1\exp(j\theta) * R_2\exp(j\alpha) = R_1R_2\exp\big(j(\theta+\alpha)\big) & \text{Multiplication} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\big(R\exp(j\alpha)\big) = jR\exp(j\alpha) & \text{Dérivée} \end{array}$$

Notations Complexes des Fonction sinus et cosinus

$$\begin{array}{rcl} \cos x & = & \dfrac{1}{2}\big(\exp(jx) + \exp(-jx)\big) \\ \sin x & = & \dfrac{-j}{2}\big(\exp(jx) - \exp(-jx)\big) \end{array}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER
CONVOLUTION 1D -FONCTIONS CONTINUES-

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt}$$

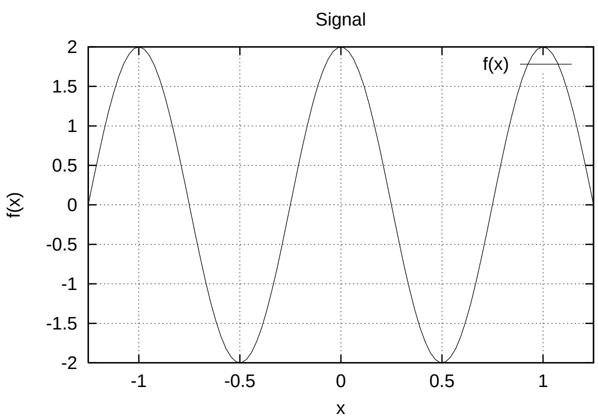


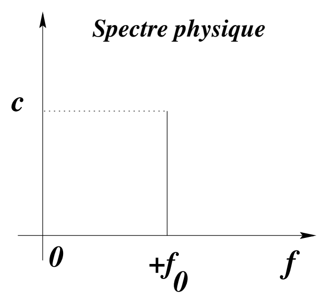
TRANSFORMÉE DE FOURIER
NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (1)

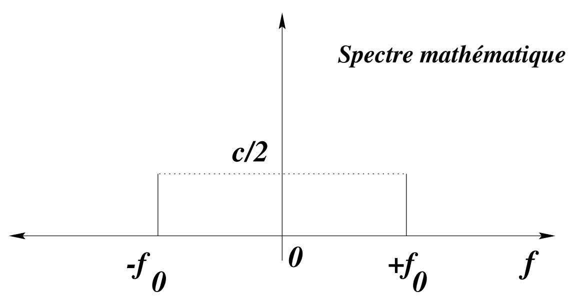
NOTION DE SPECTRE

- Signal sinusoïdal de fréquence f_0 ► $f(x) = c\cos(2\pi f_0 x)$
  (c est l'amplitude du signal et $T = 1/f_0$, sa période)

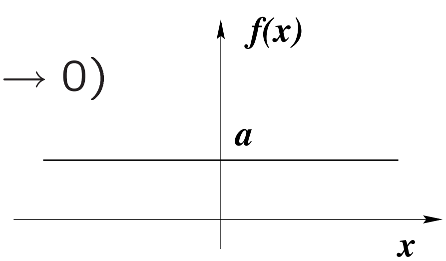
Notation complexe ► $f(x) = \frac{c}{2}\big(\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x)\big)$

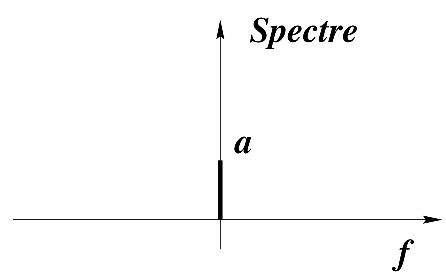




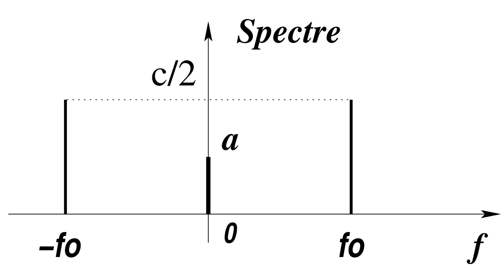


- Si $T \to \infty$, ($f_0 \to 0$)



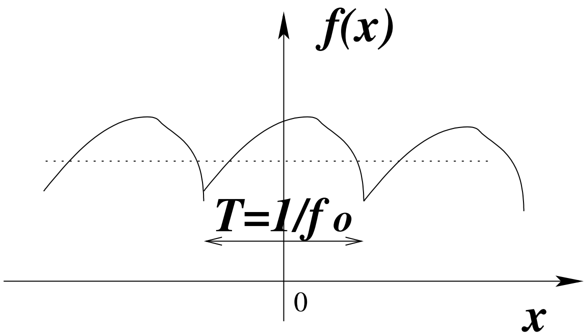


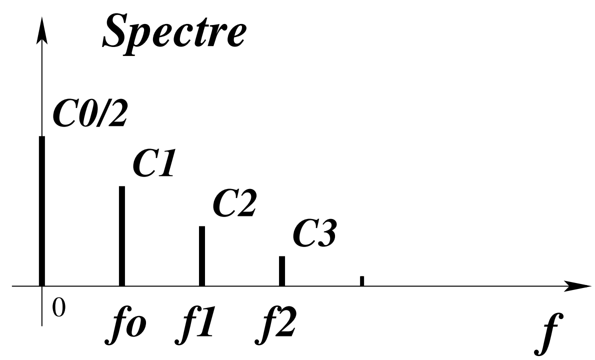
- $f(x) = a + \frac{c}{2}\big(\exp(2\pi j f_0 x) + \exp(-2\pi j f_0 x)\big)$



SÉRIE DE FOURIER

Soit $f(x)$, un signal périodique de période $T = 1/f_0$





$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x) \\
A_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(2\pi n f_0 x)\,dx \quad \text{n>0} \\
B_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(2\pi n f_0 x)\,dx \quad \text{n>0}
\end{aligned}
$$

$$
\Longleftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 x + \theta_n) + C_0/2
$$

où $\quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad$ et $\quad \theta_n = \arctan\left(\frac{B_n}{An}\right)$

Spectre de raies

- $C_0/2$ ◀▶ Niveau moyen du signal
- f_0 ◀▶ Le fondamental
- nf_0 ◀▶ Les harmoniques

TRANSFORMÉE DE FOURIER

NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (3)

Preuve de : $A\sin(kx) + B\cos(kx) = C\sin(kx+\theta)$

$$A\sin(kx) + B\cos(kx) =$$
$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(kx) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(kx)\right) \quad (1)$$

Puisque, $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1$

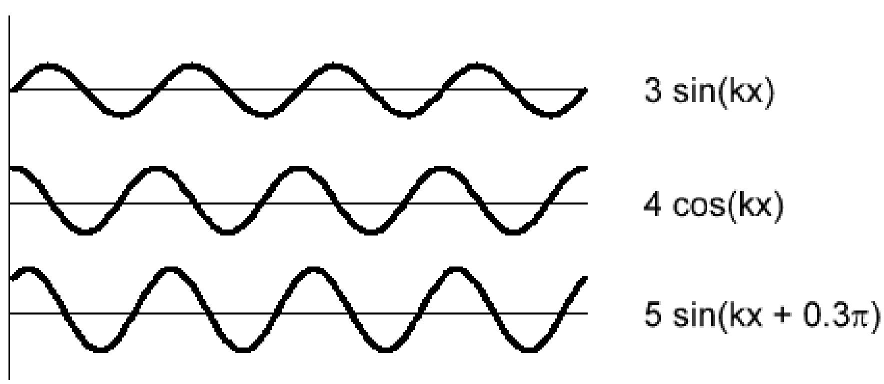
Il existe un θ, tel que, $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\theta$ et $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\theta$

Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{A^2+B^2}\big(\cos\theta\sin(kx) + \sin\theta\cos(kx)\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad C\sin(kx+\theta) \end{aligned}$$

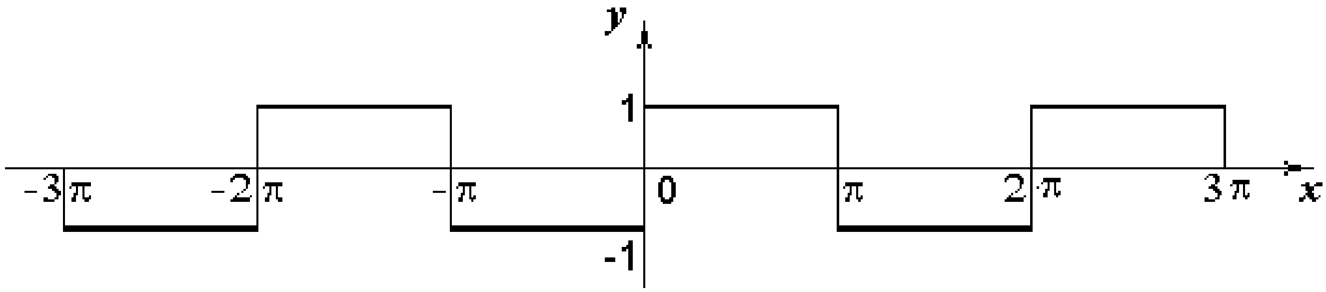
avec $C = \sqrt{A^2+B^2}$ (Amplitude)
et $\theta = \arctan(B/A)$ (Phase)

Exemple :



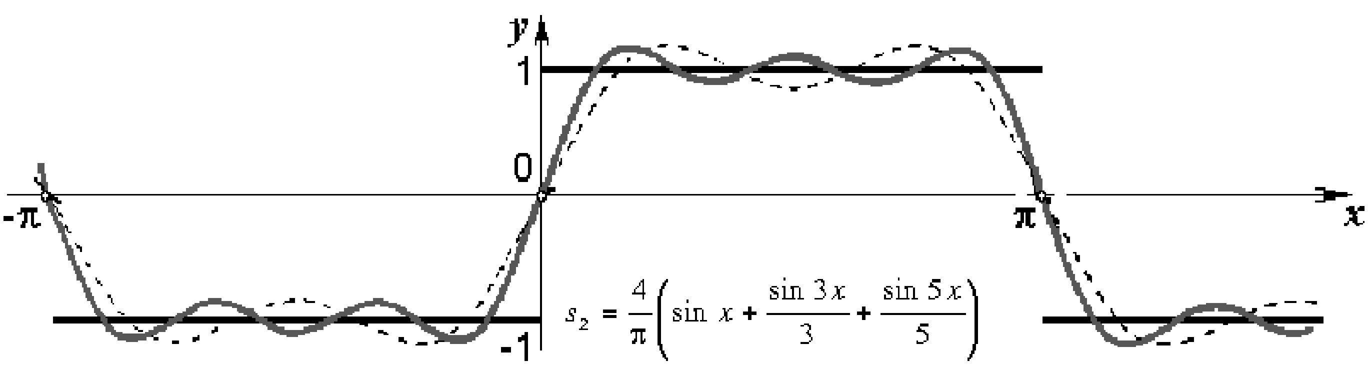
TRANSFORMÉE DE FOURIER
NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (4)

Série de Fourier de l'onde carrée $1D$



$$f(x) \quad = \quad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f_0 x)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \ldots\right)$$



Note :

Signal impair ◀▶ constitué de fonctions sinus
Signal discontinu ◀▶ demande une infinité d'harmoniques pour une bonne reconstruction
Signal à moyenne nulle ◀▶ $A_0 = 0$

TRANSFORMÉE DE FOURIER
NOTION DE SPECTRE & SÉRIE DE FOURIER (5)

FORME COMPLEXE D'UNE SÉRIE DE FOURIER

▶ Plus facile de manipuler des exponentielles complexes que des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 x + \theta_n) + C_0/2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{2} \Big(\exp(2\pi j n f_0 x) \exp(j\theta_n) + \exp(-2\pi j n f_0 x) \exp(-j\theta_n) \Big) \right) + C_0/2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(D_n \exp(2\pi j n f_0 x) + D_n^* \exp(-2\pi j n f_0 x) \Big) + C_0/2 \end{aligned}$$

avec $D_n = \frac{C_n}{2} \exp(j\theta_n) = \frac{1}{2}(A_n - jB_n), \forall n > 0$ et $D_0 = \frac{C_0}{2}$.

D_n ◀▶ Coefficients de Fourier, généralement complexes.
Pour les signaux réels, on montre que ◀▶ $D_n^* = D_{-n}$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} D_n \exp(2\pi j n f_0 x)}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}(A_n - jB_n) \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos(2\pi n f_0 x)\,dx - j\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\sin(2\pi n f_0 x)\,dx \\ &\propto \int_0^T f(x)\exp(-2\pi j n f_0 x)\,dx \end{aligned}$$

Représentation des D_n :
Parties réelles et parties imaginaires ◀▶ (a_n, b_n)
Modules et arguments ◀▶ (c_n, θ_n)

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 1D (1)

Un signal non périodique ▶ $\lim_{T\to\infty}$ signal ▶ spectre continu

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-2\pi j\nu x)\,dx \quad \nu \in IR}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\exp(2\pi j\nu x)\,d\nu}$$

où x coordonnée spatiale
et ν coordonnée spectrale

▶ Continuum de fréquences harmoniques

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \mathcal{R}\big[F(\nu)\big] + j\,\mathcal{I}\big[F(\nu)\big] = R(\nu) + jI(\nu) \\ F(\nu) &= |F(\nu)|\exp[j\Phi(\nu)] \end{aligned}$$

Spectre d'amplitude : $|F(\nu)| = \sqrt{R(\nu)^2 + I(\nu)^2}$

Phase : $\Phi(\nu) = \arctan\left(\frac{I(\nu)}{R(\nu)}\right)$

Principe du filtrage :
▶ Modification de la phase et du spectre d'amplitude d'un signal

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -CAS PARTICULIER- (2)

$a)$ $\boxed{f \text{ est paire} \blacktriangleright F(\nu) \text{ est réel}}$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos 2\pi\nu x - j \sin 2\pi\nu x)\, dx$$

Or les fonctions $x \to f(x) \cos 2\pi\nu x$ et $x \to f(x) \sin 2\pi\nu x$ sont respectivement paire et impaire. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x\, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x\, dx$$

et, $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x\, dx = 0$$

$b)$ $\boxed{f \text{ est impaire} \blacktriangleright F(\nu) \text{ est imaginaire pure}}$

Cette fois, on a, $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x\, dx = 0$$

$c)$ $\boxed{f \text{ est réelle} \blacktriangleright \text{symétrie hermitienne}}$

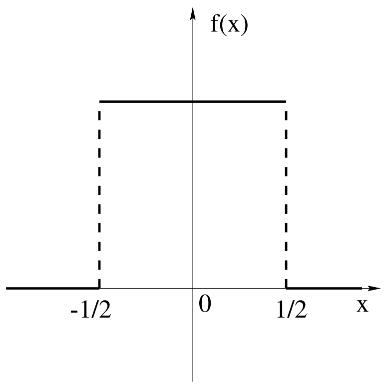
$\mathcal{R}[F(\nu)]$ est paire et $\mathcal{I}[F(\nu)]$ est impaire

$d)$ $\boxed{f \text{ est paire} \blacktriangleright \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}}$

$$f(x) - \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} - > F(\nu)$$
$$F(\nu) - \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} - > f(x)$$

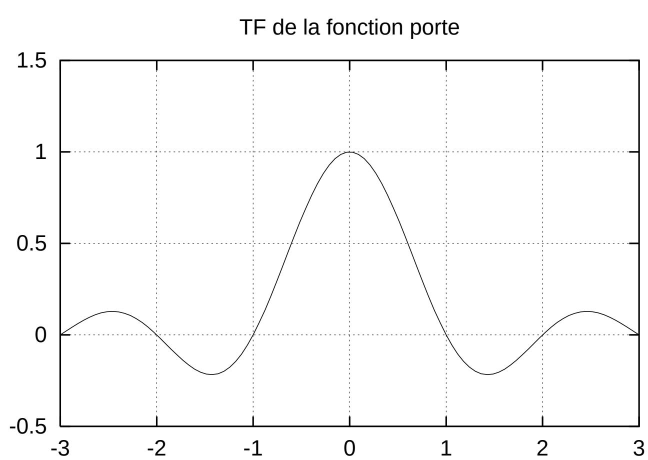
TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (3)

Fonction “Porte”



$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-2\pi j \nu x\right) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \exp\left(-2\pi j \nu x\right) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi j \nu} \Big[\exp\left(-2\pi j \nu x\right)\Big]_{-1/2}^{1/2} \\
&= -\frac{1}{2\pi j \nu} \Big[\exp\left(-\pi j \nu\right) - \exp\left(\pi j \nu\right)\Big] \\
&= -\frac{1}{2\pi j \nu} \Big[\cos(\pi\nu) - j\sin(\pi\nu) - \cos(\pi\nu) - j\sin(\pi\nu)\Big] \\
F(\nu) &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \mathrm{sinc}(\nu)
\end{aligned}$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (4)

Fonction impulsion

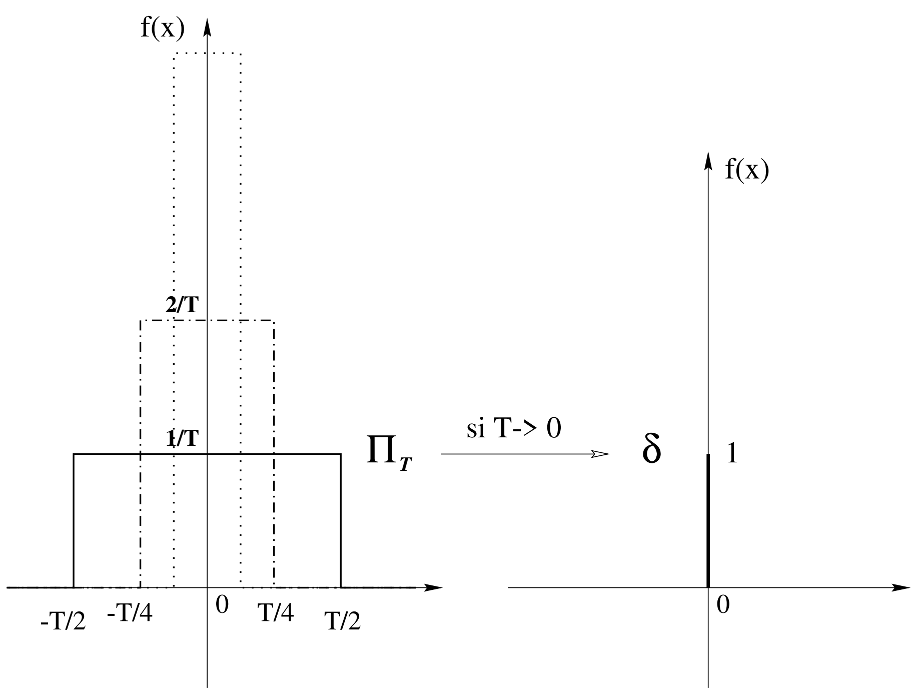
Soit la fonction $\Pi_T(x)$, définie par,

$$\Pi_T(x) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si} \quad |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{T}\,\Pi\left(\frac{x}{T}\right)\right) = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Lorsque $T \to 0$, la limite obtenue, qui n'est pas une fonction, est appelée *distribution de Dirac* et noté δ

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta) = 1}$$

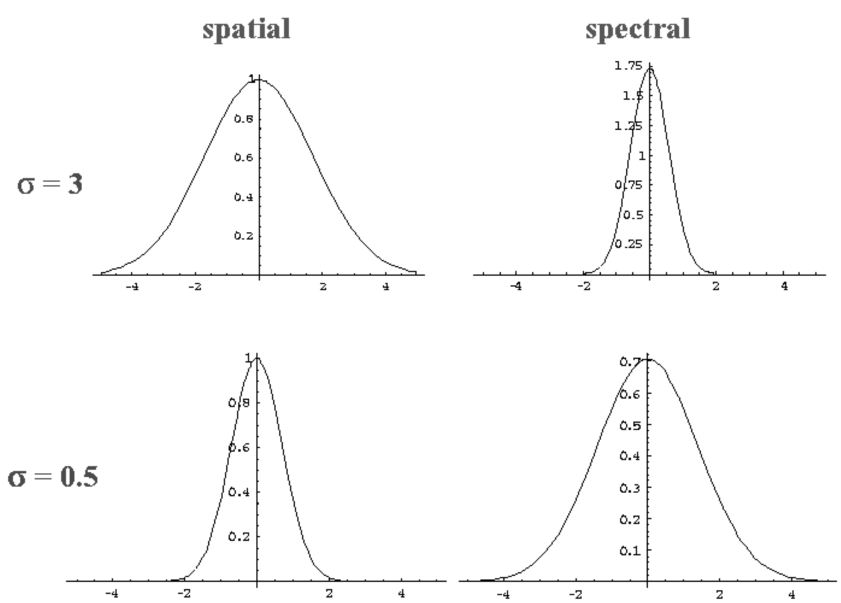


TRANSFORMÉE DE FOURIER -EXEMPLE- (5)

Fonction Gaussienne

Soit $f(x) = \exp(-\pi x^2)$

$$
\begin{aligned}
F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j \nu x)\, dx \\
&= \exp(-\pi \nu^2) \exp(\pi \nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2) \exp(-2\pi j \nu x)\, dx \\
&= \exp(-\pi \nu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi (x + j\nu)^2)\, dx \\
&= \exp(-\pi \nu^2) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi w^2)\, dw}_{1} \qquad (w = x + j\nu) \\
F(\nu) &= \exp(-\pi \nu^2)
\end{aligned}
$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \exp\left(-2\pi^2 \sigma^2 \nu^2\right)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (6)

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-2\pi j \nu x\right) \, dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp\left(2\pi j \nu x\right) \, d\nu$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1} \text{ en échangeant,} \\ \qquad\quad f \quad \text{en} \quad F \\ \qquad\quad x \quad \text{en} \quad \nu \\ \qquad\quad j \quad \text{en} \quad -j \end{array}$$

▶ Toute propriété de $\mathcal{F}$ est donc vraie pour $\mathcal{F}^{-1}$ en tenant compte de cette transposition

1. Linéarité

Si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$,

$$\boxed{\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda f + \mu g$$

2. Transformée de f(ax)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right)}$$

3. Transformée de f(x-xo)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \exp\left(-2j\pi\nu x_0\right) F(\nu)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\nu - \nu_0)] = \exp\left(2\pi j \nu_0 x\right) f(x)$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER -PROPRIÉTÉS- (7)

La transformée d'une porte décalée est

$$\boxed{\mathcal{F}[\Pi(x - x_0)] = \exp(-2j\pi\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}}$$

Plus généralement, on a

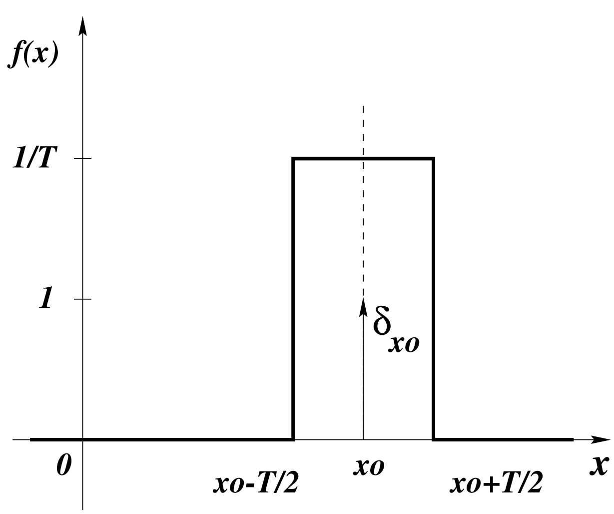
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)\right] = \exp(-2\pi j\nu x_0) \times \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}$$

Si $T \to 0$, on en déduit, en posant

$$\delta_{x_0} = \delta(x - x_0) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

i.e., la distribution de Dirac translatée en x_0. On obtient

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = \exp(-2\pi j\nu x_0)}$$



4. Transformée de f′(x)

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(x)] = 2j\pi\nu \; F(\nu)}$$

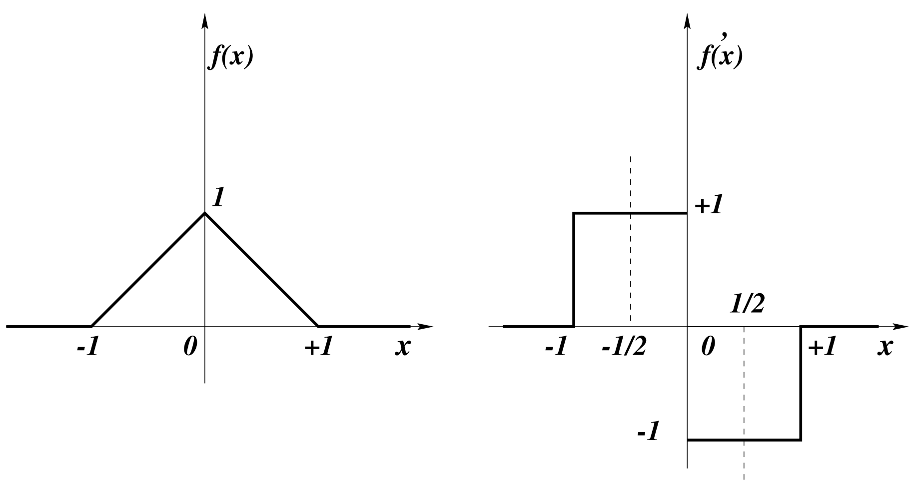
De même, pour $\mathcal{F}^{-1}$, $\quad \mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2j\pi x \; f(x)$

Plus généralement, si $f^{(n)}(x)$ existe et possède une TF,

$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2j\pi\nu)^n F(\nu)$ et $\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2j\pi x)^n f(x)$

-TF de la fonction triangle $\Lambda(x)$-

$$\Lambda'(x) = \Pi\Big(x + \frac{1}{2}\Big) - \Pi\Big(x - \frac{1}{2}\Big)$$



$$\begin{aligned} 2j\pi\nu \, F(\nu) &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big[\exp\Big(-2\pi j\nu(-\frac{1}{2})\Big) - \exp\Big(-2\pi j\nu(\frac{1}{2})\Big)\Big] \\ 2j\pi\nu \, F(\nu) &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times 2j \;\sin \pi\nu \\ F(\nu) &= \Big(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big)^2 \end{aligned}$$

5. Transformée du produit de convolution

Produit de convolution :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$$

On démontre que si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$ alors,

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = F \times G}$$

De la même façon pour $\mathcal{F}^{-1}$, on a,

$$\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g$$

$$\begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \times \\ \times & \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} & * \end{array}$$

-Exemple-

$$\begin{array}{lrcl} & \mathcal{F}[\Lambda(x)] & = & \left(\dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 \\ & \mathcal{F}[\Lambda(x)] & = & \dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times \dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \\ \text{or,} & \mathcal{F}[\Pi(x)] & = & \dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \\ \text{donc,} & \Lambda = \Pi * \Pi & & \end{array}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER
PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (1)

Note sur la distribution de Dirac

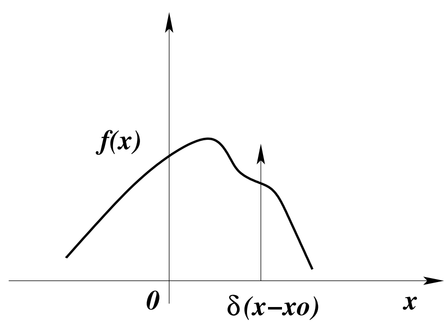
$$\delta(x) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x}{T}\right) = \lim_{T \to 0} \Pi_T(x)$$

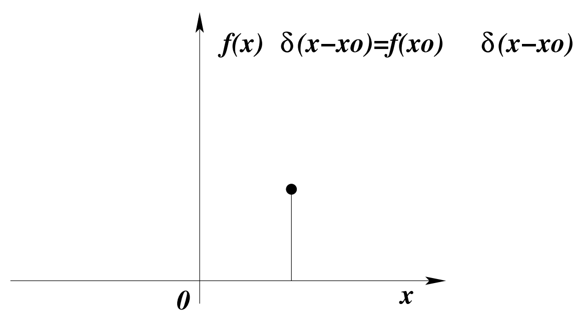
On définit de la même façon

$$\delta(x - x_0) = \delta_{x_0} = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{x - x_0}{T}\right)$$

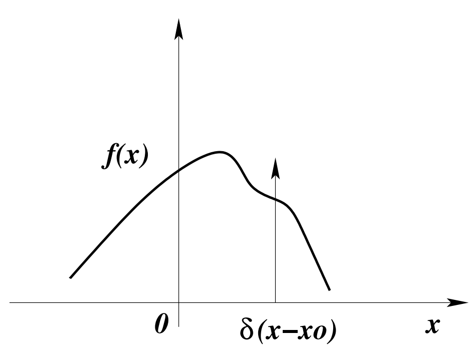
Propriétés

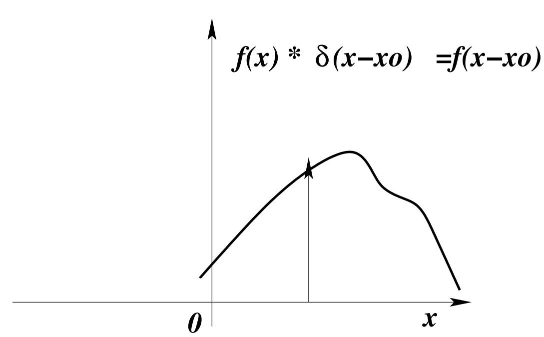
$$\begin{aligned} f(x)\delta(x) &= f(0)\,\delta(x) \\ f(x)\delta(x - x_0) &= f(x_0)\,\delta(x - x_0) \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} f(x) * \delta &= f(x) \\ f(x) * \delta_{x_0} &= f(x - x_0) \\ \mathcal{F}[f(x)\exp(2j\pi\nu_0 x)] &= F(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$





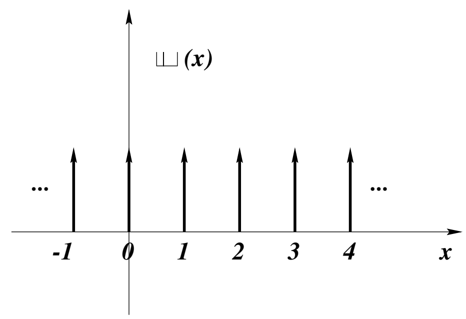
TRANSFORMÉE DE FOURIER

PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (2)

Peigne de Dirac

On appelle “peigne de Dirac”, la distribution noté $\text{Ш}(x)$, définie par

$$\text{Ш}(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-n)$$

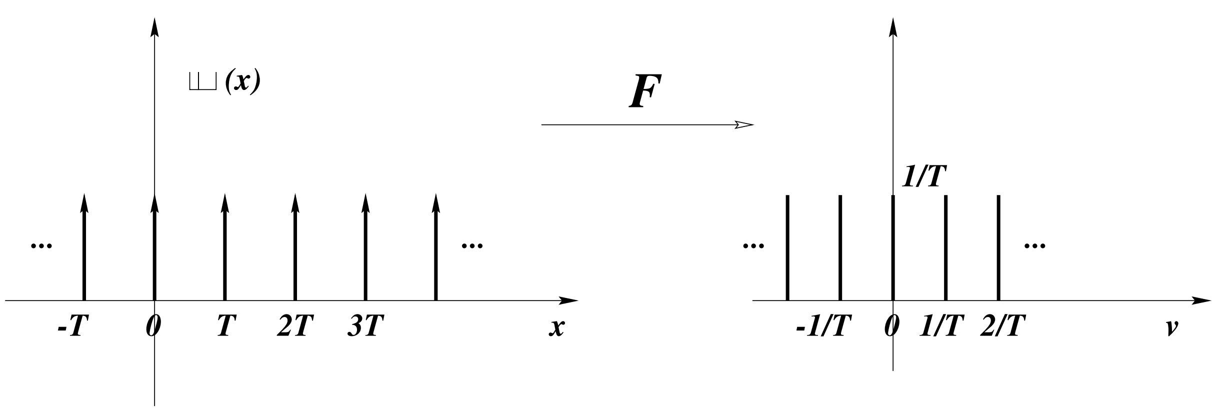


Le peigne de Dirac est invariant dans la TF

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-n)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu-n)$$

Dans le cas d’un peigne de période T

$$\boxed{\mathcal{F}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-nT)\Big) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu-\frac{n}{T})}$$

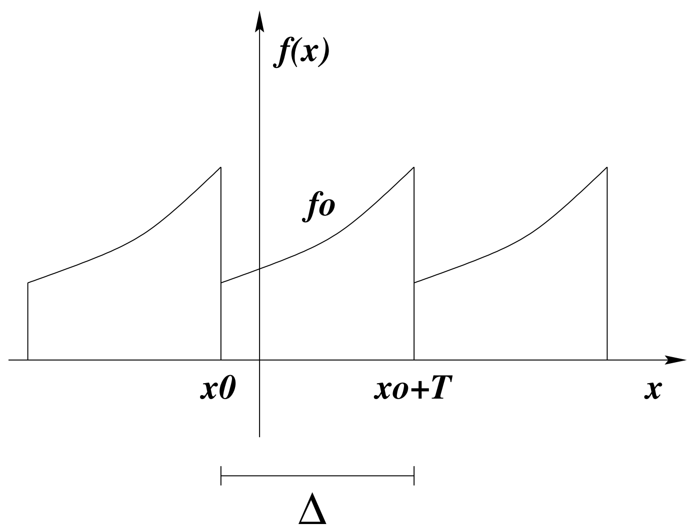


TRANSFORMÉE DE FOURIER
PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (3)

Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{w}$, définie par la fonction "motif" $f_0(x)$

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in \Delta \\ f_0(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin \Delta \end{cases}$$



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_0(x - nT) = f_0(x) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT)$$

En appliquant la TF

$$F(\nu) = F_0(\nu) \times \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

soit, $$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \, \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} F_0\left(\frac{n}{T}\right)$$

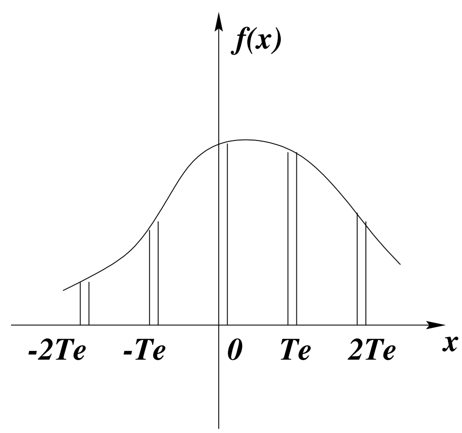
▶ Spectre de raies

TRANSFORMÉE DE FOURIER
PÉRIODICITÉ ET ÉCHANTILLONNAGE (4)

Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée

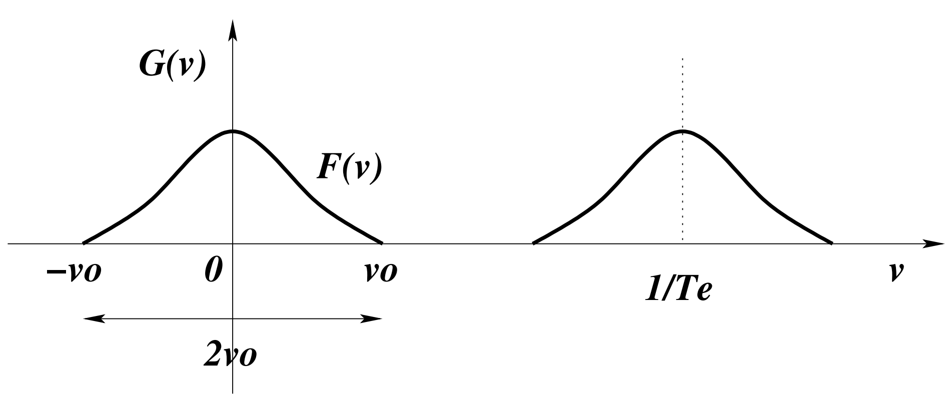
On peut représenter une fonction f échantillonnée avec la période d'échantillonnage T_e

$$f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e)\, \delta(x - nT_e)$$

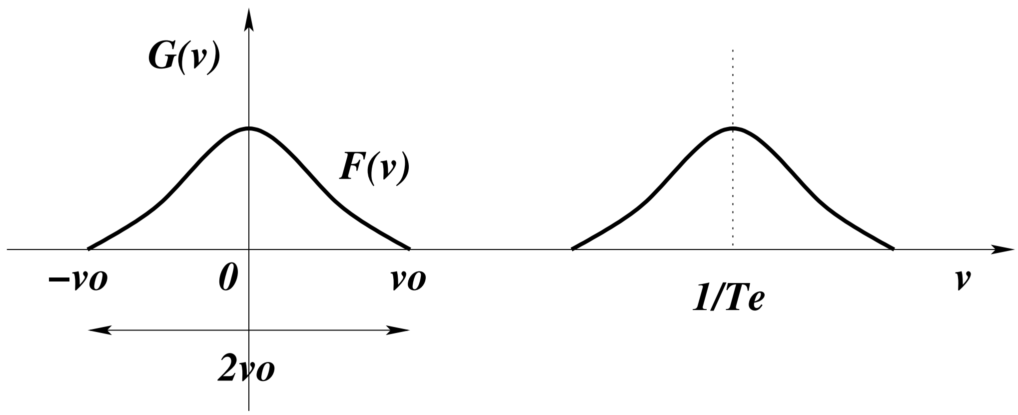


En appliquant la TF, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big(f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e)\Big) &= F(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\Big(\nu - \frac{n}{T_e}\Big) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\Big(\nu - \frac{n}{T_e}\Big) \\ &= G(\nu) \end{aligned}$$



TRANSFORMÉE DE FOURIER
THÉORÈME DE SHANNON



On peut "isoler" $F(\nu)$ en multipliant par

$$F(\nu) = G(\nu) \times \Pi\left(\frac{\nu}{2\nu_0}\right)$$

d'où, en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e\, f(nT_e)\, \delta(x - nT_e) * \frac{\sin 2\pi\nu_0 x}{\pi x}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e\, f(nT_e)\, \frac{\sin 2\pi\nu_0 (x - nT_e)}{\pi(x - nT_e)}$$

Ainsi la fonction f dont la TF a pour support $[-\nu_0, \nu_0]$ est parfaitement déterminée par $\{f(nT_e)\}_{n\in Z}$ dès que

$$\boxed{T_e \leq \frac{1}{2\nu_0}}$$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D (1)

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x,y)] = F(u,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\exp\left(-2\pi j(ux+\nu y)\right)dxdy}$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F(u,\nu)] = f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,\nu)\,\exp\left(2\pi j(ux+\nu y)\right)dud\nu}$$

où x, y coordonnée spatiale
et u, ν coordonnée spectrale

$$\begin{aligned} F(u,\nu) &= \mathcal{R}\big[F(u,\nu)\big] + j\,\mathcal{I}\big[F(u,\nu)\big] = R(u,\nu) + jI(u,\nu) \\ F(u,\nu) &= |F(u,\nu)|\exp\left[j\Phi(u,\nu)\right] \end{aligned}$$

Phase : $\Phi(u,\nu) = \arctan\left(\dfrac{I(u,\nu)}{R(u,\nu)}\right)$

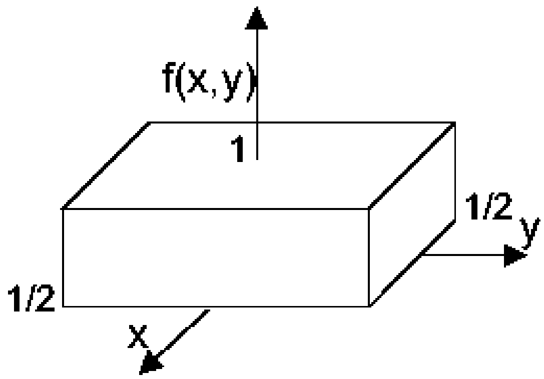
Spectre d'amplitude : $|F(u,\nu)| = \sqrt{R(u,\nu)^2 + I(u,\nu)^2}$

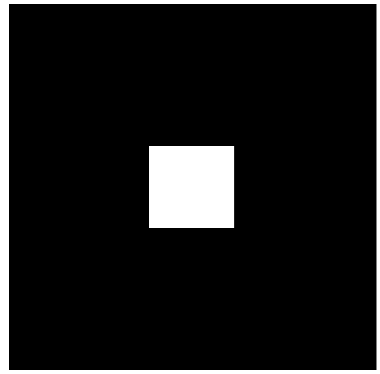
Spectre de puissance : $|F(u,\nu)|^2 = R(u,\nu)^2 + I(u,\nu)^2$

TRANSFORMÉE DE FOURIER

TRANSFORMÉE DE FOURIER 2D -EXEMPLE- (2)

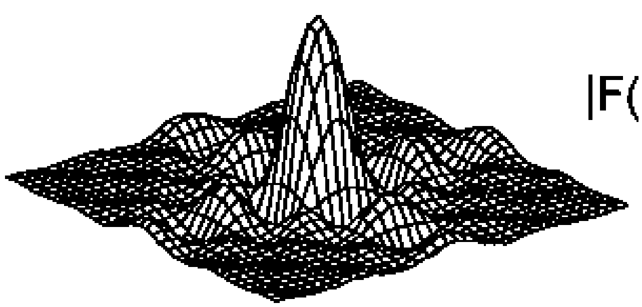
Fonction “Rectangle”





$$\begin{cases} f(x,y) = \Pi(x,y) = 1 \quad \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \\ f(x,y) = \Pi(x,y) = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(u,\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\exp\left(-2\pi j(ux+\nu y)\right) dxdy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \exp\left(-2\pi j u x\right) dx \int_{-1/2}^{1/2} \exp\left(-2\pi j \nu y\right) dy \\ &= \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\,\frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \\ &= \text{sinc}(u,\nu) \end{aligned}$$



|F(u,v)|