DIRO
IFT 6150

TRAITEMENT D'IMAGES
FILTRAGE SPATIAL

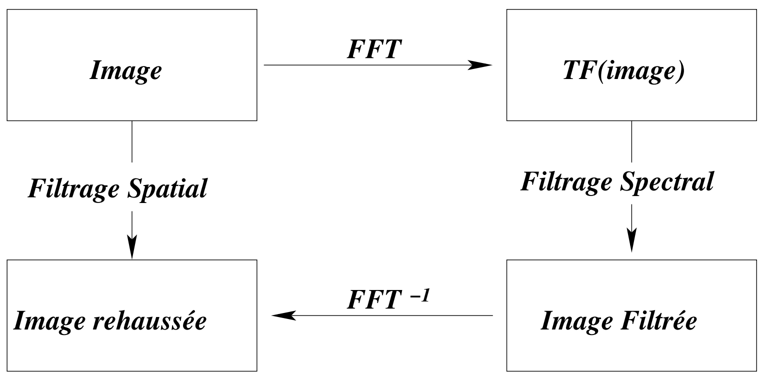
Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

FILTRAGE SPATIALE
SOMMAIRE

FILTRAGE SPATIALE
INTRODUCTION

Rehaussement d'Images par Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

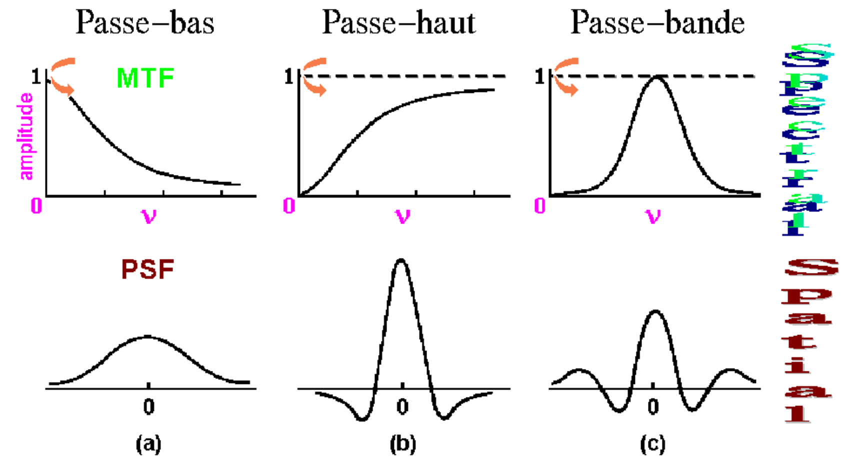
$$f(x,y) * g(x,y) \quad \blacktriangleleft\!\blacktriangleright \quad F(u,\nu)\,.\,G(u,\nu)$$
$$f(x,y)\,.\,g(x,y) \quad \blacktriangleleft\!\blacktriangleright \quad F(u,\nu) * G(u,\nu)$$

donc, si $f(x,y)$ est l'image à filtrer (ou à rehausser) et $g(x,y)$, le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$\boxed{f(x,y) * g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\{f(x,y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x,y)\}}_{G(u,\nu)}\right\}}$$

FILTRAGE SPATIALE
INTRODUCTION

Trois Types de Filtrage



- **PSF** : Point Spread Function
(ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function
(ou Fonction de Transfert)

▶ Filtre Passe-bas : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image

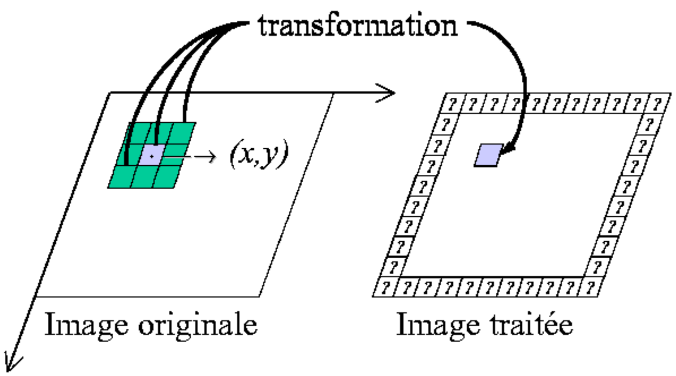
▶ Filtre Passe-haut : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit

▶ Filtre Passe-bande : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

FILTRAGE SPATIALE
CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point (x, y)



?: effet de bord => périodicité, miroir,extérieur=0
ou on ne filtre pas les bords…

Exemple

		16	0	16		
		16	16	16		
		16	16	16		

*(1/16)

1	2	1
2	4	2
1	2	1

=

	1	2	2	2	1	
	3	7	8	7	3	
	4	11	14	11	4	
	3	9	12	9	3	
	1	3	4	3	1	

FILTRAGE SPATIALE
CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

$$g(x,y) = (f * \text{filtre})(x,y) = \sum_i \sum_j f(x-i, y-j)\ \text{filtre}(i,j)$$

Remarque

• Généralement le masque est de dimension (DF) impair et symétrique. Dans ce cas

$$\boxed{(f * \text{filtre})(x,y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x+i, y+j)\ \text{filtre}(i,j)}$$

Filtre(i , j)

w1	***w2***	***w3***
w4	***w5***	***w6***
w7	***w8***	***w9***

DF=3

Filtre(0,0)=w5

$$\begin{aligned} g(x,y) &= w_1 f(x-1,y-1) + w_2 f(x,y-1) + w_3 f(x+1,y-1) \\ &+ w_4 f(x-1,y) + w_5 f(x,y) + w_6 f(x+1,y) \\ &+ w_7 f(x-1,y+1) + w_8 f(x,y+1) + w_9 f(x+1,y+1) \end{aligned}$$

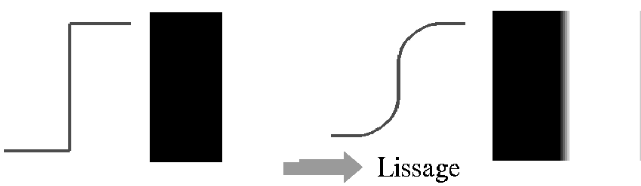
• Afin de conserver la moyenne de l'image $f(x,y)$, la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e., $\sum_i w_i = 1$)

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

$$\frac{1}{9} * \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \frac{1}{25} * \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Filtre 3x3 *Filtre 5x5*

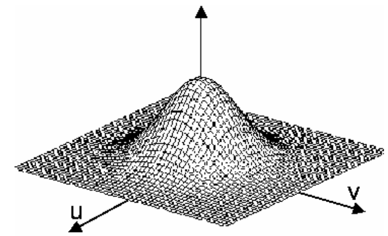
Exemple



▶ Filtre Passe-bas : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\boxed{\text{Gaussienne(x,y)} = \exp\left(-\pi(x^2+y^2)/\sigma^2\right)}$$



$$(1/16)\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(1/4)\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} * (1/4)\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} = (1/16)\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(1/4)\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} * (1/4)\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} = (1/16)\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Remarque

Idéalement on devrait prévoir un filtre (ou masque) de taille $(6\sigma+1)\times(6\sigma+1)$

FILTRAGE SPATIALE
AUTRES FILTRES PASSE-BAS

Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur (1/16)(1 4 6 4 1). Le filtre 2D est

$$\frac{1}{256}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1\\\hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4\\\hline 6 & 24 & 36 & 24 & 6\\\hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4\\\hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1\\\hline\end{array}$$

Filtre Pyramidal

$$\frac{1}{81}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1\\\hline 2 & 4 & 6 & 4 & 2\\\hline 3 & 6 & 9 & 6 & 3\\\hline 2 & 4 & 6 & 4 & 2\\\hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1\\\hline\end{array}$$

Filtre Conique

$$\frac{1}{25}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 2 & 2 & 2 & 0\\\hline 1 & 2 & 5 & 2 & 1\\\hline 0 & 2 & 2 & 2 & 0\\\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\\hline\end{array}$$

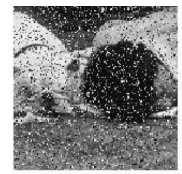
FILTRAGE SPATIALE
FILTRE MÉDIAN (1)

$$\boxed{g(x,y) = \text{médian}\,\{f(n,m)\}_{(n,m)\in S}}$$

(S voisinage de (x,y))

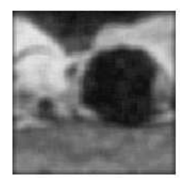
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 30 & 10 & 20\\\hline 10 & 250 & 25\\\hline 20 & 25 & 30\\\hline\end{array} \longrightarrow 10\ \ 10\ \ 20\ \ 20\ \ \underset{\uparrow\ \text{médiane}}{25}\ \ 25\ \ 30\ \ 30\ \ \overset{\text{bruit}\ \downarrow}{250}$$

Utile pour contrer l'effet d'un bruit Poivre & Sel (faux "0" et "255" dans l'image)



3 X 3 Average

5 X 5 Average

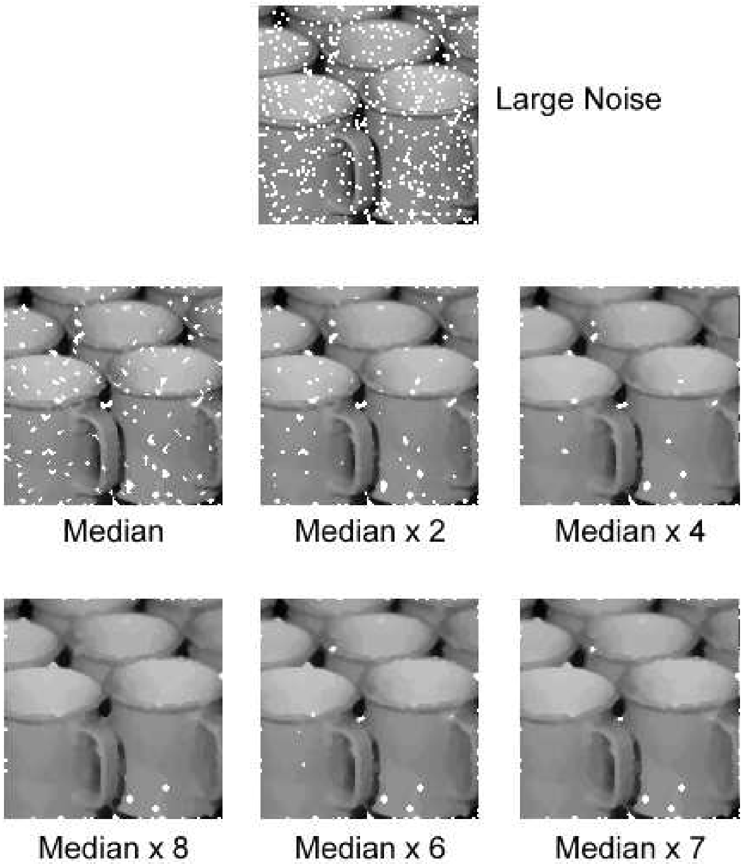


7 X 7 Average

Median

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE MÉDIAN (2)

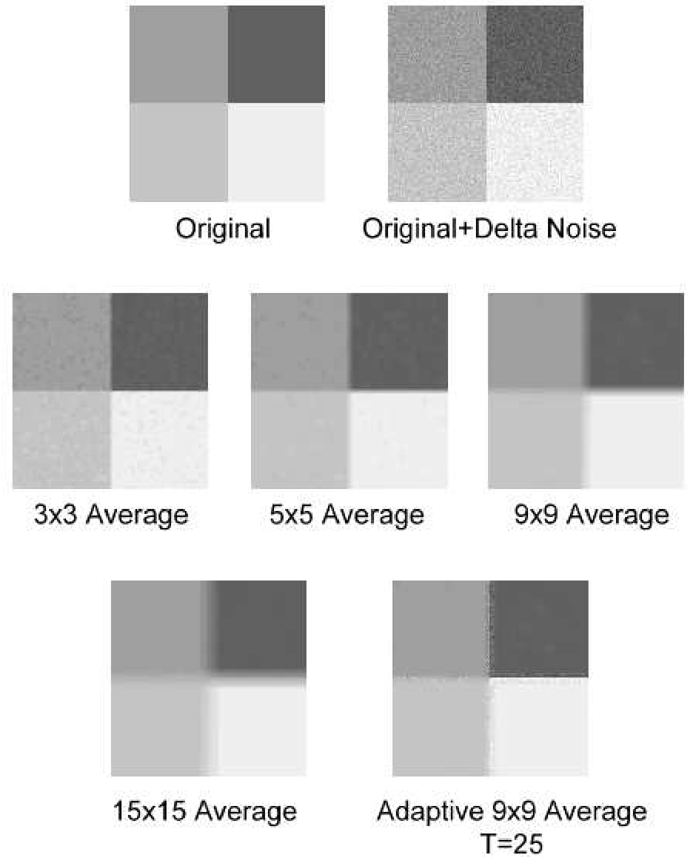
- Exemple de bruit P & S avec gros agrégats -



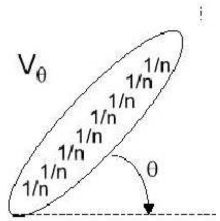
Si le bruit P & S est supérieur à la moitié de la dimension du filtre ▶ filtrage inefficace.

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE ADAPTATIF

$$g(x,y) = \begin{cases} \text{filtre PB}[f(x,y)] & \text{si } |\text{filtrePB}[f(x,y)] - f(x,y)| < \text{seuil} \\ f(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$$



FILTRAGE SPATIALE
FILTRE DIRECTIONNEL



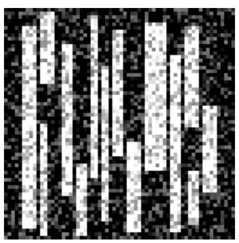
- Trouver le voisinage orienté tq

$$\boxed{\theta_0 = \arg\min_\theta |f(x,y) - f * V_\theta(x,y)|}$$

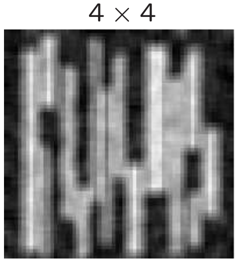
- Calculer la moyenne (ou autre) suivant V_θ

$$\boxed{g(x,y) = f * V_{\theta_0}(x,y)}$$

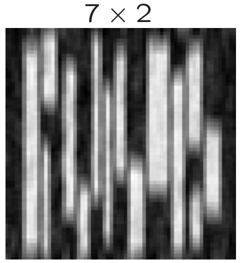
Image bruitée originale



4×4

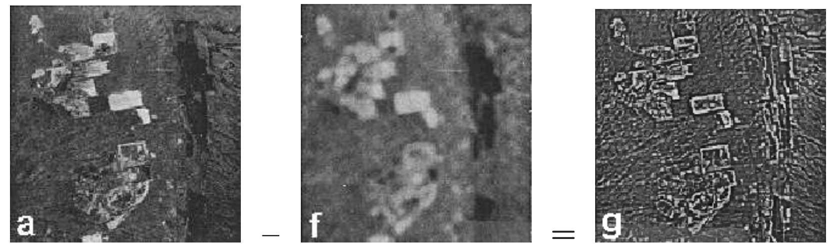


7×2



FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"

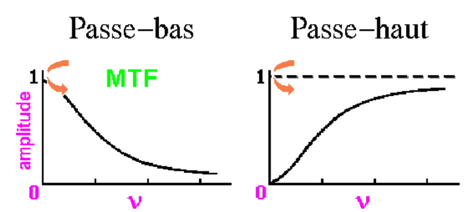


Passe-bas

Passe-haut ($K = 1$)

High boost = K(original) − Passe-bas(original)

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= Kf(x,y) - f(x,y) * h(x,y) \\
&= (K-1)f(x,y) + \big(f(x,y) * \delta(x,y)\big) - f(x,y) * h(x,y) \\
&= (K-1)f(x,y) + f(x,y) * \big(\delta(x,y) - h(x,y)\big) \\
&\Updownarrow \mathcal{F} \\
G(u,v) &= (K-1)F(u,v) + F(u,v)\big[\underbrace{1 - H(u,v)}_{\text{Passe-haut}}\big]
\end{aligned}$$



- $K = 1$ Passe-haut
- $K > 1$ Rehaussement de Contour

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3×3 -

$$\delta(x,y) - h(x,y) = \frac{1}{9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} - \frac{1}{9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline\end{array}$$

- Filtre 5×5 -

$$\frac{1}{25}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline\end{array}$$

$\boxed{\text{Opérations sur les filtres de voisinage}}$

Passe-bas

$$\frac{1}{35}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{35}\left\{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} + \boxed{1}\right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25}\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{25}\left\{-\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} + \boxed{25}\right\}$$

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

$\boxed{\text{Détection de Point}}$

Convolution avec
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline\end{array}$$

- Grande valeur positive ▶ point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ▶ point noir sur fond blanc

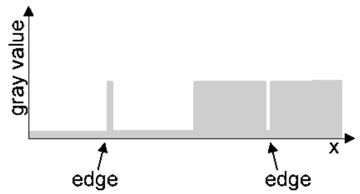
- Exemple -

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 100 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline\end{array} * \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \\ \hline 0 & 0 & -95 & 760 & -95 \\ \hline 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \\ \hline\end{array}$$

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -MASQUE DE DÉTECTION-

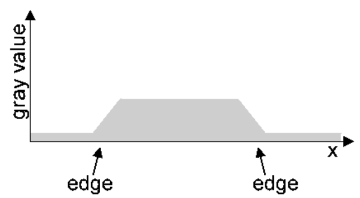
Détection des contours

- Contour d'une ligne -



$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Contour d'un objet -



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

Le Gradient

- Soit $f(x,y)$, alors

$$\boxed{\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

- Magnitude du Gradient

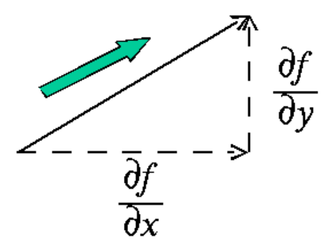
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan\left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$



FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

Approximation du Gradient (en x)

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x, y) - f(x,y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x,y) - f(x-\Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$ ▶ Masque de convolution ▶ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -1 \\ \hline\end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline\end{array}$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x+\Delta_x, y) - f(x-\Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1$ ▶ Masque de convolution ▶ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & -1 \\ \hline\end{array}$

Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution ▶ $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline\end{array}$ ou $\begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ ou $\begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ ou $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline\end{array}$

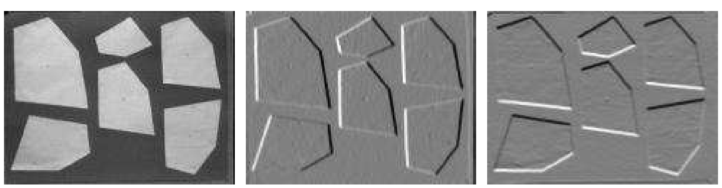


Image original   Gradient en x   Gradient en y

FILTRAGE SPATIALE
FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

Filtre de Robert

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx f(x,y) - f(x-1, y-1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \approx f(x-1,y) - f(x, y-1)$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline\end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline\end{array}$

▶ Sensible au bruit

Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ et $\begin{array}{|c|}\hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

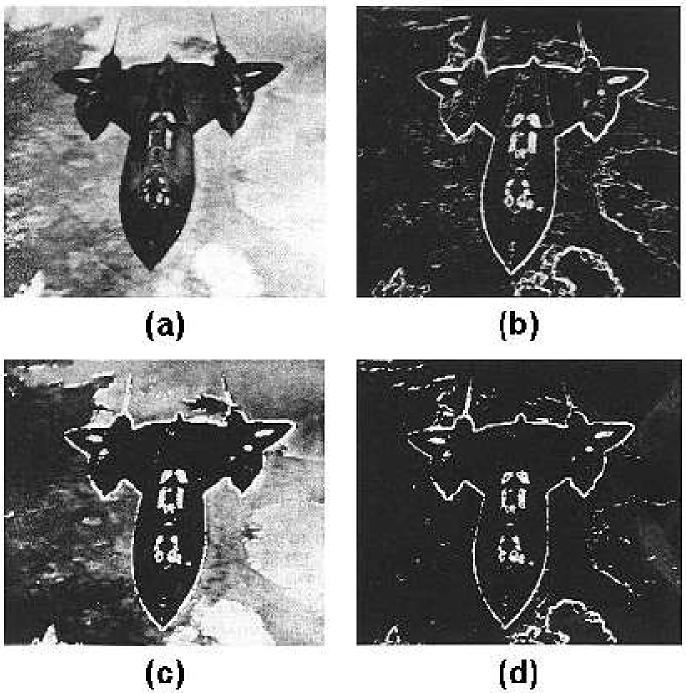
Filtre Gaussien + Gradient = **Filtre de Sobel**

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

Exemple



- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient $> 10\% I_{max} (= 25)$ ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient $< 25\% I_{max}$ ont été mis à 0 (image binaire)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

Filtres compas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ N $\quad \nwarrow$ NW $\quad \leftarrow$ W $\quad \swarrow$ SW

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ S $\quad \searrow$ SE $\quad \rightarrow$ E $\quad \nearrow$ NE

Le gradient est défini par

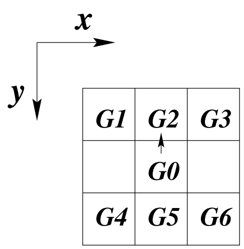
$$\boxed{g(x,y) = \max_k |g_k(x,y)|}$$

- ▶ k donne l'orientation du gradient

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (6)

Décision Contour



- G_0 contour si $|G_0| > \text{seuil}$
- G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$ ou G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$
- Seuillage par hystéresis

On définit deux seuils S_b (seuil bas) et S_h (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''(x,y) &= f'(x+1,y) - f'(x,y) \\ &= [f(x+1,y) - f(x,y)] - [f(x,y) - f(x-1,y)] \\ &= f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y) \end{aligned}$$

Convolution avec le masque ▶ | 1 | -2 | 1 |

- Par convolution répétée -

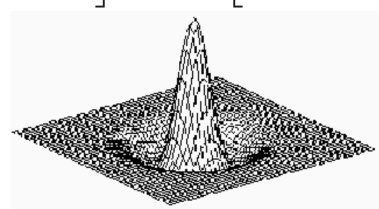
$$\boxed{-1 \mid 1} * \boxed{-1 \mid 1} = \boxed{1 \mid -2 \mid 1}$$

Opérateur Laplacien

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) \quad \blacktriangleright \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)

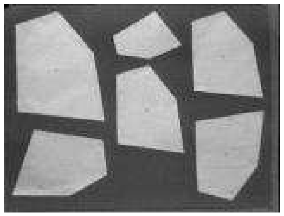
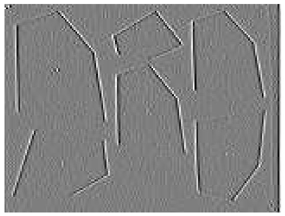
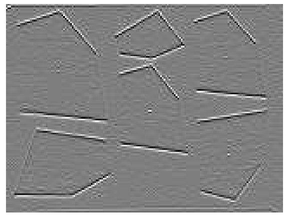


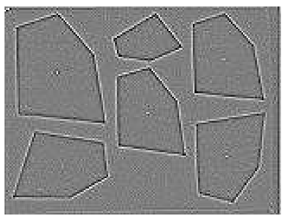
Image original



Dérivée 2nd en x



Dérivée 2nd en y



Laplacien

Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

$$1/3 \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array} = 1/3 \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

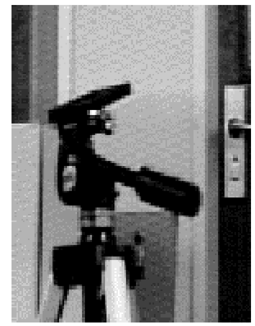
Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

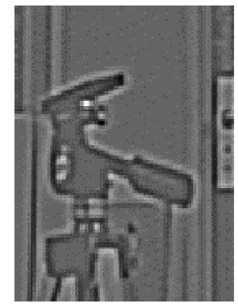
$$1/4 \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \; \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array} = 1/4 \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline 2 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

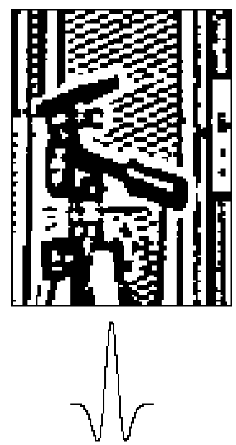
FILTRAGE SPATIALE

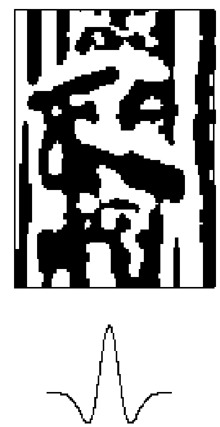
FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

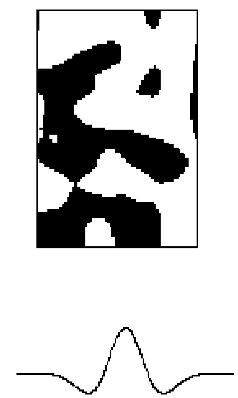
1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée







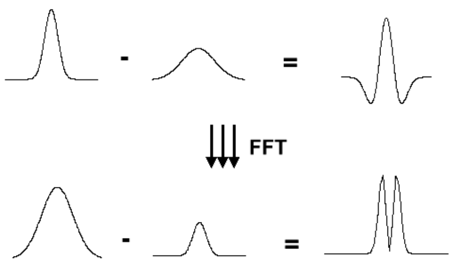




FILTRAGE SPATIALE

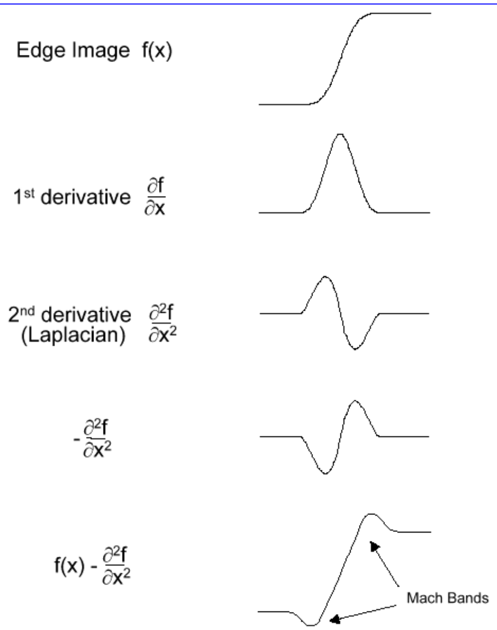
FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth ≈ Différence de deux Gaussienne



▶ Filtre Passe-bande

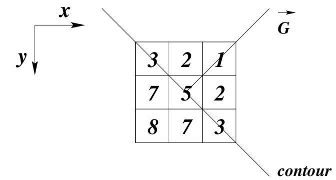
Rehaussement des contours avec le Laplacien



FILTRAGE SPATIALE

EXERCICE

Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en x ▶

-1	0	1

et y

-1
0
1

on trouve, pour le pixel du milieu $G_y = -5$ et $G_x = 5$. Donc, $|\vec{G}| = 10$ et $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur de convolution

1	-3	1
-3	9	-3
1	-3	1

.

Filtre séparable ▶

-1
3
-1

-1	3	-1

$$H(u) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x)\exp(-2\pi jux) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x)\exp(-2\pi jux)$$
$$= -\exp(2\pi ju) + 3 - \exp(-2\pi ju) = 3 - 2\cos(2\pi u)$$