

TRAITEMENT D'IMAGES FILTRAGE SPATIAL

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

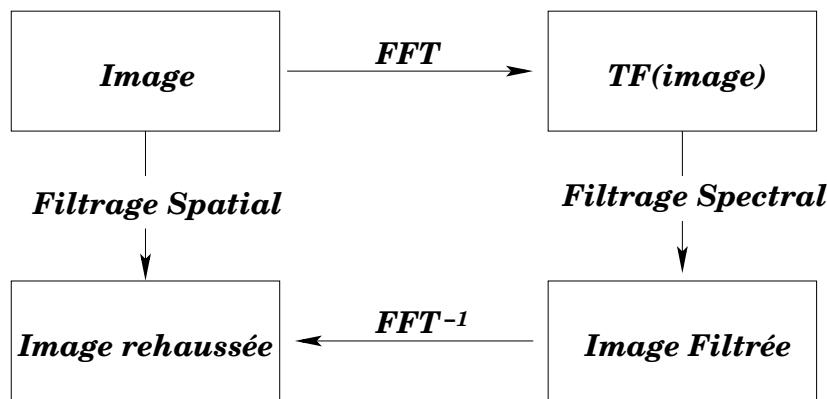
FILTRAGE SPATIALE SOMMAIRE

Introduction	2
Convolution Discrète 2D -Rappel-	4
Filtre de Moyenne (Passe-bas)	6
Filtre Gaussien (Passe-bas)	7
Autres Filtres Passe-bas	8
Filtre Médian	9
Filtre Adaptatif	11
Filtre Directionnel	12
Filtre Passe-haut -Op. Mathématique-	14
Filtre Passe-haut -Masque de Détection-	16
Filtre Passe-haut -Gradient-	17
Décision Contour	22
Filtre Passe-haut -Laplaciens-	23
Filtre de Marr-Hildreth	25
Rehaussement des Contours	26
Exercices	27

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION

Rehaussement d'Images par Filtrage Spatial/Fréquentiel



Théorème de Convolution -Rappel-

$$\begin{aligned} f(x, y) * g(x, y) &\Leftrightarrow F(u, \nu) \cdot G(u, \nu) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) &\Leftrightarrow F(u, \nu) * G(u, \nu) \end{aligned}$$

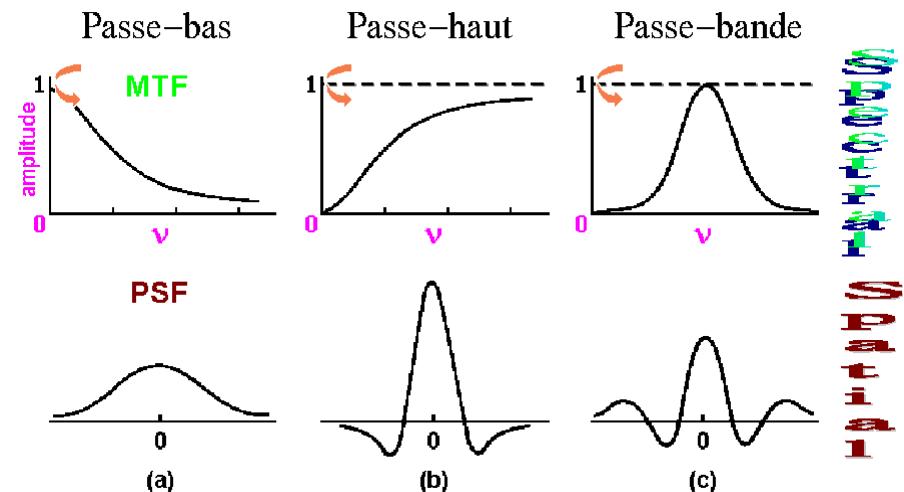
donc, si $f(x, y)$ est l'image à filtrer (ou à rehausser) et $g(x, y)$, le filtre spatial (ou PSF ou masque)

$$f(x, y) * g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{f(x, y)\} \cdot \underbrace{\mathcal{F}\{g(x, y)\}}_{G(u, \nu)} \right\}$$

FILTRAGE SPATIALE

INTRODUCTION

Trois Types de Filtrage

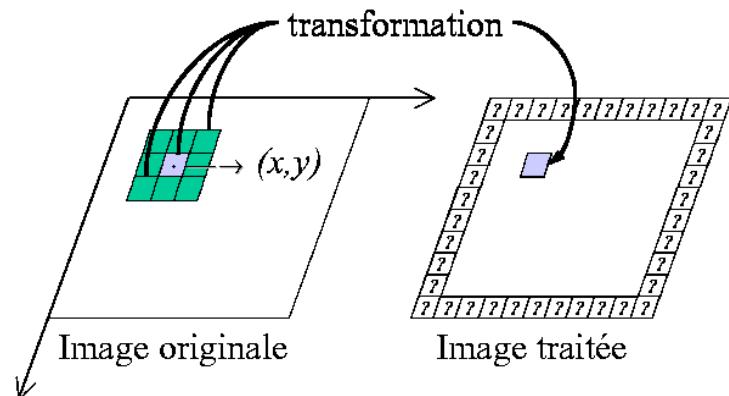


- **PSF** : Point Spread Function (ou Fonction d'Étalement Spectrale)
- **MTF** : Modulation Transfer Function (ou Fonction de Transfert)
- ▶ **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image
- ▶ **Filtre Passe-haut** : accentue les contours et les détails de l'image mais amplifie le bruit
- ▶ **Filtre Passe-bande** : élimine certaines fréquences indésirables présentes dans l'image

FILTRAGE SPATIALE CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

Convolution Discrète 2D -Rappel-

Transformation basée sur le voisinage d'un point (x, y)



? : effet de bord \Rightarrow périodicité, miroir, extérieur=0
ou on ne filtre pas les bords...

Exemple

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & \mathbf{16} & \mathbf{0} & \mathbf{16} & & \\ \hline & \mathbf{16} & \mathbf{16} & \mathbf{16} & & \\ \hline & \mathbf{16} & \mathbf{16} & \mathbf{16} & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \quad * (1/16) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \quad = \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{3} \\ \hline & \mathbf{4} & \mathbf{11} & \mathbf{14} & \mathbf{11} & \mathbf{4} \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{12} & \mathbf{9} & \mathbf{3} \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$

FILTRAGE SPATIALE CONVOLUTION DISCRÈTE 2D -RAPPEL-

$$g(x, y) = (f * \text{filtre})(x, y) = \sum_i \sum_j f(x - i, y - j) \text{filtre}(i, j)$$

Remarque

- Généralement le masque est de dimension (DF) impair et symétrique. Dans ce cas

$$(f * \text{filtre})(x, y) = \sum_{i=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} \sum_{j=-(DF-1)/2}^{(DF-1)/2} f(x+i, y+j) \text{filtre}(i, j)$$

Filtre(i , j)

$w1$	$w2$	$w3$
$w4$	$w5$	$w6$
$w7$	$w8$	$w9$

Filtre(0,0)=w5

$$\begin{aligned}
 g(x, y) &= w_1 f(x-1, y-1) + w_2 f(x, y-1) + w_3 f(x+1, y-1) \\
 &+ w_4 f(x-1, y) + w_5 f(x, y) + w_6 f(x+1, y) \\
 &+ w_7 f(x-1, y+1) + w_8 f(x, y+1) + w_9 f(x+1, y+1)
 \end{aligned}$$

- Afin de conserver la moyenne de l'image $f(x, y)$, la somme des éléments du filtre est normalisée à 1 (i.e., $\sum_i w_i = 1$)

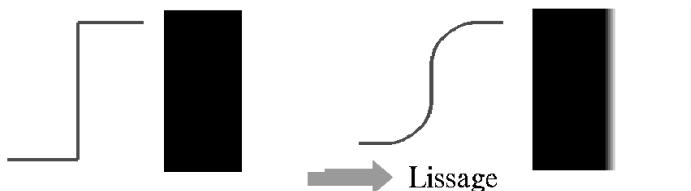
FILTRAGE SPATIALE FILTRE DE MOYENNE (PASSE-BAS)

$$1/9 * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre 3x3

$$1/25 * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

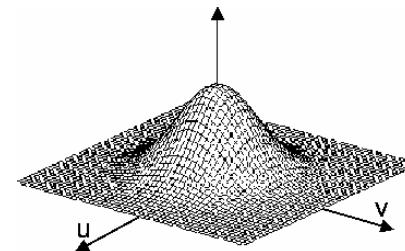
Filtre 5x5



► **Filtre Passe-bas** : diminue le bruit mais atténue les détails de l'image (flou)

FILTRAGE SPATIALE FILTRE GAUSSIEN (PASSE-BAS)

$$\text{Gaussienne}(x,y) = \exp(-\pi(x^2 + y^2)/\sigma^2)$$



$$(1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1/4) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * (1/4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (1/16) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Idéalement on devrait prévoir un filtre (ou masque) de taille $(6\sigma + 1) \times (6\sigma + 1)$

FILTRAGE SPATIALE AUTRES FILTRES PASSE-BAS

Filtre Binomial

Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binome de Newton. Un filtre 1D Binomial du quatrième ordre donne le vecteur $(1/16)(1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$. Le filtre 2D est

$$\frac{1}{256} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ \hline 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ \hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Filtre Pyramidal

$$\frac{1}{81} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

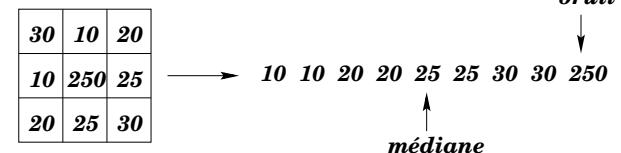
Filtre Conique

$$\frac{1}{25} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

FILTRAGE SPATIALE FILTRE MÉDIAN (1)

$$g(x, y) = \text{médian } \{f(n, m)\}_{(n, m) \in S}$$

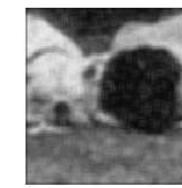
(S voisinage de (x, y))



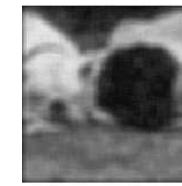
Utile pour contrer l'effet d'un bruit Poivre & Sel (faux "0" et "255" dans l'image)



3 X 3 Average



5 X 5 Average



7 X 7 Average

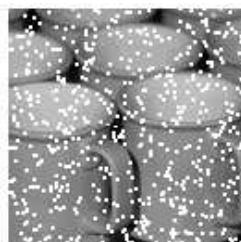


Median

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE MÉDIAN (2)

- Exemple de bruit P & S avec gros agrégats -



Large Noise



Median



Median x 2



Median x 4



Median x 8



Median x 6



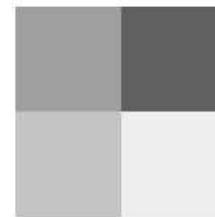
Median x 7

Si le bruit P & S est supérieur à la moitié de la dimension du filtre ► filtrage inefficace.

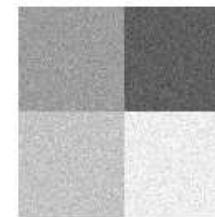
FILTRAGE SPATIALE

FILTRE ADAPTATIF

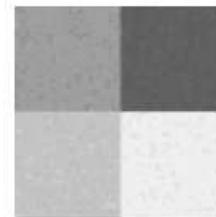
$$g(x, y) = \begin{cases} \text{filtre PB}[f(x, y)] & \text{si } |\text{filtrePB}[f(x, y)] - f(x, y)| < \text{seuil} \\ f(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$



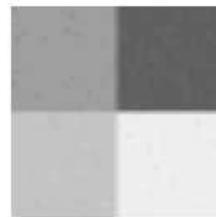
Original



Original+Delta Noise



3x3 Average



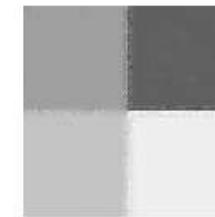
5x5 Average



9x9 Average

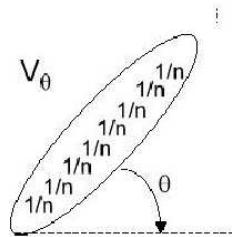


15x15 Average



Adaptive 9x9 Average
T=25

FILTRAGE SPATIALE FILTRE DIRECTIONNEL



- Trouver le voisinage orienté tq

$$\theta_0 = \arg \min_{\theta} |f(x, y) - f * V_{\theta}(x, y)|$$

- Calculer la moyenne (ou autre) suivant V_{θ}

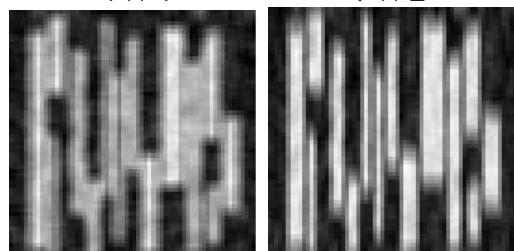
$$g(x, y) = f * V_{\theta_0}(x, y)$$

Image bruitée originale



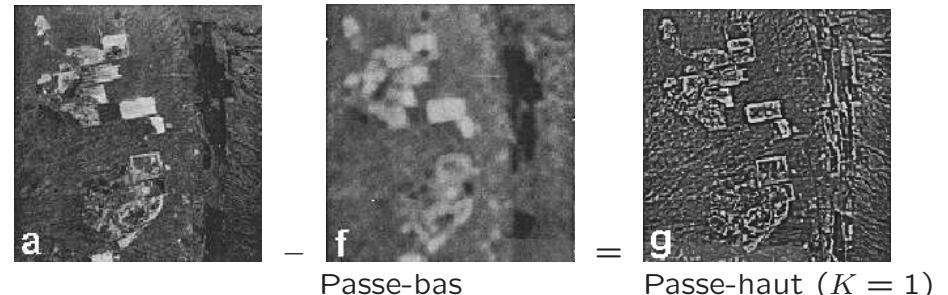
4×4

7×2



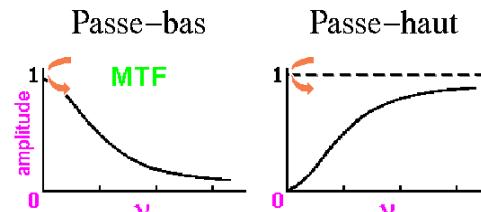
FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (1)

Filtre "High-boost"



$$\text{High boost} = K(\text{original}) - \text{Passe-bas}(\text{original})$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= Kf(x, y) - f(x, y) * h(x, y) \\ &= (K - 1)f(x, y) + (f(x, y) * \delta(x, y)) - f(x, y) * h(x, y) \\ &= (K - 1)f(x, y) + f(x, y) * (\delta(x, y) - h(x, y)) \\ &\stackrel{\uparrow \mathcal{F}}{\Rightarrow} \\ G(u, v) &= (K - 1)F(u, v) + F(u, v) \underbrace{[1 - H(u, v)]}_{\text{Passe-haut}} \end{aligned}$$



- $K = 1$ Passe-haut
- $K > 1$ Rehaussement de Contour

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (2)

- Filtre 3×3 -

$$s(x, y) - h(x, y) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Filtre 5×5 -

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les filtres de voisinage

Passe-bas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{1} \right\}$$

Passe-haut

$$\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 24 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \left\{ - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \boxed{25} \right\}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -OP. MATHÉMATIQUE- (3)

Détection de Point

Convolution avec

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Grande valeur positive ► point blanc sur fond noir
- Grande valeur négative ► point noir sur fond blanc

- Exemple -

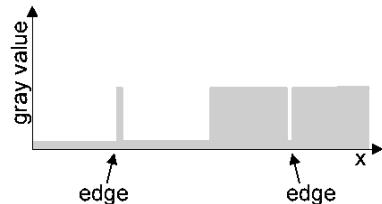
$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 100 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & 760 & -95 \\ 0 & 0 & -95 & -95 & -95 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -MASQUE DE DÉTECTION-

Détection des contours

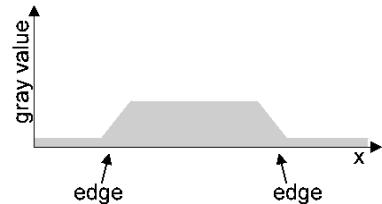
- Contour d'une ligne -



$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

— — | —

- Contour d'un objet -



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (1)

Le Gradient

- Soit $f(x, y)$, alors

$$\nabla f = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Magnitude du Gradient

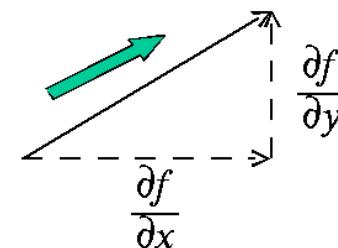
$$\text{mag}(\nabla f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

- Approximation de la Magnitude

$$\text{mag}(\nabla f) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

- Direction du Gradient

$$\theta = \arctan \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right)$$



FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (2)

Approximation du Gradient (en x)

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x, y)}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1 \blacktriangleright$ Masque de convolution \blacktriangleright $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta_x, y) - f(x - \Delta_x, y)}{2\Delta_x}$$

$\Delta_x = 1 \blacktriangleright$ Masque de convolution \blacktriangleright $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Approximation du Gradient (en y)

Masque de convolution \blacktriangleright $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

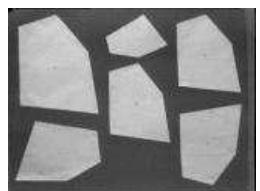
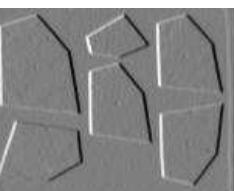
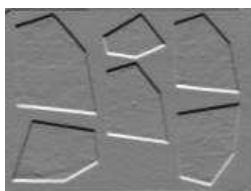


Image original



Gradient en x



Gradient en y

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (3)

Filtre de Robert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx f(x, y) - f(x - 1, y - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx f(x - 1, y) - f(x, y - 1) \end{aligned}$$

On obtient respectivement, les masques suivants,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

\blacktriangleright Sensible au bruit

Filtre de Prewitt

Filtre Moyenneur + Gradient

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Gaussien + Gradient =

Filtre de Sobel

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (4)

Exemple



(a)



(b)



(c)



(d)

- (a) Image originale
- (b) Image obtenue à partir des valeurs de magnitude du gradient (masque de Prewitt)
- (c) Image originale dont les pixels ayant un gradient $> 10\%I_{max} (= 25)$ ont été mis à 255
- (d) Idem que (c) mais les pixels dont les gradient $< 25\%I_{max}$ ont été mis à 0 (image binaire)

FILTRAGE SPATIALE

FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (5)

Filtres compas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ N ↙ NW ← W ↘ SW

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

↓ S ↘ SE → E ↗ NE

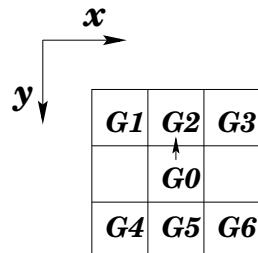
Le gradient est défini par

$$g(x, y) = \max_k |g_k(x, y)|$$

► k donne l'orientation du gradient

FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -GRADIENT- (6)

Décision Contour



- G_0 contour si $|G_0| >$ seuil
- G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 \\ G_5 < G_0 \end{cases}$ ou G_0 contour si $\begin{cases} G_2 < G_0 > G_5 \\ G_1 < G_0 > G_6 \\ G_3 < G_0 > G_4 \end{cases}$
- Seuillage par hystéresis

On définit deux seuils S_b (seuil bas) et S_h (seuil haut) et la classification en pts de contour ou non est donnée

$$\begin{cases} G_0 > S_h & \text{Pts de contour (PC)} \\ G_0 > S_b & \text{Pts de contour possible (PCP)} \\ G_0 < S_b & \text{Pas de contour (PNC)} \end{cases}$$

Un point de contour possible (PCP) est ensuite classé comme un PC lorsque il a un voisin PC, ou PNC dans le cas contraire

FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (1)

Dérivée seconde

- Formule des différences finis -

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= f''(x, y) = f'(x+1, y) - f'(x, y) \\ &= [f(x+1, y) - f(x, y)] - [f(x, y) - f(x-1, y)] \\ &= f(x+1, y) - 2f(x, y) + f(x-1, y) \end{aligned}$$

Convolution avec le masque $\blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

- Par convolution répétée -

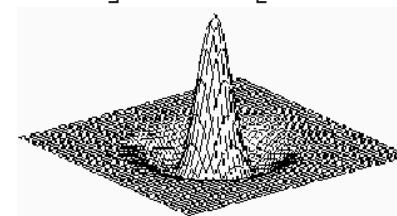
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérateur Laplacien

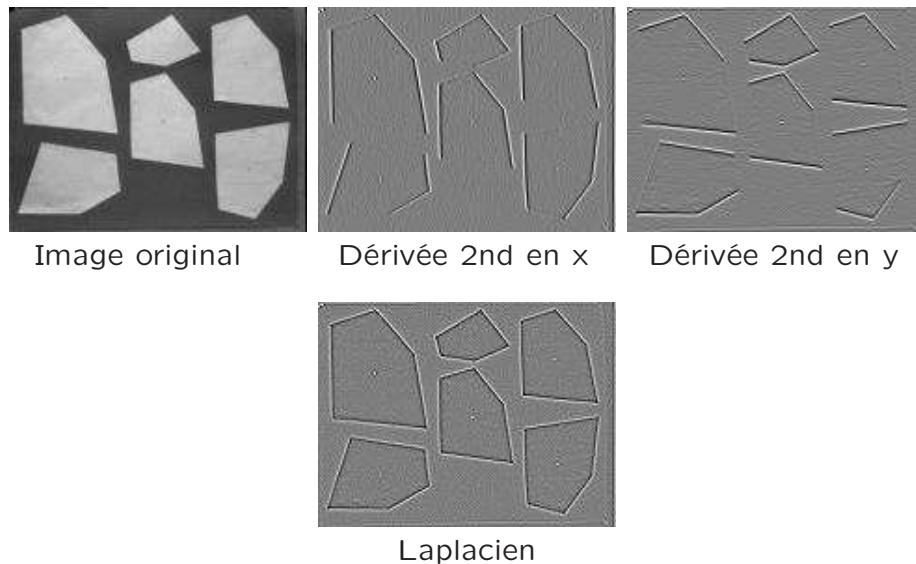
$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Autres formes

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



FILTRAGE SPATIALE FILTRE PASSE-HAUT -LAPLACIEN- (2)



Filtre Moyenneur + Dérivée 2nd

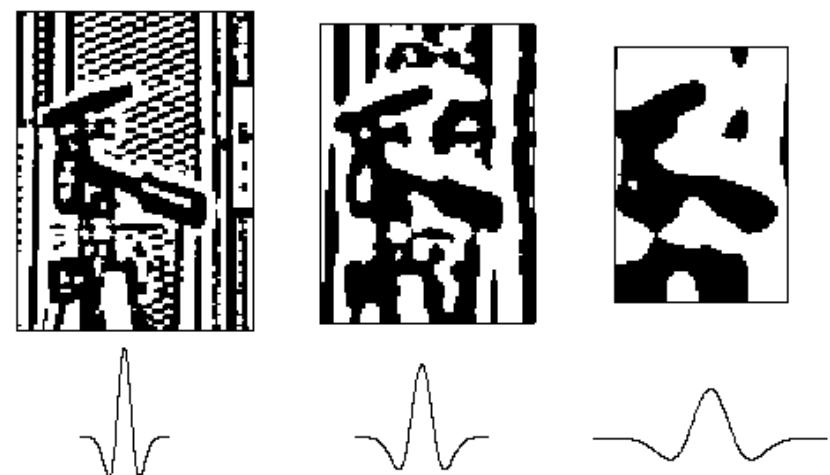
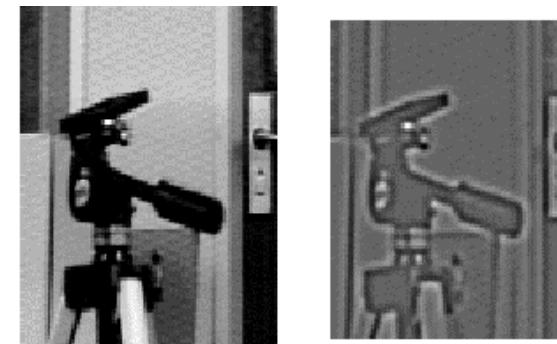
$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre Gaussien + Dérivée 2nd

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

FILTRAGE SPATIALE FILTRE DE MARR-HILDRETH (1)

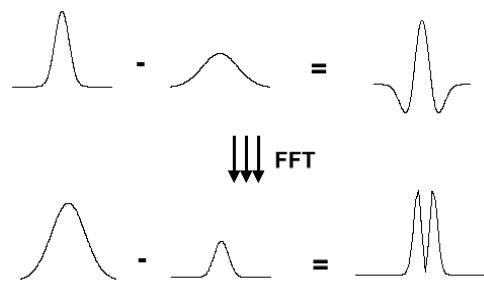
1. On filtre l'image avec un filtre Gaussien
2. On prend le laplacien de l'image filtrée



FILTRAGE SPATIALE

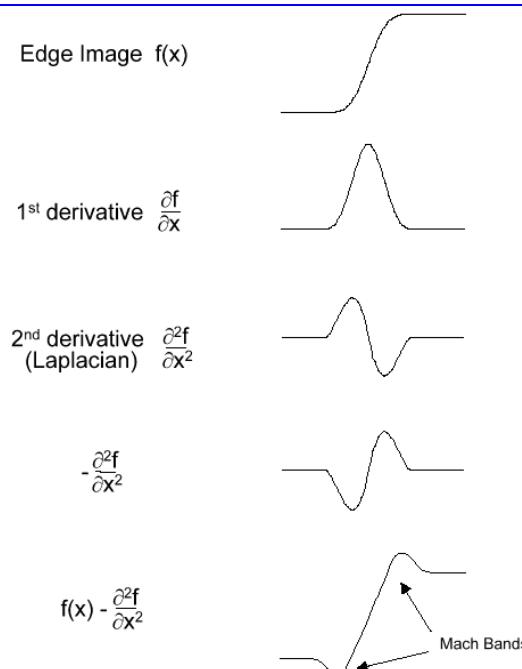
FILTRE DE MARR-HILDRETH (2)

Filtre de Marr-Hildreth \approx Différence de deux Gaussienne



► Filtre Passe-bande

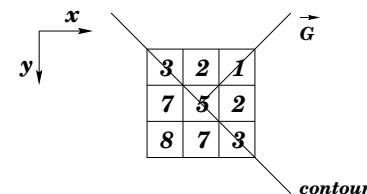
Rehaussement des contours avec le Laplacien



FILTRAGE SPATIALE

EXERCICE

Exercice 1



convoluée par l'op. gradient en x \rightarrow $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et y $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
on trouve, pour le pixel du milieu $G_y = -5$ et $G_x = 5$.
Donc, $|\vec{G}| = 10$ et $\theta = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Trouver l'allure de la réponse fréquentielle de l'opérateur de convolution

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre séparable \rightarrow $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x) \exp(-2\pi j u x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j u x) \\ &= -\exp(2\pi j u) + 3 - \exp(-2\pi j u) = 3 - 2 \cos(2\pi u) \end{aligned}$$

