DIRO
IFT 6150

# TRAITEMENT D'IMAGES

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

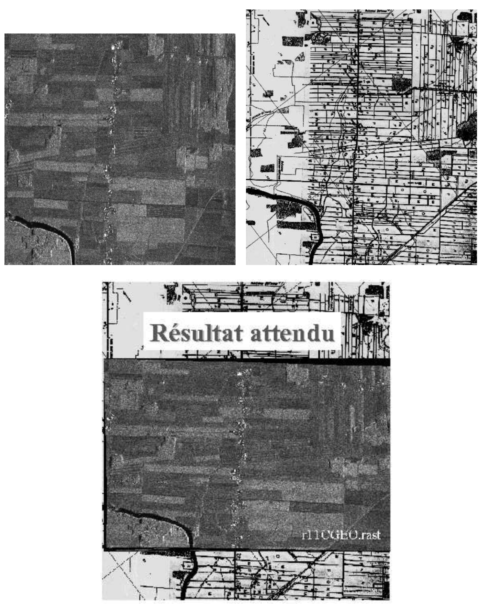
## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE

SOMMAIRE

# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
## EXEMPLES

**Exemples de distorsions géométriques**

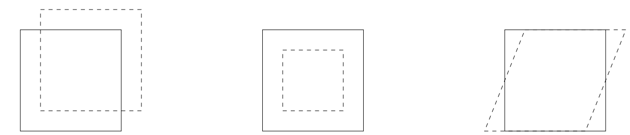
**Exemples de corrections géométriques**






# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
## TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

| *Translation* | *Echelle* | *Inclinaison* |
|---|---|---|



| Translation | Echelle | Inclinaison |
|---|---|---|
| $x' = a + x$ | $x' = a\,x$ | $x' = x + a\,y$ |
| $y' = b + y$ | $y' = b\,y$ | $y' = y$ |

**Rotation**

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\
y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta
\end{aligned}
$$

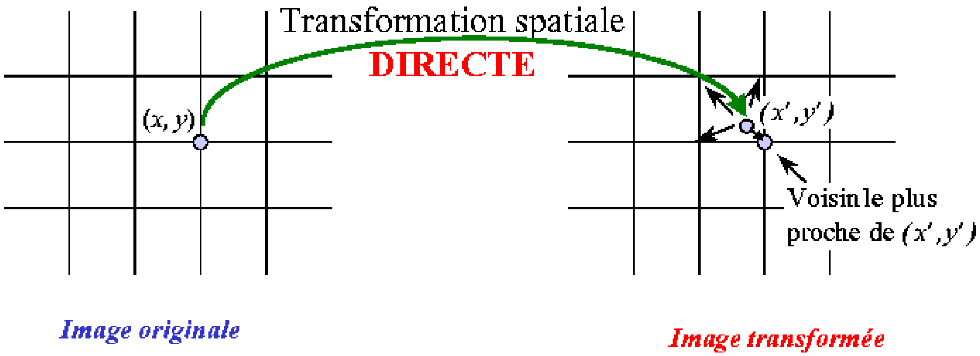
**Assignation des niveaux de gris**

▶ Nécessaire car la position d'un pixel transformé n'est pas entière

- Interpolation au voisin le plus proche
- Interpolation bilinéaire
- Autres type d'interpolation

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
### INTERPOLATION DIRECTE (1)

Transformée spatiale directe




▶ Difficile de distribuer le niveau de gris sur les pixels voisins

▶ Des "trous" peuvent apparaître car on n'a pas la certitude que tous les pixels de l'image transformée recevront une valeur

Exemple

Transformation : Facteur d'échelle 10×

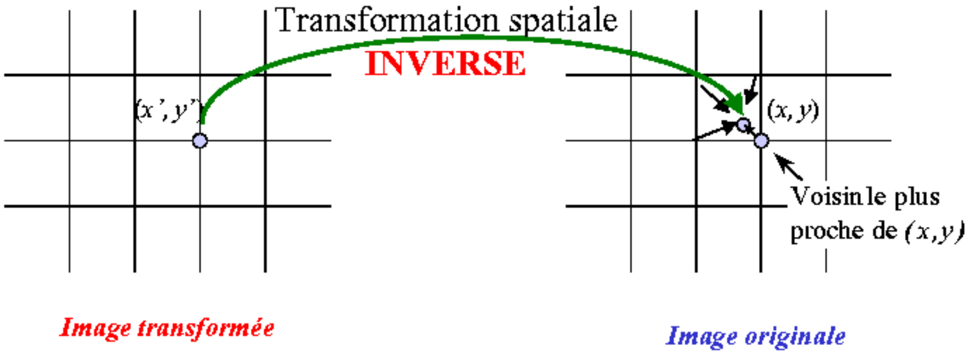
$A(x_0, y_0)$ ▶ $A(x_0, y_0)$ et $B(x_0 + 1, y_0)$ ▶ $B(x_0 + 10, y_0)$

Mais entre $A(x_0, y_0)$ et $B(x_0 + 10, y_0)$ ?



## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
### INTERPOLATION DIRECTE (2)

Transformée spatiale inverse



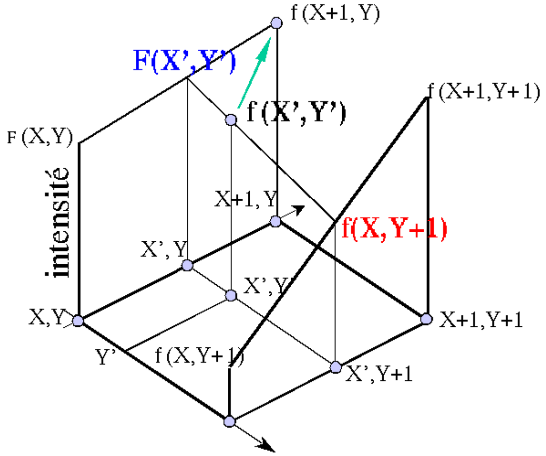

▶ Interpolation de la valeur du pixel à partir des voisins ▶ plus facile

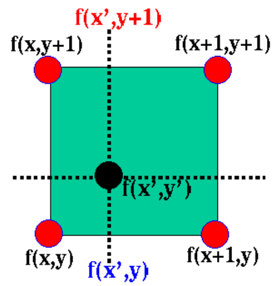
▶ Aucun "trou" car on parcourt tous les pixels de l'image transformée

Exemple

512 × 512 ▶ 64 × 64

# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
## INTERPOLATION BILINÉAIRE (1)




$$f(x,y) = ax + by + cxy + d$$

4 inconnus ▶ 4 points

**Résolution du système**

$$\begin{aligned} a &= f(x+1y) - f(x,y) \\ b &= f(x,y+1) - f(x,y) \\ c &= f(x+1,y+1) + f(x,y) - f(x,y+1) - f(x+1,y) \\ d &= f(x,y) \end{aligned}$$

(4 Multiplications et 8 additions)

**Implantation**

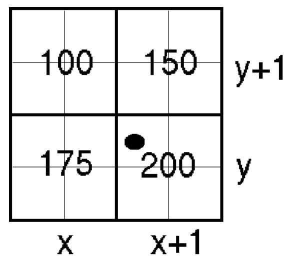
$$\begin{aligned} f(x',y) &= f(x,y) + (x'-x)[f(x+1,y) - f(x,y)] \\ f(x',y+1) &= f(x,y+1) + (x'-x)[f(x+1,y+1) - f(x,y+1)] \\ f(x',y') &= f(x',y) + (y'-y)[f(x',y+1) - f(x',y)] \end{aligned}$$

(3 Multiplications et 6 additions)



# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
## INTERPOLATION BILINÉAIRE (2)

**Exemple**




Quel est la valeur interpolée en (x+0.7, y+0.2)?

- Interpolation au voisin le plus près : 200
- Interpolation bilinéaire

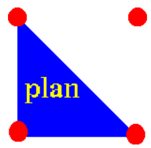
$$\begin{aligned} I(x',y) &= I(x,y) + [I(x+1,y) - I(x,y)](x'-x) \\ &= 175 + (200 - 175) \times 0.7 = 192.5 \\ I(x',y+1) &= I(x,y+1) + [I(x+1,y+1) - I(x,y+1)](x'-x) \\ &= 100 + (150 - 100) \times 0.7 = 135 \\ I(x',y') &= I(x',y) + [I(x',y+1) - I(x',y)](y'-y) \\ &= 192.5 + (135 - 192.5) \times 0.2 = 181 \end{aligned}$$

**Exemple**

$512 \times 512$ ▶ $64 \times 64$

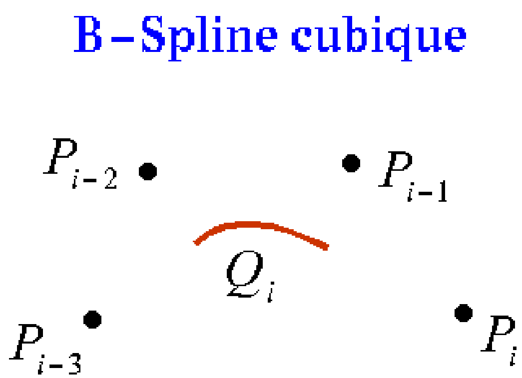
## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE
### AUTRES INTERPOLATION

Interpolation linéaire




$$f(x, y) = ax + by + c$$

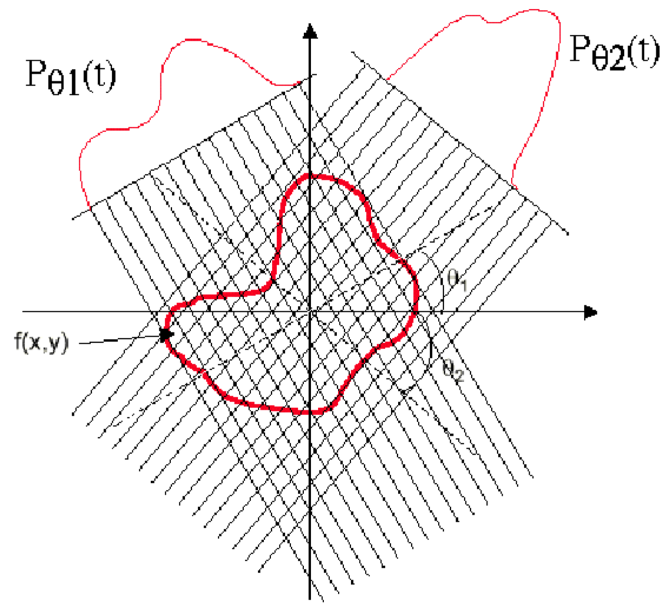
B-splines cubique




$$Q_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

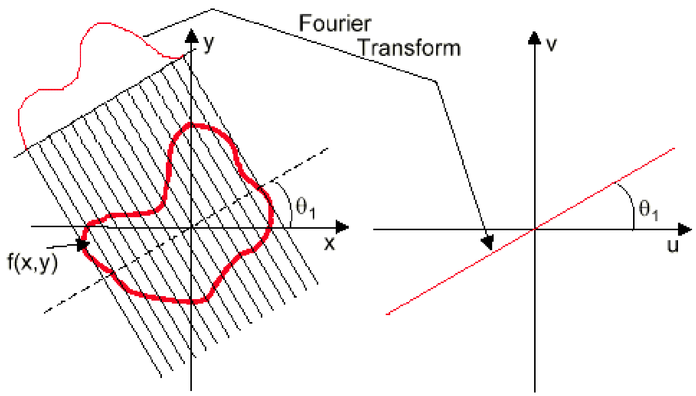


## TOMOGRAPHIE
### RECONSTRUCTION À PARTIR DE PROJECTIONS



# TOMOGRAPHIE

## THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (1)




Considérons la Transformée de Fourier de $f(x,y)$

$$F(u,\nu) = \iint f(x,y)\exp\left(-2\pi j(ux+\nu y)\right)dx\,dy$$

Que représente la ligne $\nu = 0$ du spectre de Fourier ?

$$F(u,0) = \int \left[\int f(x,y)\,dy\right] \exp\left(-2\pi j(ux)\right)dx$$

$$F(u,0) = \mathcal{F}(p_{\theta=0^\circ}(t)) \text{ de même } F(0,\nu) = \mathcal{F}(p_{\theta=90^\circ}(t))$$

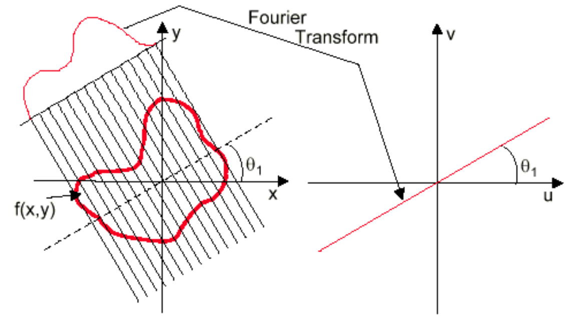
**Plus généralement, pour une projection de l'image suivant un angle $\theta$ (i.e., suivant un axe de projection passant par l'origine et orienté selon un angle $\theta$)**

$$\boxed{p_\theta(t) = \int_l f(x,y)\,dl}$$



# TOMOGRAPHIE

## THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (2)




Une ligne de projection au point $t$ est (cf. Hough)

$$x\cos\theta + y\sin\theta = t$$

On obtient donc

$$p_\theta(t) = \iint f(x,y)\,\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\,dx\,dy$$

La TF de $p_\theta(t)$ est

$$P_\theta(w) = \int p_\theta(t)\exp\left(-2\pi jwt\right)\,dt$$

$$P_\theta(w) = \int \left[\iint f(x,y)\,\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\,dx\,dy\right]\exp\left(-2\pi jwt\right)dt$$

En utilisant la propriété du $\delta$, $\left(f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)\right)$

$$P_\theta(w) = \iint f(x,y)\exp\left(-2\pi jw[x\cos\theta + y\sin\theta]\right)dx\,dy$$

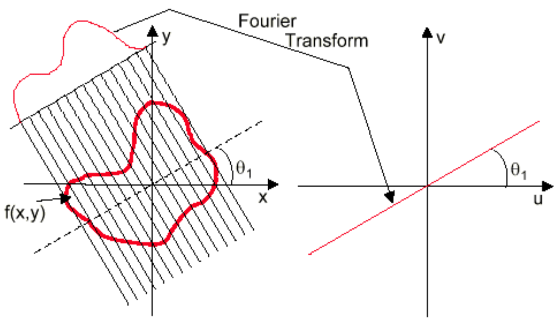
Sachant que la TF 2D est

$$F(u,\nu) = \iint f(x,y)\exp\left(-2\pi j(ux+\nu y)\right)dx\,dy$$

# TOMOGRAPHIE
## THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (3)

Si on pose $u = w\cos\theta$ et $\nu = w\sin\theta$, on a l'équation de l'axe de projection dans le domaine de Fourier

**Donc à une ligne du spectre de Fourier d'orientation $\theta$ correspond la TF de la projection de l'image selon cet angle**



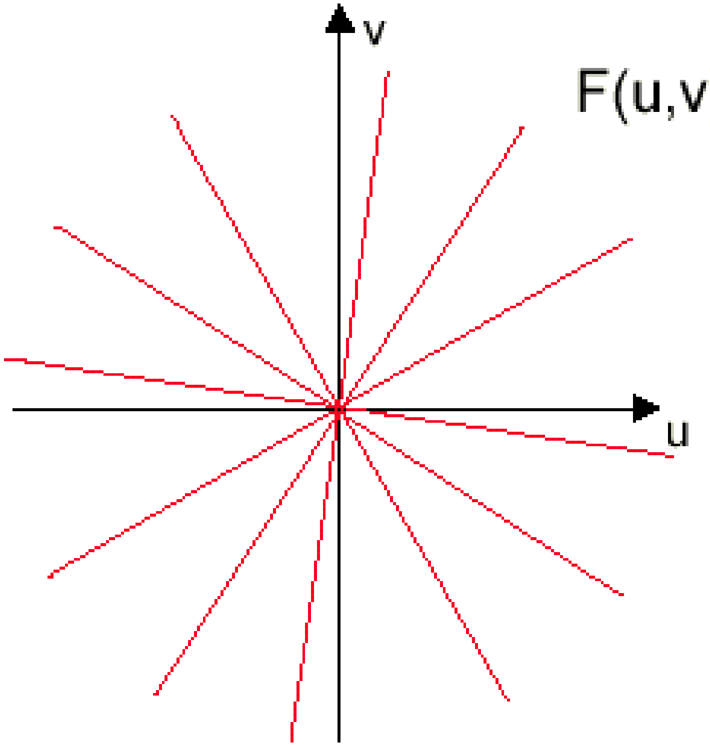

Si on empile les différentes projections $p_\theta(t)$ d'une image dans une matrice $g(\theta, t)$, on obtient la Transformée de Radon

Image lenna

TF Radon



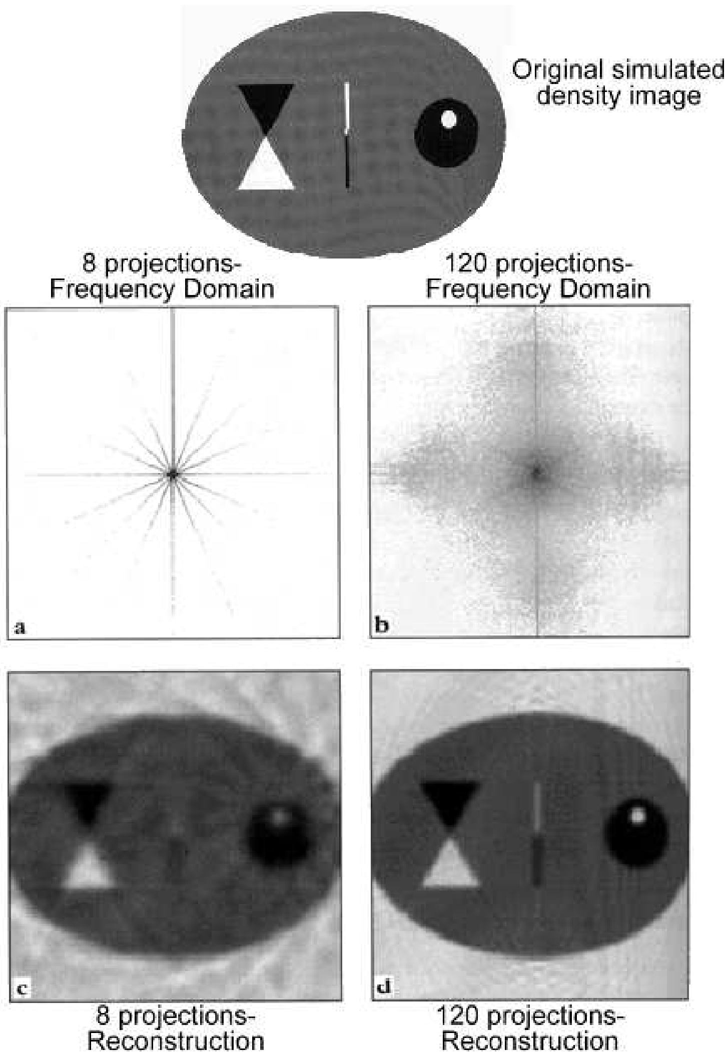
# TOMOGRAPHIE
## RECONSTRUCTION




Reconstruction

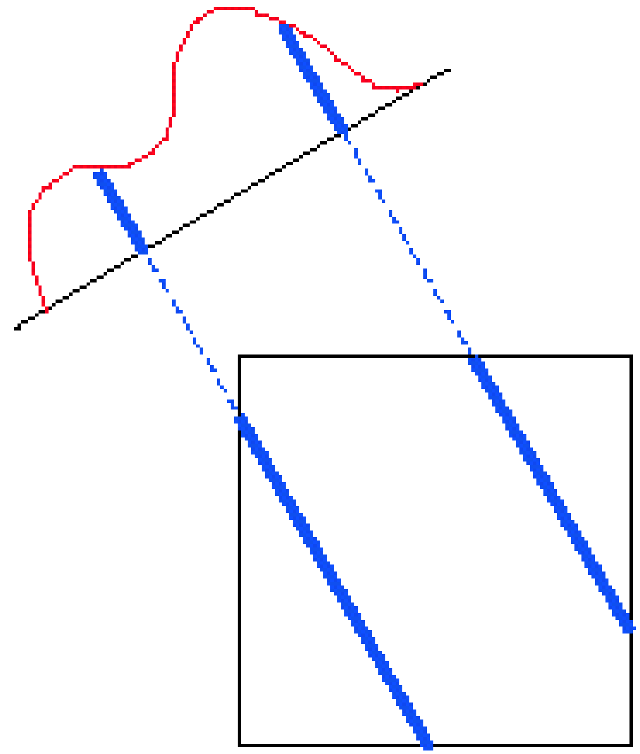
- Interpolation des points manquant de $F(u, \nu)$, par exemple ▶ interpolation bilinéaire
- Transformée de Fourier inverse de $F(u, \nu)$ pour obtenir $f(x, y)$ ▶ Cf. TP

## TOMOGRAPHIE
### EXEMPLES





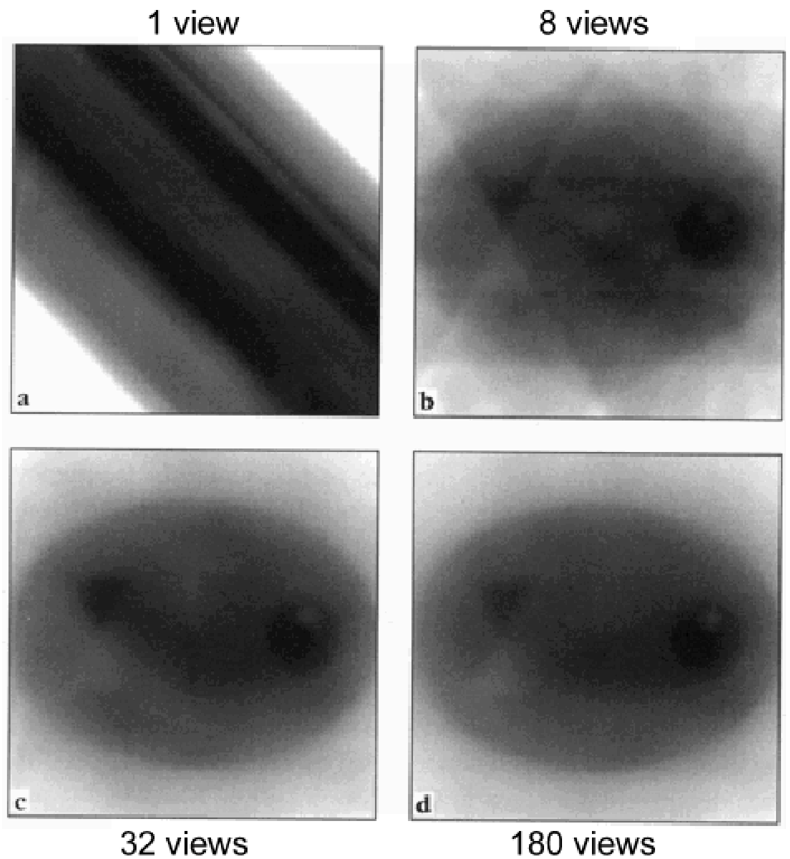

## TOMOGRAPHIE
### RÉTROPROJECTION (1)



Principe de la rétroprojection

- $p_\theta(t)$ est rétroprojeté le long des lignes de projections
- Les valeurs de $p_\theta(t)$ sont ajoutées aux valeurs existantes obtenues des autres projections

## TOMOGRAPHIE
### RÉTROPROJECTION (2- EXEMPLE)




▶ Reconstruction floue

Un point rétroprojeté ne donnera pas un point
mais une "tache"

Solution : Infinité de Projections



## TOMOGRAPHIE
### RÉTROPROJECTION FILTRÉE (3)

La TF inverse de $F(u,\nu)$ est

$$f(x,y) = \int\int F(u,\nu)\,\exp\left(2\pi j(ux+\nu y)\right)\,du\,d\nu$$

En coordonnées polaires

$$f(x,y) = \int\int F(w,\theta)\,\exp\left(2\pi j(xw\cos\theta + yw\sin\theta)\right)|w|\,dw\,d\theta$$

Puisqu'on obtient $F(w,\theta)$ à partir des projections $P_\theta(w)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int\int \Big[P_\theta(w)|w|\Big]\,\exp\left(2\pi jw(x\cos\theta + y\sin\theta)\right)\,dw\,d\theta \\ &= \int\int\Big[\int P_\theta(w)|w|\,\exp\left(2\pi jwt\right)dw\Big]\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\,dt\,d\theta \\ &= \underbrace{\int\int p_\theta(t)_{\text{filtrée}}\,\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)dt\,d\theta}_{\text{Rétroprojection de } p_\theta(t)} \end{aligned}$$

(le long d'une ligne de projection d'orientation $\theta$
et passant par l'origine)

Principe de la rétroprojection filtrée

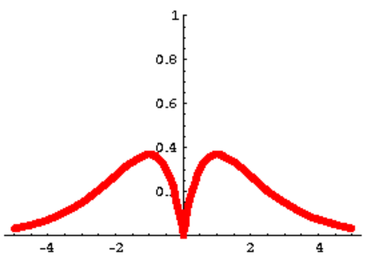
- On calcule $P_\theta(w)|w|$ (projection filtrée)
- On fait la TF inverse de $P_\theta(w)_{\text{filtrée}}$
- On rétroprojeté pour tous les angle $\theta$

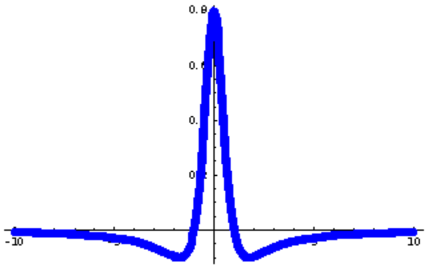
# TOMOGRAPHIE

## RÉTROPROJECTION FILTRÉE (4)

Réduction du bruit

- L'objet à reconstruire est bande-limité
- On a donc généralement interêt à multiplier dans le domaine fréquence par une fenêtre de Hamming (filtre passe-bas)
- $|u|$ n'es pas carré intégrable (Fourier inverse impossible)



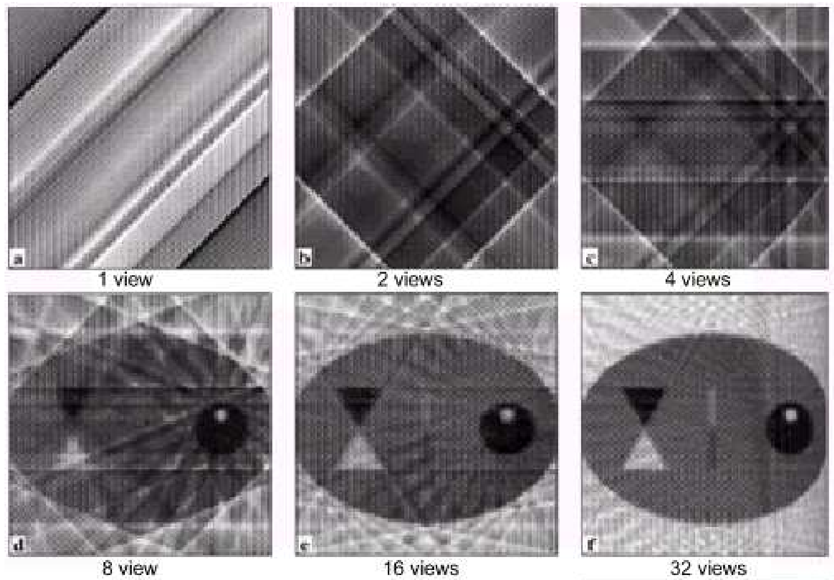



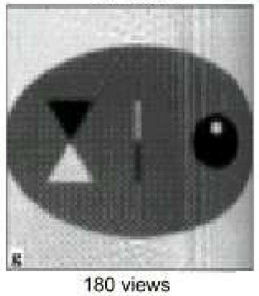


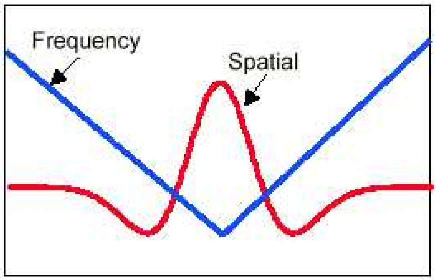

# TOMOGRAPHIE

## RÉTROPROJECTION FILTRÉE (5)

Exemple




Filter