

TRAITEMENT D'IMAGES

BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

SOMMAIRE

Seuillage

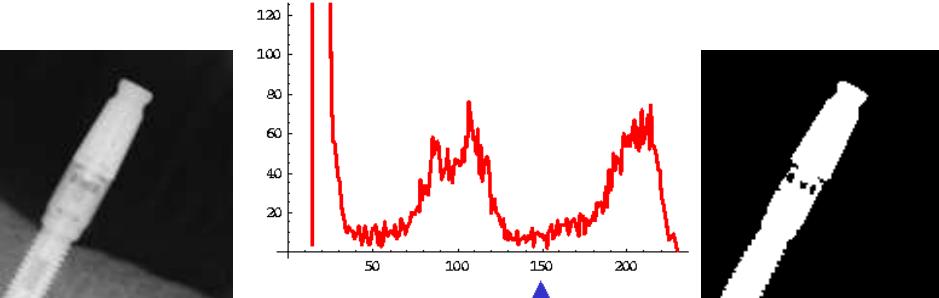
Seuillage par Inspection	2
Seuillage Optimale	4
Seuillage Locale	7
Seuillage & Filtrage	9

Morphologie Mathématique

Théorie des Ensembles	10
Translation	11
Dilatation	12
Érosion	15
Détection des Contours	17
Estimation de Squelette	18
Remplissage	19
Détection	20
Ouverture	21
Fermeture	22
Propriétés de l'Ouverture/Fermeture	23
Filtrage Morphologique	24
Autres Applications	25
Morphologie en Niveaux de Gris	26
Exemples	27

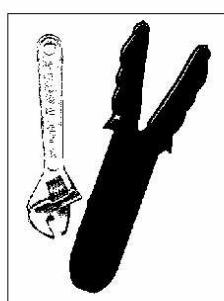
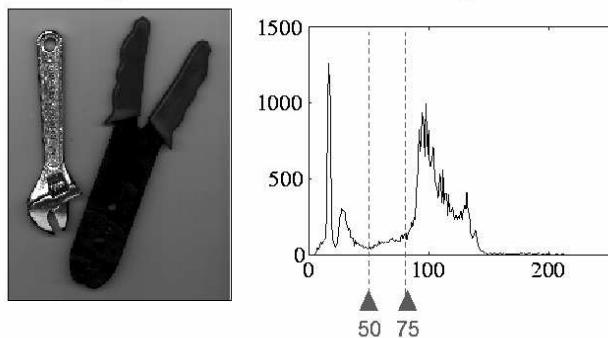
BINARISATION SEUILLAGE PAR INSPECTION (1)

Seuillage par inspection de l'histogramme

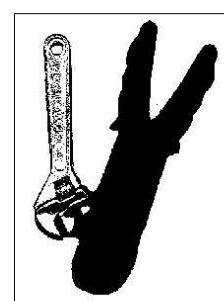


Original

Histogram



Threshold = 50



Threshold = 75

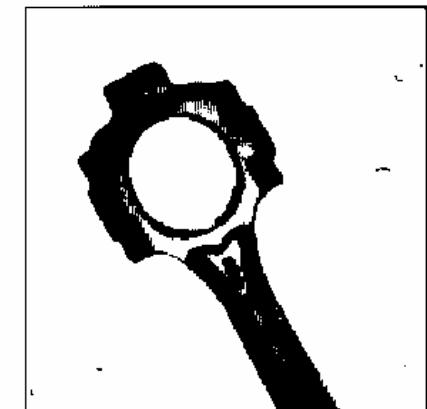
BINARISATION SEUILLAGE PAR INSPECTION (2)

Seuillage par inspection de l'histogramme

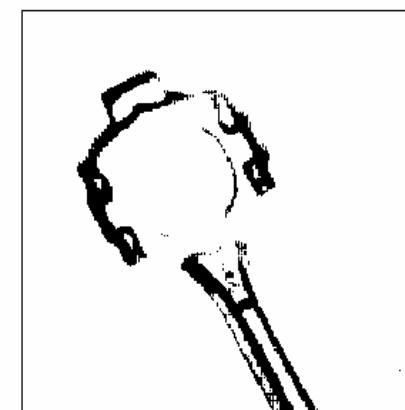
Original Image



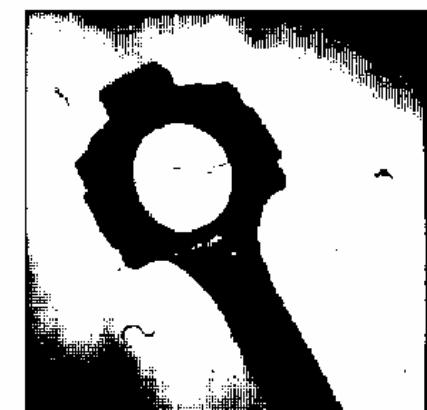
Binary Image



Threshold too low



Threshold too high



BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (1)

Seuillage optimal



Soit deux régions (arrière-plan et objet) présent dans une image

La probabilité $P(z)$ d'avoir une valeur de niveau de gris z ($z \in [0, 255]$ par ex.) dans l'image est donnée par

$$p(z) = P_1 p_1(z) + P_2 p_2(z)$$

P_i : prop. de pixels appartenant à la région i ($P_1 + P_2 = 1$)

$p(z)$: Histogramme de l'image

$p_i(z)$: proba. d'un pixel \in région i d'avoir un $ng = z$

Si nous supposons que $p_1(z)$ et $p_2(z)$ sont distribués selon une loi normale, nous obtenons

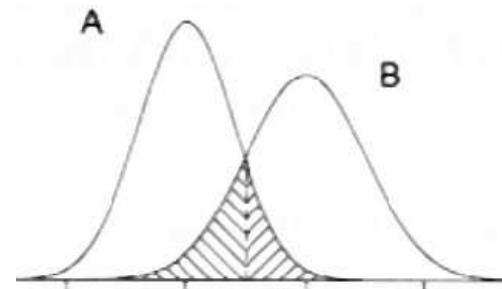
$$p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (2)

$p(z)$ devient alors

$$p(z) = P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + P_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$



Soit E_1 , la probabilité de classer un pixel dans la classe 1 lorsqu'il appartient à la classe 2 et E_2 , la proba. de classer un pixel dans la classe 2 lorsque celui-ci appartient à la classe 1.

Les probabilités d'erreur sont données par

$$E_1(T) = \int_{-\infty}^T p_2(z) dz \quad \text{et} \quad E_2(T) = \int_T^{\infty} p_1(z) dz$$

La probabilité d'erreur totale est alors donnée par

$$E(T) = P_2 E_1(T) + P_1 E_2(T)$$

Cherchons une valeur de T qui minimise $E(T)$

$$\begin{aligned} E'(T) &= -P_1 p_1(T) + P_2 p_2(T) = 0 \\ P_1 p_1(T) &= P_2 p_2(T) \end{aligned}$$

BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (3)

Après simplification, nous obtenons une expression de la forme

$$AT^2 + BT + C = 0$$

Avec

$$A = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

$$B = 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2)$$

$$C = \mu_2^2 \sigma_1^2 - \mu_1^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_2 P_1}{\sigma_1 P_2}\right)$$

- Lorsque les variances sont égales

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

- Lorsque les variances et les proportions sont égales

$$P_1 = P_2$$

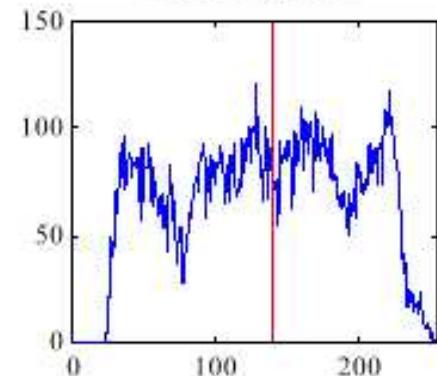
$$T = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

BINARISATION SEUILLAGE LOCALE (1)

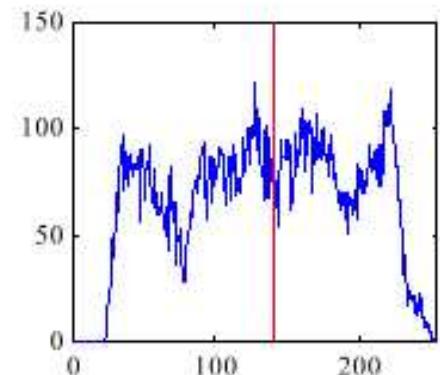
Original



Histogram

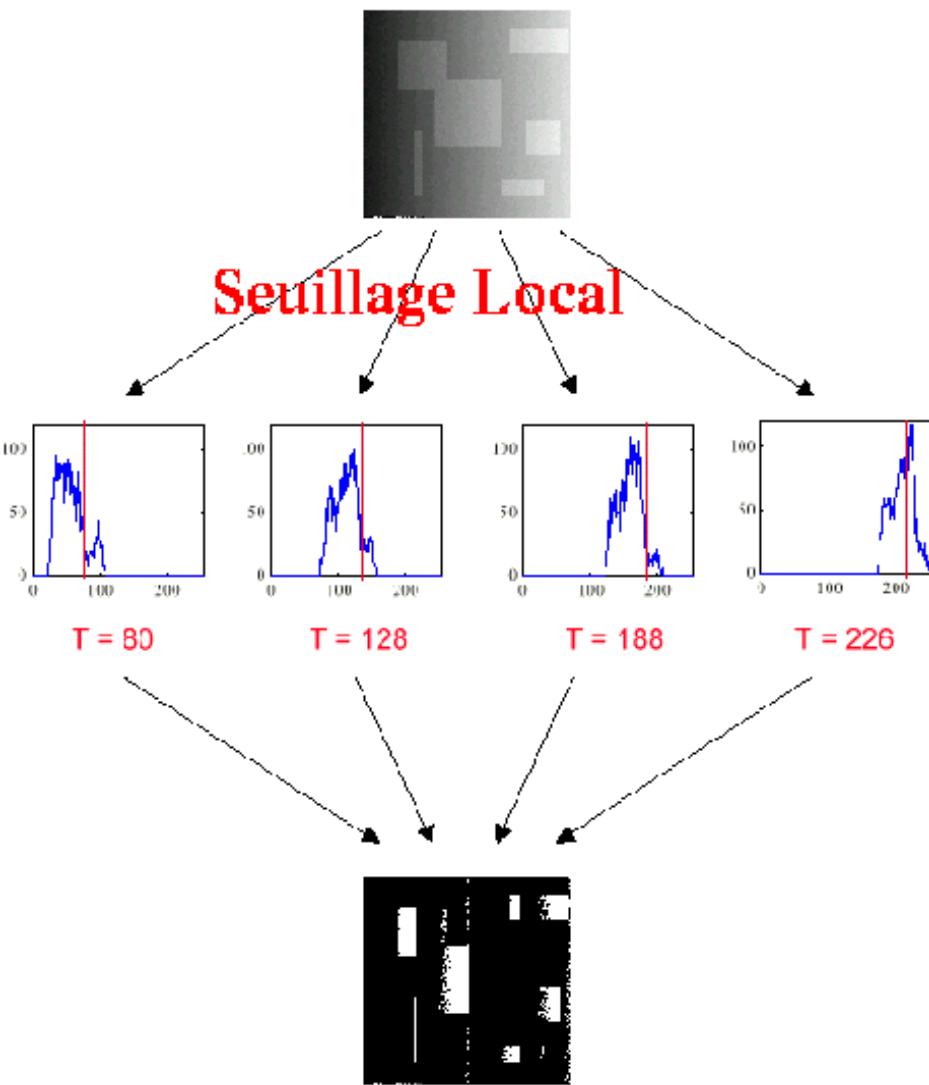


Single Global Threshold

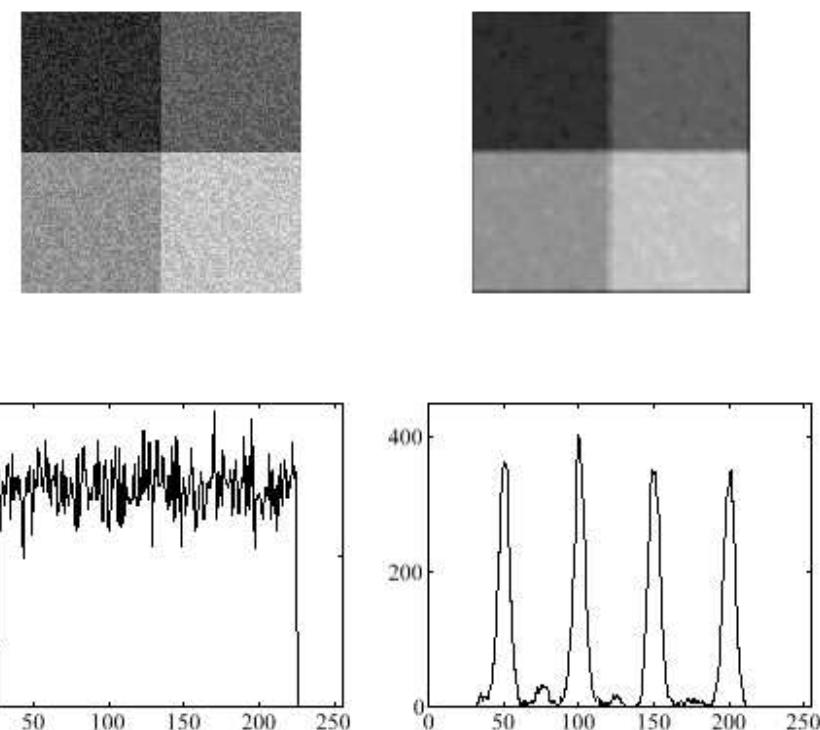


$T = 128$

BINARISATION SEUILLAGE LOCALE (2)



BINARISATION SEUILLAGE & FILTRAGE



Le bruit complique la sélection d'un seuil
► Filtrage passe-bas

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

THÉORIE DES ENSEMBLES

- Traitement d'image basé sur la théorie des ensembles



Quelques images binaires

A, B = Ens. des pixels = Ens. des coordonnées

$A \cup B$ = $\{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$ Union

$A \cap B$ = $\{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$ Intersection

A^C = $\{ x \mid x \notin A \}$ Complément

$A - B$ = $\{ x \mid x \in A, x \notin B \}$ Différence

$(A)_C$ = $\{ x \mid x = a + c, a \in A \}$ Translation

\hat{A} = $\{ x \mid -x \in A \}$ Inversion

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

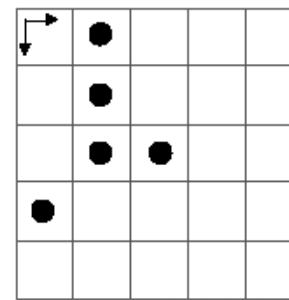
TRANSLATION

Translation

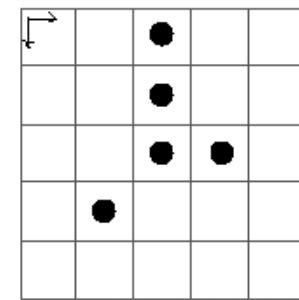
$$A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (0,3)\}$$

$$x = (1,0)$$

$$(A)_x = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (1,3)\}$$



A



$(A)_x$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DILATATION (1)

Dilatation

$$A \oplus B = \{ x \mid x = a + b, a \in A, b \in B \}$$

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$

Figure 1 consists of two 5x5 Go boards. The left board shows a local solution for player 1 with a circled 'L' at (0,0). The right board shows a local solution for player 2 with a circled 'L' at (1,0).

B : Élément structurant

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DILATATION (2)

$$A \oplus B = \boxed{\text{Diagram showing the Minkowski sum of two sets } A \text{ and } B.}$$

$$A \oplus B = \boxed{A \oplus B}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\text{A}} & \oplus & \boxed{\text{B}} = \boxed{\text{A} \oplus \text{B}}
 \end{array}$$



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DILATATION (3)

Propriétés de la dilatation

$$A \oplus B = B \oplus A$$

Commutative

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

Associative

$$A \subset B \Rightarrow C \oplus A \subset C \oplus B$$

Monotone

$$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$

Distributive

$$(A \cap B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$$

Érosion

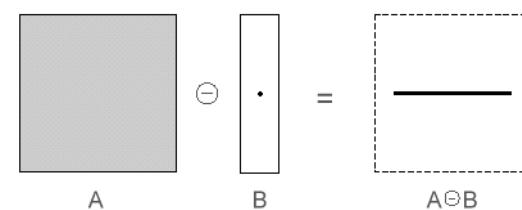
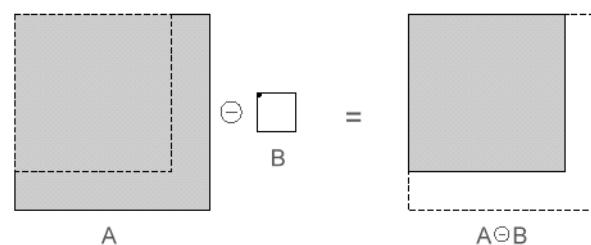
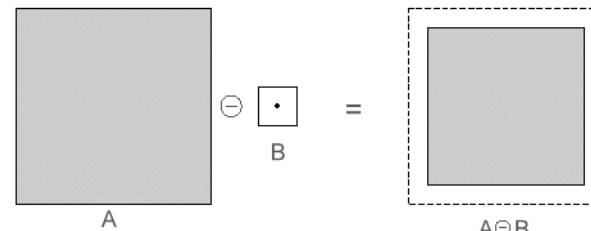
$$A \ominus B = \{ x \mid x + b \in A, \forall b \in B \}$$

$$A \ominus B = \{ x \mid (B)_x \subset A \}$$

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

ÉROSION (2)



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE ÉROSION (3)

Propriétés de l'érosion

$$A \subseteq B \Rightarrow A \ominus C \subseteq B \ominus C$$

Monotone

$$A \supseteq B \Rightarrow C \ominus A \subseteq C \ominus B$$

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus B^c$$

Erosion vs Dilation

Note:

$$(A \ominus B) \subseteq A \quad ?$$

Non! Exemple:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} & \ominus & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & \bullet & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & \bullet & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \\ A & & B & & A \ominus B \end{array}$$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE DÉTECTION DE CONTOURS



Original



Eroded



Edges = Original - Eroded

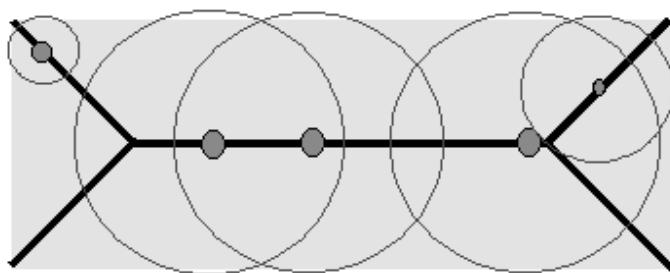
MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

ESTIMATION DE SQUELETTE

Squelette d'un objet

► Estimation de l'axe intermédiaire d'un objet

(Méthode des feux de prairies ou des disques circulaires)



Original

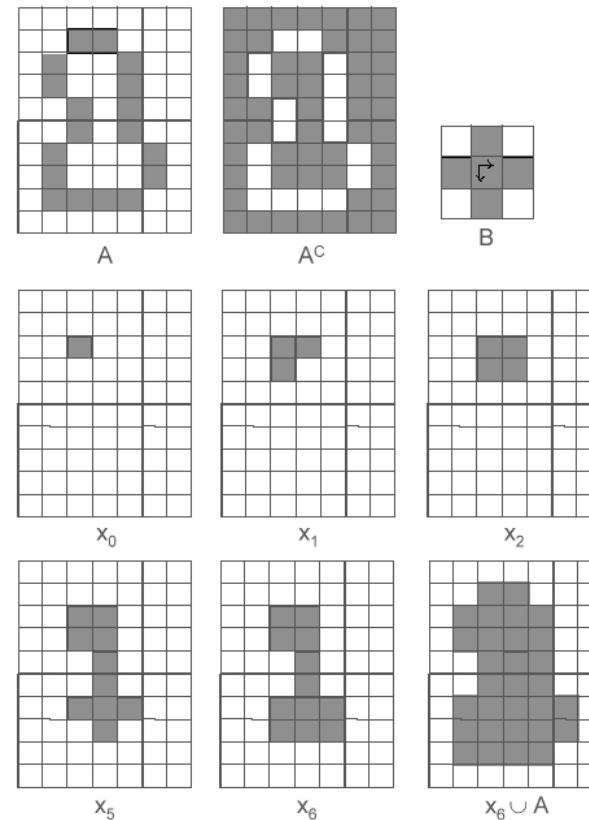
Erosion

Multiple Erosion =
Skeleton

Si on conserve les derniers résultats juste avant
la disparition du point ou du segment

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

REMPISSAGE

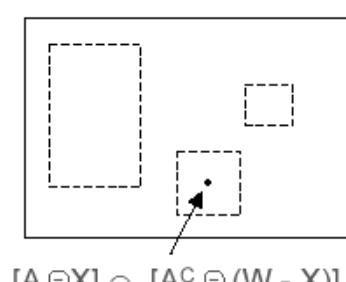
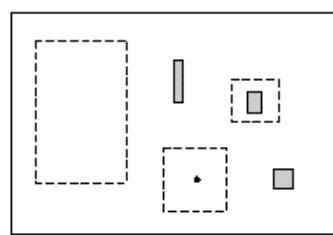
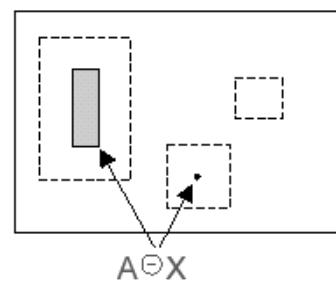
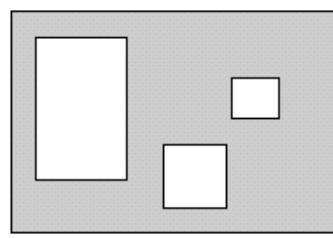
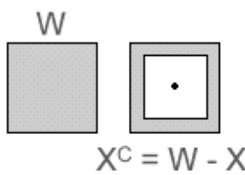
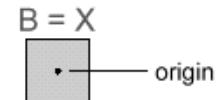
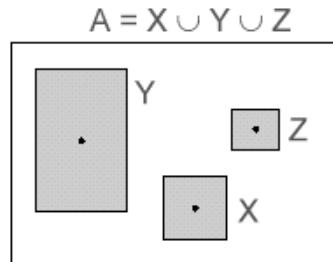


$$x_k = (x_{k-1} \oplus B) \cap A^c$$

- Répéter jusqu'à $x_k = x_{k-1}$
- Contour rempli : $x_k \cup A$
- Germe x_0 : point à l'intérieur

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DÉTECTION (HIT OR MISS)

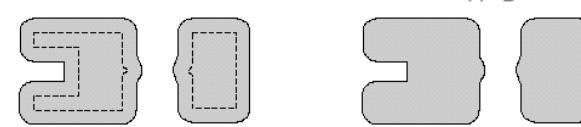
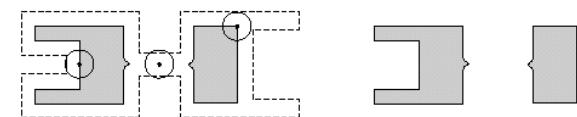
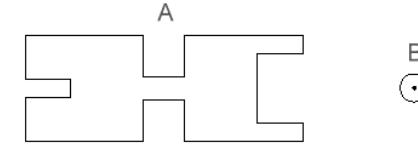


$$[A \ominus X] \cap [A^c \ominus (W - X)]$$

W : fenêtre englobant l'objet X à détecter

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

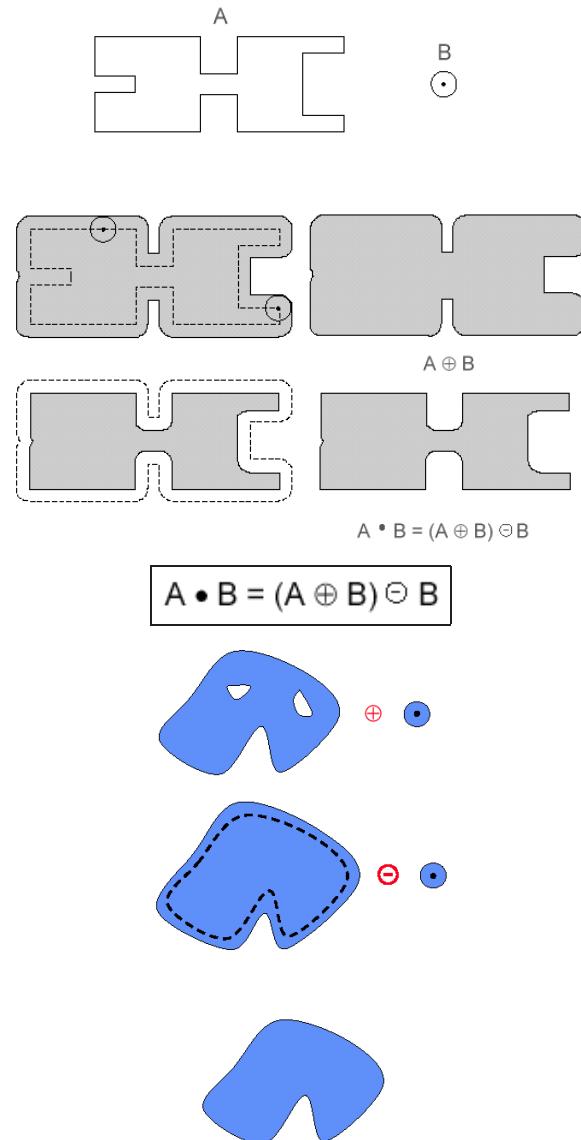
OUVERTURE



$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE FERMETURE



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE PROPRIÉTÉS DE L'OUVERTURE ET FERMETURE

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

$$A \circ B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \circ C \subseteq B \circ C$$

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

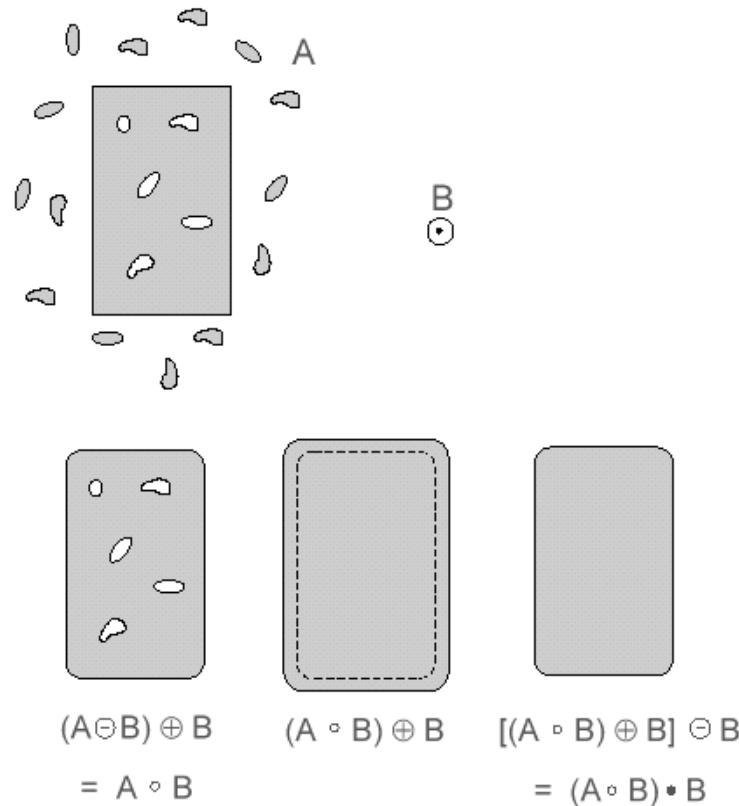
$$A \bullet B \supseteq A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \bullet C \subseteq B \bullet C$$

$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

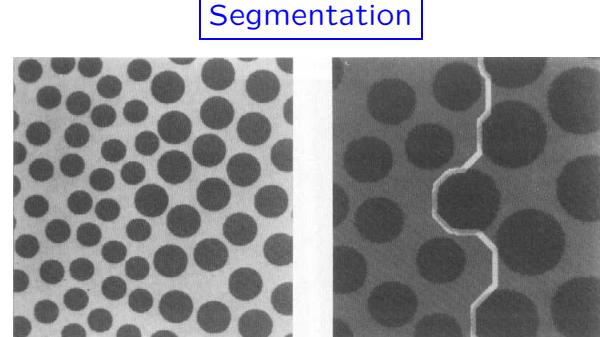
MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

FILTRAGE MORPHOLOGIQUE (BRUIT)

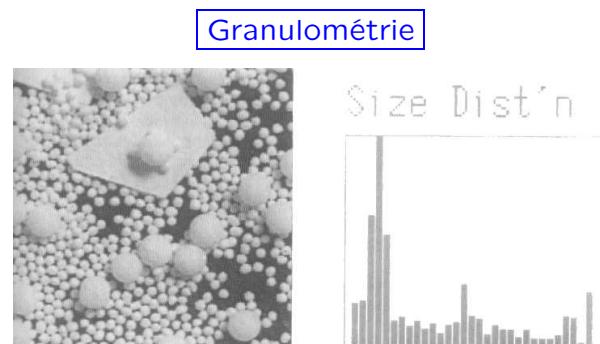


MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

AUTRES APPLICATIONS



- Ouverture avec un élément structurant qui fait disparaître les petits disques noirs
- Fermeture qui fusionne les gros disques
- Détection du contour



- Ouverture avec des éléments structurant de taille croissante pour faire disparaître les granules blancs successivement en fonction de leur taille
- Moyenne de la différence avec l'image précédente pour obtenir le nombre d'occurrence

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

MORPHOLOGIE EN NIVEAUX DE GRIS

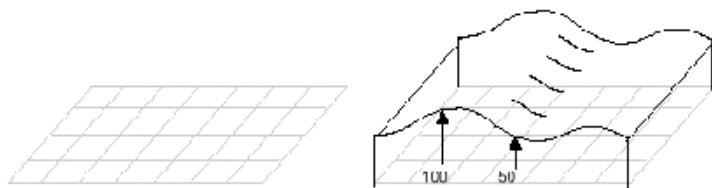
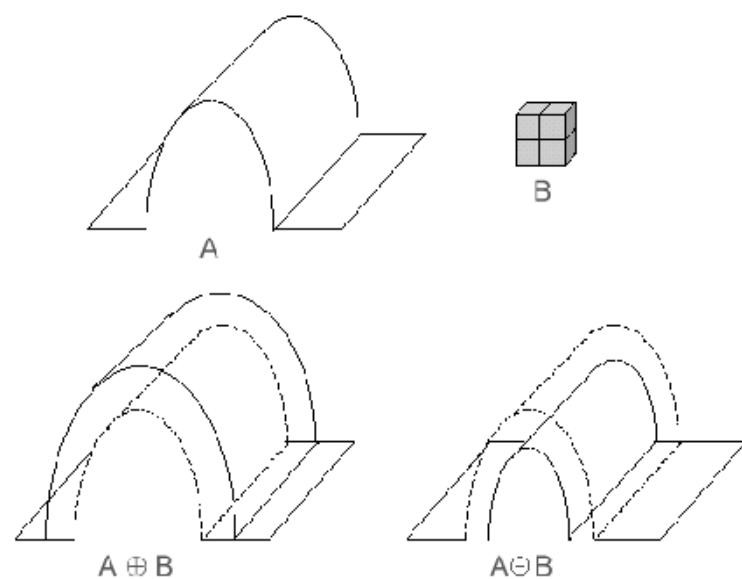


Image
NdeG



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

EXEMPLES (1)



Original



Dilation



Erosion



Opening

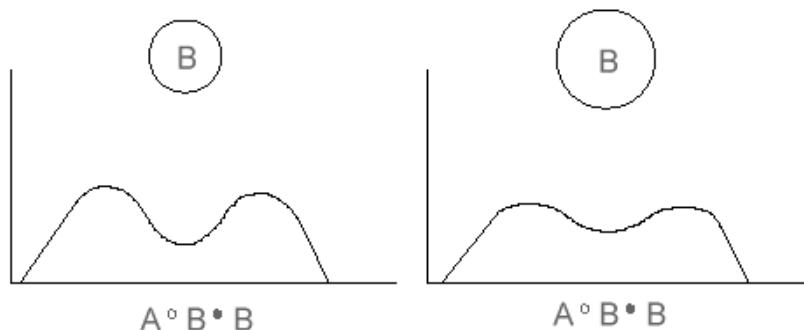
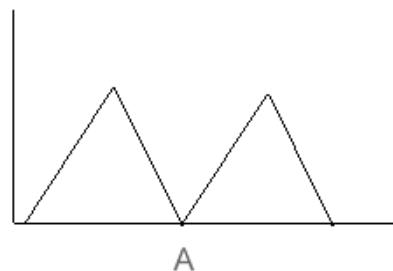
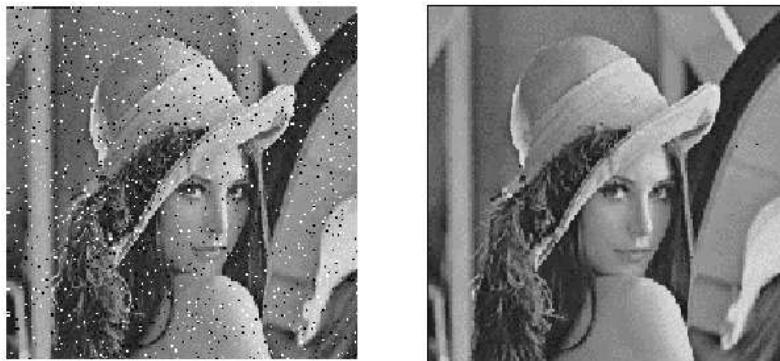


Closing

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

EXEMPLES (2- FILTRAGE PASSE-BAS)

Bruit Poivre & Sel



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

EXEMPLES (3)

Restauration de documents imprimés

ponent is similar in the section 2 this system for

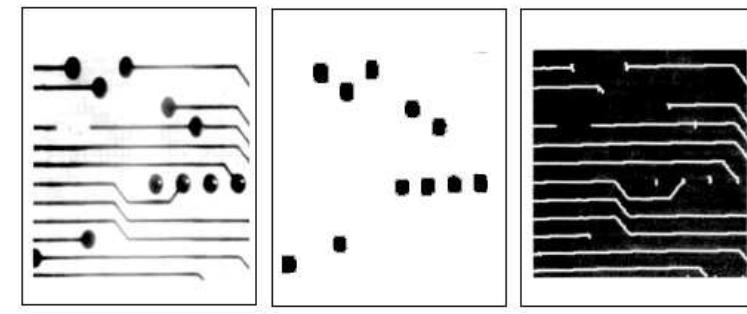
Poivre test image.

ponent is similar in the section 2 this system for

Restored test image.

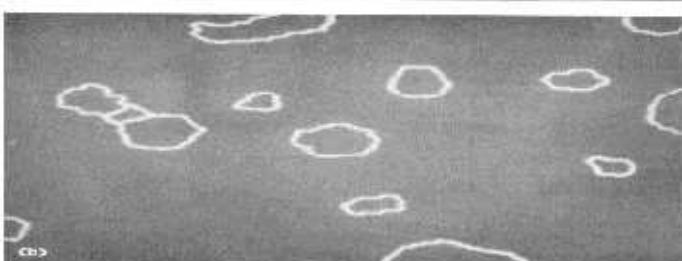
$$A \circ B \bullet B$$

Segmentation de Circuit imprimés



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE EXEMPLES (4)

Segmentation



$A \oplus B - A \ominus B$



Original

$A \oplus B$

$A \ominus B$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE EXEMPLES (5)



Original

$A \circ B$

$A \bullet B$



Original

$A \circ B \bullet B$

$A \oplus B - A \ominus B$