



DIRO  
IFT 6150

# TRAITEMENT D'IMAGES SEGMENTATION D'IMAGES

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

# SEGMENTATION D'IMAGES

## SOMMAIRE

Introduction .....	2
Segmentation par approche Split & Merge ...	4
Rappel de Probabilité .....	6
Champ Markovien .....	10
Approche Markovienne de Segmentation .....	13
Segmentation par Snake .....	22

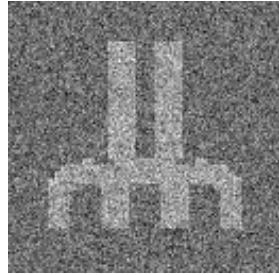
# SEGMENTATION D'IMAGES

## INTRODUCTION (1)

### But de la Segmentation

- Partitioner une image en régions homogènes (au sens des NdG, du mouvement, de la texture, etc.)

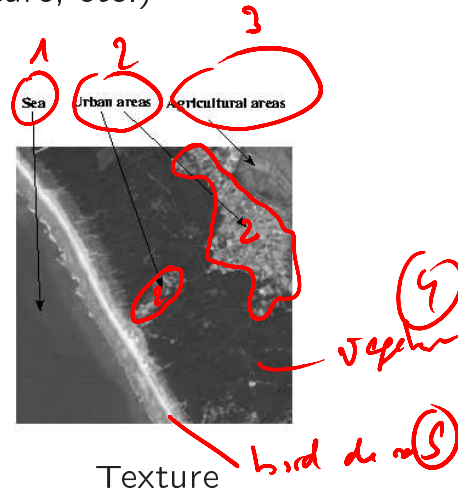
### Exemples



NdG



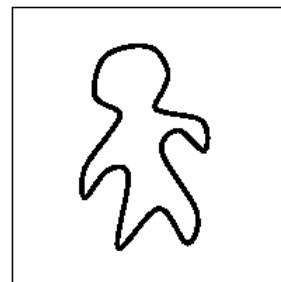
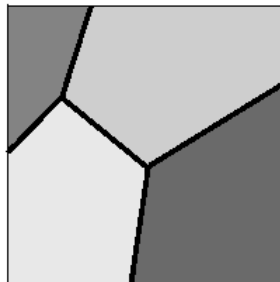
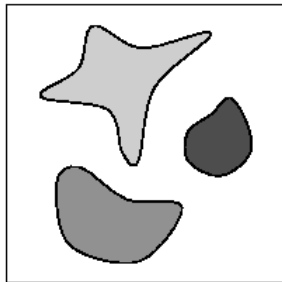
Mouvement



Texture

### Méthodes Possibles

- Détection des bords des différentes régions
  - segmentation des contours (ex : Snake)
- Détection directe des régions sans les contours
  - segmentation des régions (ex : Markov)



# SEGMENTATION D'IMAGES

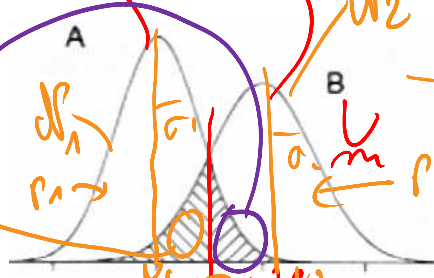
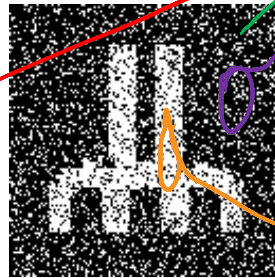
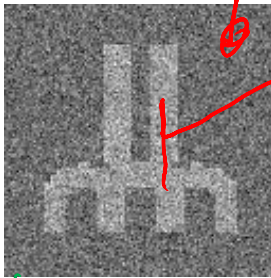
## INTRODUCTION (2)

### Conditions de toute bonne segmentation

- La segmentation doit être complète (i.e., chaque pixel doit être dans une classe)
- Les pixels appartenant à la même région doivent être connectés
- Les régions doivent être disjointes

### Rappel

### Seuillage MV



Amélioration possible grâce aux techniques utilisant la Morphologie Mathématique

► Cf. Chap. Binarisation & Morphologie Mathématique

Seuillage MAP

Seuillage MV

$$z \rightarrow P_1 \mathcal{N}(z; \mu_1, \sigma_1) = P_2 \mathcal{N}(z; \mu_2, \sigma_2)$$

$$z \rightarrow \mathcal{N}(z; \mu_1, \sigma_1) = \mathcal{N}(z; \mu_2, \sigma_2)$$

maximiser la vraisemblance

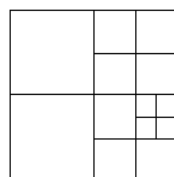
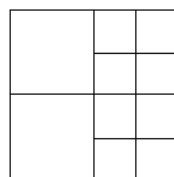
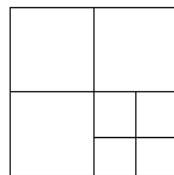
Markov

# SEGMENTATION D'IMAGES

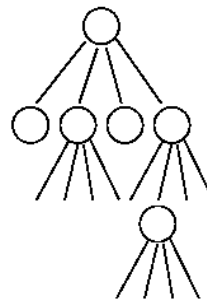
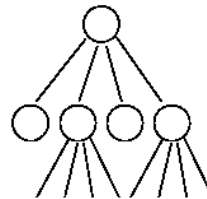
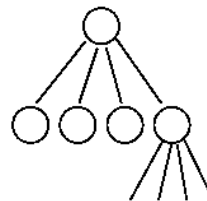
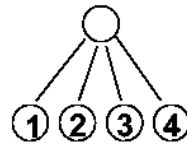
## SEGMENTATION PAR APPROCHE SPLIT & MERGE (1)

Représentation de l'image par un Quad-arbre

**Image**



**Quad Tree**



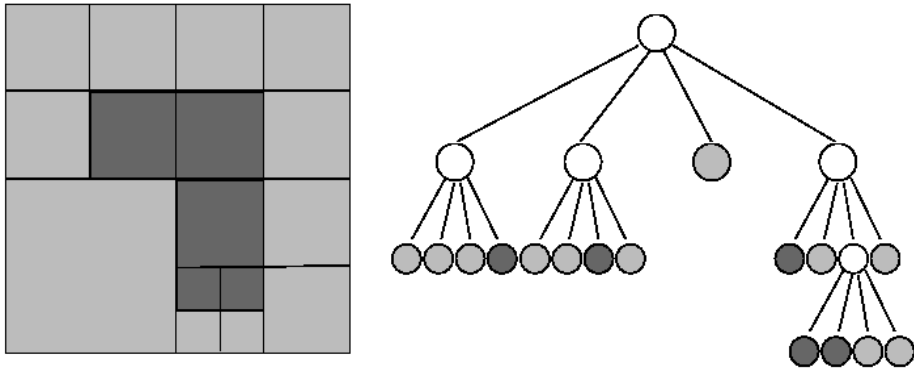
# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR APPROCHE SPLIT & MERGE (2)

### Algorithme

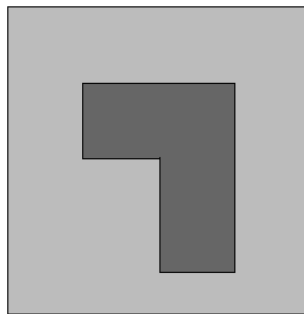
- **Split**

Divise l'image en régions en utilisant une représentation de l'image en Quad-arbre



- **Merge**

Rassemble les feuilles du Quad-arbre qui sont voisines et similaire (au sens des NdG, textures, etc.)



# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR APPROCHE MARKOVienne (1)

### Rappel sur les Probabilités et les Variables Aléatoires

Notons l'événement certain par  $\mathbf{I}$ . Considérant deux événements  $A$  et  $B$ ,  $A \cup B$ , note l'événement où tous les deux se produisent.  $A$  et  $B$  sont mutuellement exclusifs s'ils ne peuvent se produire en même temps ( $A \cap B = \emptyset$ ).

---

### Probabilité

La probabilité d'un événement  $A$  est le nombre  $P(A)$  satisfaisant les axiomes suivantes

- (i)  $P(A)$  est positif :  $0 \leq P(A) \leq 1$
- (ii) La proba. de l'événement certain est 1 :  $P(\mathbf{I}) = 1$
- (iii) Si  $A$  et  $B$  sont mutuellement exclusifs, alors
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

---

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble de valeur (ex : l'ensemble  $R$ ). Une variable aléatoire  $X$  associe aux événements aléatoires possibles une valeur  $x$  dans  $\mathcal{X}$ . on appelle

---

### Fonction de Probabilité Cumulative

La fonction définie par,

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Dans le cas multivarié, ( $X = (X_1, \dots, X_n) \in R^n$ ), on définit  $F_X(x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x)$ . La distribution cumulative empirique d'un échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  est

$$\hat{F}_X(x) = \frac{\#x_i \leq x}{n}$$

# SEGMENTATION D'IMAGES

## RAPPEL DE PROBABILITÉ (2)

### Densité

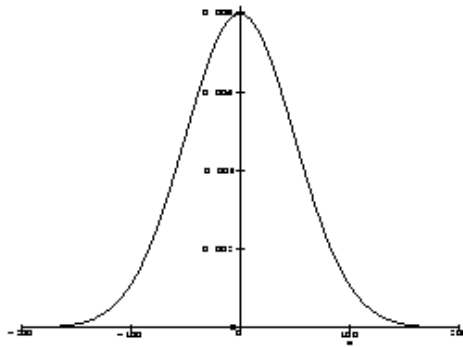
La dérivée de la fonction de Probabilité cumulative  $F_X(x)$ ,

$$P_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

est la fonction de densité de  $X$ . Dans le cas où  $n = 2$  ( $X = (X_1, X_2)$ ), on a  $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_X(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$

Par abus de notation,  $P_X(x)$  fait référence à une fonction de probabilité (qd  $X$  est discrète) ou à la densité de la v.a.  $X$  (qd  $X$  est continue).

Exemple :  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$   $P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$



### Espérance Mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est l'intégrale,

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_X(x) dx$$

où  $P_X(x)$  est la fonction de densité de  $X$



# SEGMENTATION D'IMAGES

## RAPPEL DE PROBABILITÉ (3)

---

### Variance

La variance d'une variable aléatoire est,

$$\sigma^2 = E\{(X - \mu_X)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 P_X(x) dx$$

où  $P_X(x)$  est la fonction de densité de  $X$

---

---

### Probabilité jointe

$$P_{X,Y}(x, y)$$

Pour le couple de variable aléatoire  $Z = (X, Y)$  qui prend ses valeurs dans le produit cartésien de  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

---

---

### Probabilité conditionnelle

$$P_{X|Y}(x | y) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)}$$

définit seulement quand  $P_Y(y) \neq 0$

---

---

### Probabilité totale

$$P_Y(y) = \int_{\mathcal{X}} P_{Y|X}(y | x) P_X(x) dx$$

---

### Indépendance

- si  $X$  et  $Y$  sont indépendants ssi  $P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$

# SEGMENTATION D'IMAGES

## RAPPEL DE PROBABILITÉ (4)

---

### Théorème de Bayes

$$P_{X|Y}(x | y) = \frac{P_{Y|X}(y | x)P_X(x)}{P_Y(y)}$$

$P_{X|Y}(x | y)$  est appelé la probabilité *a posteriori*.  $P_X(x)$  est la probabilité *a priori*.  $P_{Y|X}(y | x)$  est appelé la vraisemblance

---

### Chaînes de Markov

Soit  $\{X_i\} = X_1, X_2, \dots, X_n$ , une séquence de variable aléatoire avec les valeurs possibles  $a_1, \dots, a_n$ . Si la propriété markovienne est satisfaite,

$$\begin{aligned} P(X_n = a_{i_n} | X_{n-1} = a_{i_{n-1}}, \dots, X_1 = a_{i_1}) \\ = P(X_n = a_{i_n} | X_{n-1} = a_{i_{n-1}}) \end{aligned}$$

Alors  $\{X_i\}$  est une chaîne de Markov

---

# SEGMENTATION D'IMAGES

## CHAMPS MARKOVIAN (1)

### L'image : Vecteur de v.a.

Soit une image définie sur une maille dont les sommets constituent un ensemble  $S$  de sites  $s$

$$S = \{s = (i, j); 1 \leq i, j \leq N\}$$

A chaque site  $s$  (ou pixel) est associé une v.a.,  $Y_s$ , dont les valeurs  $\in \Lambda_{obs} = \{0, \dots, 255\}$  (représentant les NdG)

L'image ( $N \times N$ ) est donc représentée par un vecteur de v.a.  $Y = \{Y_s, s \in S\}$  dont le vecteur  $y = \{y_s, s \in S\}$ , est une configuration (ou réalisation)  $\in$  de l'espace  $\Lambda_{obs}^{N \times N}$

$P_Y(y)$  est la probabilité de la configuration  $y$ , c'est la probabilité  $P_Y(y_s, s \in S)$ .  $P_{Y_s}(y_s)$  est la loi marginale de  $Y_s$

### Système de Voisinage

Un système de voisinage  $\nu = (\nu_s, s \in S)$  est formé de parties  $\nu_s$  de  $S$ , vérifiant les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} s &\notin \nu_s \\ s \in \nu_t &\Leftrightarrow t \in \nu_s \end{aligned}$$

L'ensemble  $\nu_s$  est appelé le voisinage de  $s$ .  $t$  est dit voisin de  $s$  si  $t \in \nu_s$

### Champ Markovien

Un champs aléatoire  $X$  est dit *champ Markovien* associé à ce système de voisinages ssi

$$\begin{aligned} P_X(x) &> 0 \\ P_{X_s|X_r}(x_s | x_r, r \neq s) &= P_{X_s|X_r}(x_s | x_r, r \in \nu_s) \end{aligned}$$

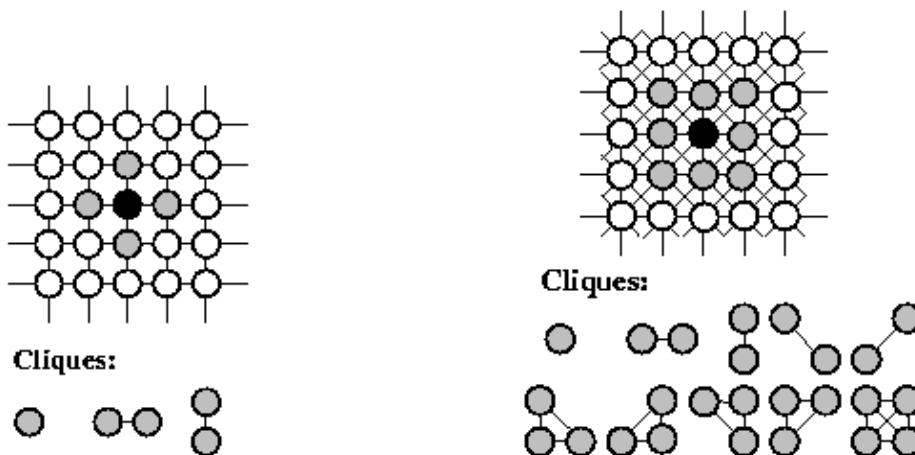
# SEGMENTATION D'IMAGES

## CHAMPS MARKOVIAN (2)

### Clique

Un sous ensemble  $c$  de  $S$  est appelé une *clique* relative au système de voisinages  $\nu$  si

- $c$  est un singleton
- 2 pixels quelconques de  $c$  sont voisins (au sens de  $\nu$ )



- L'ordre d'une clique correspond au nombre de ses éléments

### Mesure de Gibbs et champs Markovien

Le théorème de Hammersley-Clifford démontre que  $X$  est un champ Markovien (associé à  $\nu$ ) ssi  $P_X(x)$  est une mesure de Gibbs définie par

$$\forall x \in \Omega, \quad P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp(-U(x))$$

où  $U$  est une fonction appelée énergie et  $\Omega$  est l'ensemble des configurations possible pour  $X$

# SEGMENTATION D'IMAGES

## CHAMPS MARKOVIAN (3)

$$\forall x \in \Omega, \quad P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp(-U(x))$$

où  $U$  est une fonction appelée énergie

$$U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x)$$

- Les fonctions  $V_c$  sont appelées des fonctions potentiels, et ne dépendent que des éléments de  $x$  qui appartiennent à la clique  $c$  ( $C$  est l'ensemble des cliques)
- On notera souvent  $c = \langle s, t \rangle$  une clique d'ordre 2

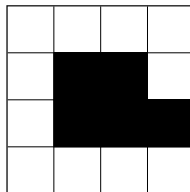
$Z$  est la *fonction de partition* c'est en fait la constante de normalisation de la probabilité  $P_X(x)$

$$Z = \sum_{x \in \Omega} \exp(-U(x))$$

### Exemple

$$U(x) = \sum_{c \in C} V_c(x) \quad V_c(x) = [1 - \delta(x_s, x_t)]$$

Voisinage du 1<sup>er</sup> ordre, clique binaire



$$U(x) = 18$$

# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (1)

L'image segmentée : Vecteur de v.a.

A chaque site  $s$  (ou pixel) est aussi associé une v.a.  $X_s$  dont les valeurs  $\in \Omega_{classe} = \{c_0, \dots, c_{q-1}\}$ , représentant les  $q$  classes ou zones homogènes (en NdG) de l'image

L'image ( $N \times N$ ) est donc représentée par un couple de vecteurs de v.a.  $Z = (X, Y)$

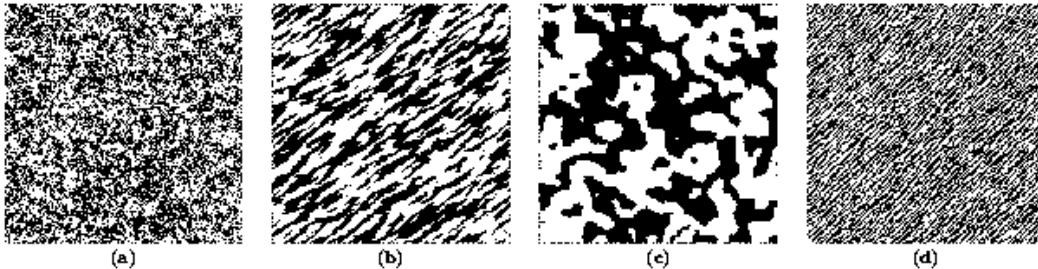
$P_X(x)$  : Distribution Markovienne

On va supposer que  $X$  est un champ Markovien

$$P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp \left( - \sum_{c \in C} V_c(x) \right)$$

### Exemple

Pour  $q = 2$  classes, et  $V_c(x) = \beta_{s,t}(1 - \delta(x_s, x_t))$



pour  $\beta_{s,t} = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  associé respectivement à la clique horizontale, verticale, diagonale droite & diagonale gauche

## SEGMENTATION D'IMAGES

### APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (2)

L'approche Bayésienne-Markovienne essaie de maximiser la probabilité conditionnelle (*a posteriori*) suivante

$$P_{X|Y}(x | y) = \frac{P_{Y|X}(y | x) P_X(x)}{P_Y(y)}$$

$P_Y(y)$  est constant car la réalisation du champ des observations (i.e., l'image) est connue, donc

$$P_{X|Y}(x | y) \propto P_{Y|X}(y | x) P_X(x)$$

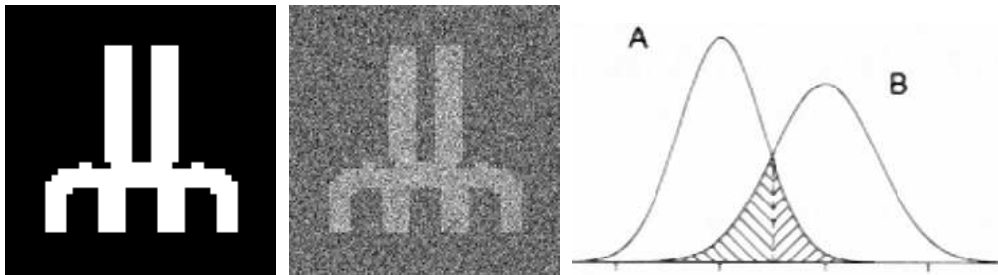
- $P_X(x)$  : distribution Markovienne

On a supposer que  $X$  est un champ Markovien

$$P_X(x) = \frac{1}{Z} \exp \left( - \sum_{c \in C} V_c(x) \right)$$

- 
- $P_{Y|X}(y | x) ?$  : Modèle de dégradation de l'image

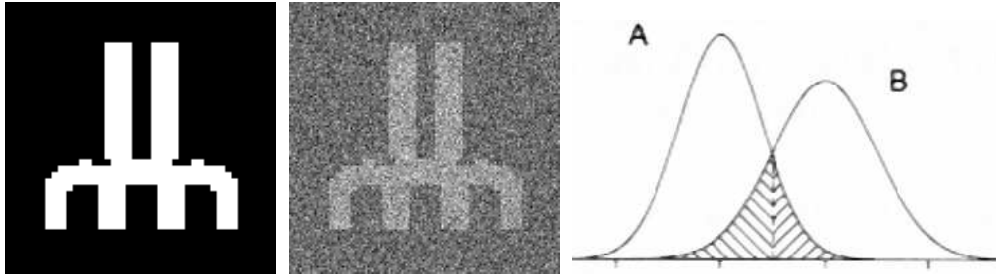
Exemple : segmentation au sens des NdG



Fond : classe 0 (ou classe  $c_0$ )  
U et M : classe 1 (ou classe  $c_1$ )

# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (3)



Supposons  $P_{Y_s|X_s}(y_s | c_0)$  et  $P_{Y_s|X_s}(y_s | c_1)$  soit connus

Par exemple

$$\begin{aligned} P_{Y_s|X_s}(y_s | c_0) &= \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0) \\ P_{Y_s|X_s}(y_s | c_1) &= \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1) \end{aligned}$$

Si on suppose que

$$P_{Y|X}(y | x) = \prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s | x_s)$$

cad que le bruit sur chacune des classes est blanc, on obtient

$$\begin{aligned} P_{X|Y}(x | y) &\propto \left( \prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s | x_s) \right) \left( \frac{1}{Z} \exp \left( - \sum_{c \in C} V_c(x) \right) \right) \\ &\propto \left( \exp \left[ - \left( - \ln \prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s | x_s) \right) \right] \right) \left( \frac{1}{Z} \exp \left( - \sum_{c \in C} V_c(x) \right) \right) \\ &\propto \left( \frac{1}{Z} \exp \left[ - \left( - \ln \prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s | x_s) + \sum_{c \in C} V_c(x) \right) \right] \right) \end{aligned}$$



# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (4)

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{MAP} &= \arg \max_x \{P_{X|Y}(x | y)\} \\
 &= \arg \max_x \left( \frac{1}{Z} \exp \left[ - \left( - \ln \prod_{s \in S} P_{Y_s|X_s}(y_s/x_s) + \sum_{c \in C} V_c(x) \right) \right] \right) \\
 &= \arg \max_x \left( \frac{1}{Z} \exp \left[ - \left( \sum_{s \in S} \underbrace{(- \ln P_{Y_s|X_s}(y_s/x_s))}_{V(x_s, y_s)} + \sum_{c \in C} V_c(x) \right) \right] \right) \\
 &= \arg \min_x \left\{ \sum_{s \in S} V(x_s, y_s) + \sum_{c \in C} V_c(x) \right\}
 \end{aligned}$$

En prenant  $V_c(x) = \beta_c[1 - \delta(x_s, x_t)]$ , en se souvenant que  $P_{Y_s|X_s}(y_s | x_s) = \mathcal{N}(\mu_s, \sigma_s)$ , on obtient pour des cliques d'ordre 2

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{MAP} &= \arg \min_x \left\{ \sum_{s \in S} V(x_s, y_s) + \sum_{c \in C} V_c(x) \right\} \\
 &= \arg \min_x \left\{ \underbrace{\sum_{s \in S} \left[ \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_{x_s}) + \frac{(y_s - \mu_{x_s})^2}{2\sigma_{x_s}^2} \right]}_{V(x, y)} + \underbrace{\sum_{c \in C} \beta_c[1 - \delta(x_s, x_t)]}_{U(x)} \right\}
 \end{aligned}$$

- $V(x, y)$  : **Terme d'attache aux données** : Modélise le lien entre les étiquettes (i.e., les classes) et les observations (i.e., les NdG)
- $U(x)$  : **Terme d'énergie a priori** : caractérise et modélise les propriétés du champ d'étiquette que l'on recherche (on recherche des zones de régions homogène ►  $\beta_c = 1 \ \forall c$ )

# SEGMENTATION D'IMAGES

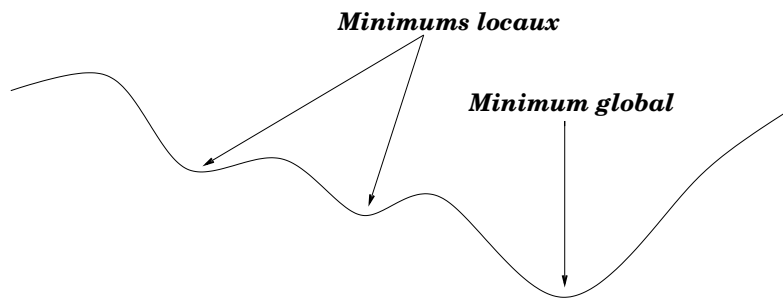
## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (5)

Trouver  $\hat{x}_{MAP}$  est ensuite un problème classique d'optimisation (i.e., de minimisation de fonction d'énergie)

### Notes

$V(x, y) + U(x)$  : Fonction de  $256 \times 256$  variables, chaque variable prend  $q$  valeurs discrètes correspondant aux  $q$  classes

### 2 types d'algorithmes



- **Algorithme déterministe** : Requier une solution pas trop loin de la solution optimale (rapide mais sous optimale) (Exemple : Algorithme ICM)
- **Algorithme stochastique** : Insensible à l'initialisation (optimale mais lent) (Exemple : Algorithme du Recuit Simulé)

# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (6)

### Algorithme ICM

|  $\hat{x}^{[0]}$  Configuration initiale

- Initialisation : on choisit une configuration initiale  $\hat{x}^{[0]}$ , aussi proche que possible de la configuration optimale. On peut prendre par exemple une segmentation au sens du MV :

$$\hat{x}_s^{[0]} = \arg \max_{x_s} \{P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s)\} \quad (\forall s \in S)$$

- Calcul de  $\hat{x}^{[k+1]}$  à partir de  $\hat{x}^{[k]}$  :  
 $x \leftarrow \hat{x}^{[k]}$

1. On balaie l'ensemble des sites  $s$  (selon une stratégie de visite de sites) et

- En chaque site  $s$ , on calcule  $P_{X_s/X_{\nu_s}, Y_s}(x_s/\eta_s, y_s)$  pour chacune des classes possibles :

$$P_{X_s/X_{\nu_s}, Y_s}(x_s/\eta_s, y_s) = \frac{1}{Z_s} \exp\left(-\left(\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x_s) + V(x_s, y_s)\right)\right) \quad (\forall x_s \in \Omega)$$

- On sélectionne la classe  $x_s$  qui correspond à la probabilité maximale (i.e., le mode)

$$\hat{x}_s = \arg \max_{x_s \in \Omega} \{P_{X_s/X_{\nu_s}, Y_s}(x_s/\eta_s, y_s)\}$$

$$\hat{x}^{[k+1]} \leftarrow x$$

2. Retour en 1. jusqu'à la réalisation d'un critère d'arrêt. Généralement

si  $\hat{x}_s^{[k+1]} \not\approx \hat{x}_s^{[k]} \quad k \leftarrow k + 1 \quad \text{et retour en 1.}$

# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (7)

### Algorithme RECUIT SIMULÉ (RS)

$T_0$	Température initiale
$T_{min}$	Température finale
$\hat{x}_0$	Configuration initiale aléatoire
$F(.)$	Fonction de décroissance de la température

- $T \leftarrow T_0$
- $x^{[0]} \leftarrow \hat{x}_0$
- Calcul de  $\hat{x}^{[k+1]}$  à partir de  $\hat{x}^{[k]}$  :  
 $x \leftarrow \hat{x}^{[k]}$ 
  1. On balaie l'ensemble des sites  $s$  (peu importe l'ordre)  
et
    - En chaque site  $s$ , on calcule  $P_{X_s/X_{\nu_s}, Y_s}(x_s/\eta_s, y_s)$   
pour chacune des classes possibles :

$$P_{X_s/X_{\nu_s}, Y_s}(x_s/\eta_s, y_s) = \frac{1}{Z_s} \exp \left\{ -\frac{1}{T_k} \left( \sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x_s) + V(x_s, y_s) \right) \right\} (\forall x_s \in \Omega)$$

- On tire l'une des classes  $x_s$  selon les probabilités d'appartenance  $P_{X_s/X_{\nu_s}, Y_s}$  définies précédemment.  
 $\hat{x}^{[k+1]} \leftarrow x$
- 2. Faire décroître la température  $T_{k+1} = F(T_k)$  (ex :  $T_{k+1} = 0.99^k T_0$ ) et incrémenter l'itération  $k = k + 1$
- 3. Retour en 1. jusqu'à la satisfaction d'un critère d'arrêt. Généralement

si  $T_k \geq T_{min}$  retour en 1.

# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (8)

### Segmentation supervisée 2 classes

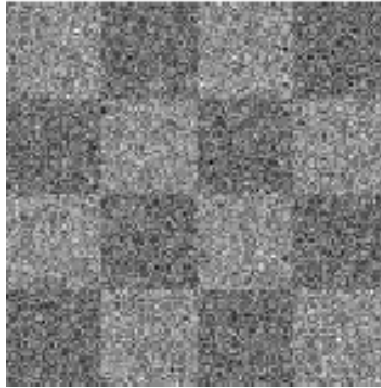


Image bruitée

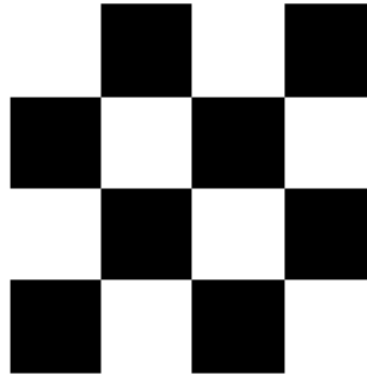
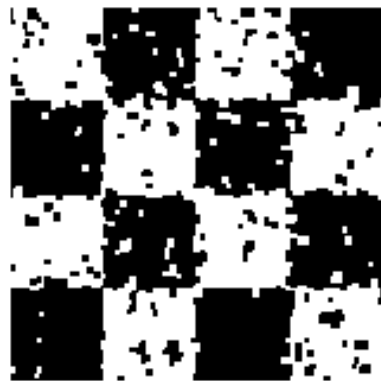
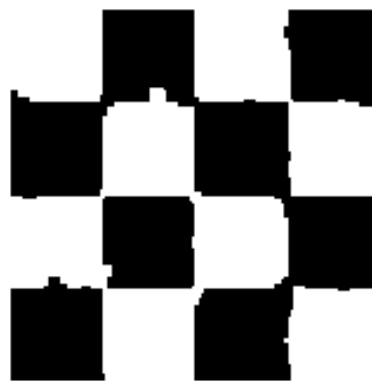


Image segmentée idéale



segmentation par ICM



Segmentation par RS

# SEGMENTATION D'IMAGES

## APPROCHE MARKOVIENNE DE SEGMENTATION (9)

Segmentation supervisée 4 classes

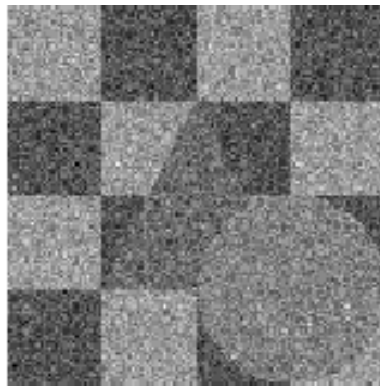
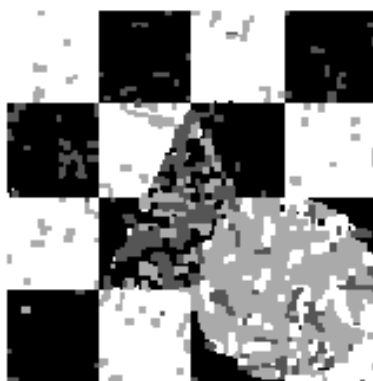


Image bruitée



Image segmentée idéale



segmentation par ICM



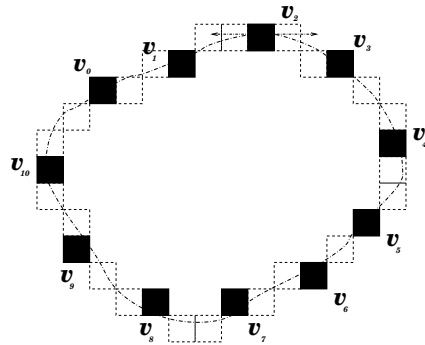
Segmentation par RS

# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR SNAKE (1)

Le modèle de contour actif (ou *snake*) présente le problème de la segmentation (des bords d'une région) directement comme un problème de minimisation de fonction d'énergie

Un *snake*  $V$  est défini par  $n$  noeuds,  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  (donnant les coordonnées des points d'un contour), liés par une B-spline cubique



Soit une image  $y$ , la fonction d'énergie que l'on doit minimiser est

$$E_{\text{snake}}(V) = \sum_{i=1}^n (E_{\text{int}}(v_i) + \beta E_{\text{ext}}(v_i, y))$$

- $E_{\text{int}}$  : Énergie interne du snake
  - Permet d'exprimer la connaissance *a priori* sur la forme du contour que l'on doit détecter
- $E_{\text{ext}}$  : Énergie externe du snake
  - permet de *pousser* le snake près des caractéristiques désirées de l'image (bords, régions, texture, etc.)

# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR SNAKE (2)

### Énergie interne

Afin d'obtenir un contour avec des courbures douces, une solution consiste à mesurer la courbure du snake à chaque noeud et utiliser la mesure suivante

$$E_{\text{int}}(v_i) = \arccos \left( \frac{\overrightarrow{v_{i-1}v_i} \cdot \overrightarrow{v_i v_{i+1}}}{\|\overrightarrow{v_{i-1}v_i}\| \cdot \|\overrightarrow{v_i v_{i+1}}\|} \right)$$

qui est l'angle entre les 2 vecteurs  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$  et  $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$ .  $\|\overrightarrow{v}\|$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{v}$  et “.” représente le produit scalaire entre deux vecteurs

### Énergie externe

Les gradient de l'image sont exploités par la mesure suivante

$$E_{\text{ext}}(v_i, y) = -\|\nabla y(v_i)\|$$

Le contour optimal  $V_{\text{opt}}$ , peut être obtenu en trouvant celui qui minimise l'énergie  $E_{\text{snake}}(V)$ , i.e

$$V_{\text{opt}} = \arg \min_{\{v_i\}} E_{\text{snake}}(V)$$

où  $\{v_i\}$  désigne l'ensemble des noeuds du snake



# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR SNAKE (3)

### Optimisation par Programmation Dynamique (DP)

► Procédure particulièrement bien adaptée pour ce problème car

- La solution optimal contient des solutions optimale à des sous-problèmes
- Le problème d'optimisation revisite très souvent les même sous-problèmes

La fonction d'énergie peut s'écrire

$$E_{\text{snake}}(v_1, v_2, \dots, v_n) = E_1(v_1, v_2, v_3) + E_2(v_2, v_3, v_4) + \dots + E_{n-2}(v_{n-2}, v_{n-1}, v_n)$$

où  $E_{i-1}(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) = E_{\text{int}}(v_i) + \beta E_{\text{ext}}(v_i, y)$

Dans la DP, chaque  $v_i$  peut prendre seulement  $m$  valeurs possibles, correspondant généralement à des positions voisines dans un voisinage

On peut efficacement définir la valeur de la solution optimal récursivement en terme de solutions optimales aux sous-problèmes d'optimisation suivant

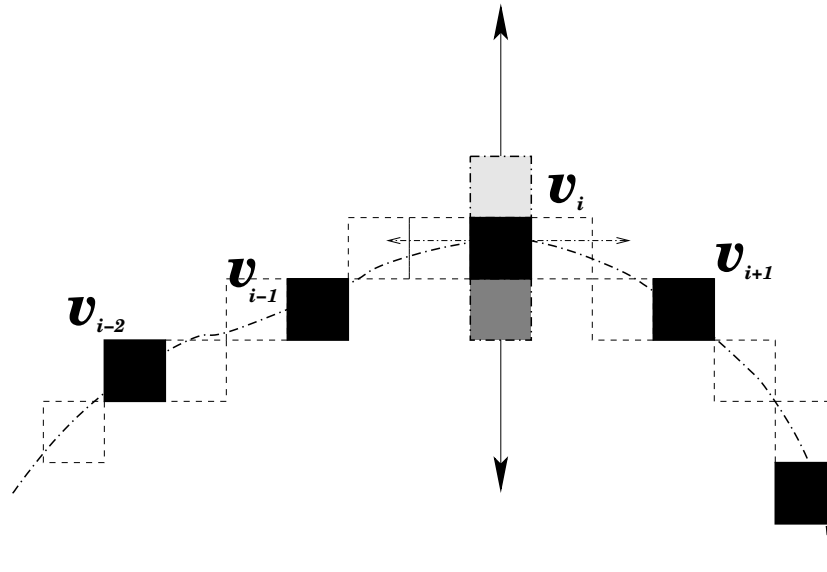
$$\begin{aligned} s_1(v_2, v_3) &= \min_{v_1} \{E_1(v_1, v_2, v_3)\} \\ s_2(v_3, v_4) &= \min_{v_2} \{s_1(v_2, v_3) + E_2(v_2, v_3, v_4)\} \\ &\dots \\ s_{n-2}(v_{n-1}, v_n) &= \min_{v_{n-2}} \{s_{n-3}(v_{n-2}, v_{n-1}) + E_{n-2}(v_{n-2}, v_{n-1}, v_n)\} \end{aligned}$$

$V_{\text{opt}} = \arg \min_{\{v_i\}} E_{\text{snake}}(V) = \min_{v_{n-1}, v_n} s_{n-2}(v_{n-1}, v_n)$

# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR SNAKE (4)

### Optimisation par Gradient



Jusqu'à convergence

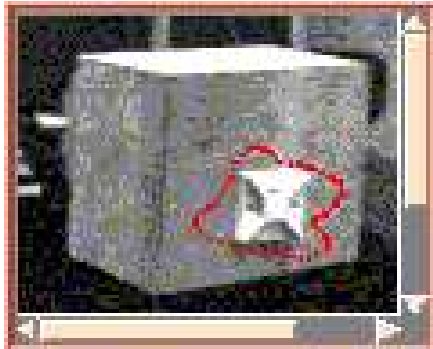
Pour chaque noeud du snake

- On déplace chaque noeud suivant la position de la normale intérieur et extérieur au contour
- On prend le noeud (i.e., sa coordonnée) qui minimise l'énergie du snake

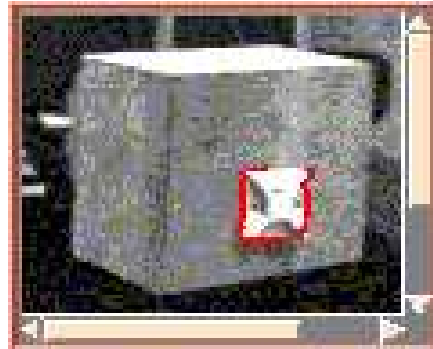
# SEGMENTATION D'IMAGES

## SEGMENTATION PAR SNAKE (4)

### Exemples



Initialisation



Convergence



Initialisation



Convergence

### Animation sur la page web du cours

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150/)  
Rubrique : Notes de Cours additionnelles ; Cours animé