



DIRO  
IFT 6150

# TRAITEMENT D'IMAGES

## TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

## SOMMAIRE

Transformée de Hadamard .....	2
Transformée de Hough .....	4
Transformée de Hotelling .....	8

TH  
 $f(x,y) \cong H(u,v)$

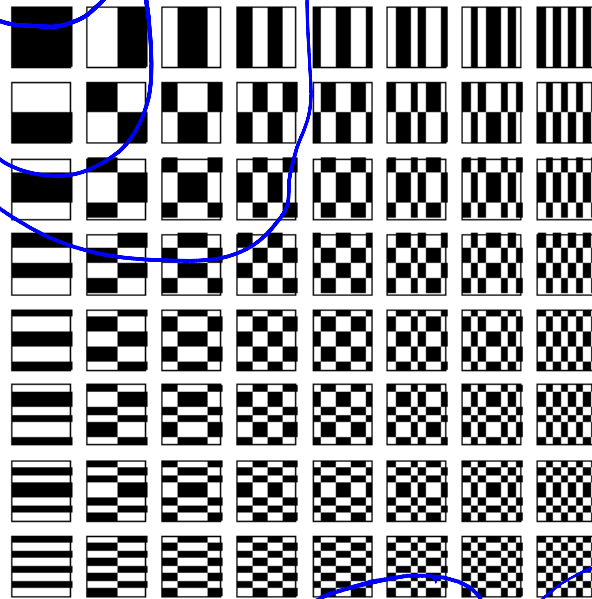
# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING TRANSFORMÉE DE HADAMARD (1)

$$H(u,v) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)a_i(u) + b_i(y)a_i(v)}$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u,v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)a_i(u) + b_i(y)a_i(v)}$$

$$\begin{aligned} a_0(u) &= b_{n-1}(u) \\ a_1(u) &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u) \\ &\vdots \\ a_{n-1}(u) &= b_1(u) + b_0(u) \end{aligned}$$

Note :  $N = 2^n$   $b_i(x)$  : ième bit de x (en binaire)



Fonctions de Base pour une image  $8 \times 8$  (Noir=1, blanc=-1)

$$3 = (011)_2$$

$$b_2(3) = 0$$

$$b_1(3) = 1$$

$$b_0(3) = 1$$

Cx

# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

## TRANSFORMÉE DE HADAMARD (2)

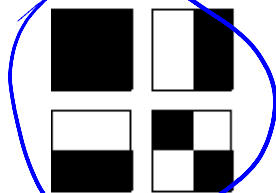
-Exemple-

Transformée de Hadamard de l'image  $2 \times 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-Calcul des coefficients-

Projection de  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  sur la base de Hadamard



$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left( \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Élément de la base de Hadamard ( $2 \times 2$ )

- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = 1$
- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = -1/2$
- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = -1/2$
- $\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rangle / 4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1
-1/2
-1/2
0

base
negate
base

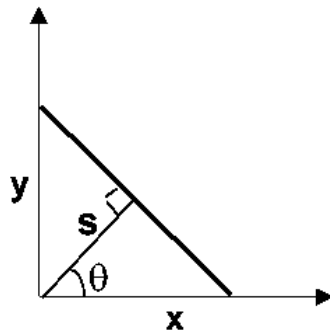
# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

## TRANSFORMÉE DE HOUGH (1)

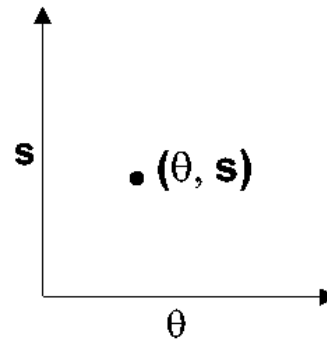
► Permet de trouver efficacement les segments de droite (ou autres courbes) présentes dans une image binaire.



Image



Transformée de Hough



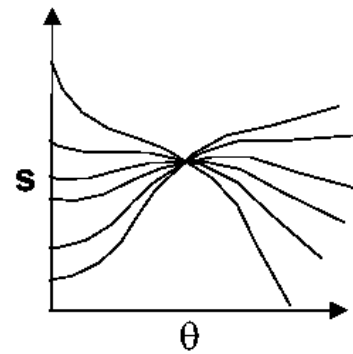
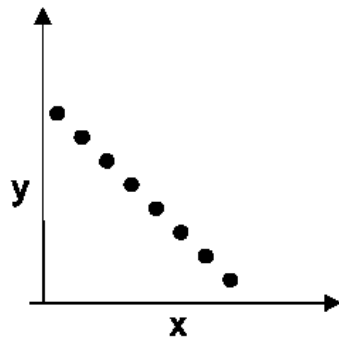
Coordonnées cartésienne ► Coordonnées polaires

Équation paramétrique d'une droite ►  $s = x \cos \theta + y \sin \theta$

$$S = x \cos \theta + y \sin \theta$$

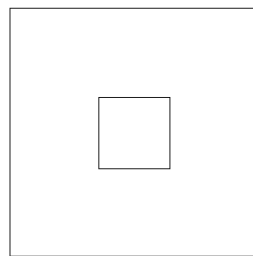
## TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

### TRANSFORMÉE DE HOUGH (2)

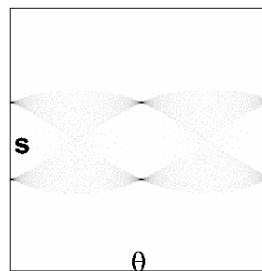


► Pour chaque point d'une même ligne correspond une courbe dans la transformée de Hough. Ces différentes courbes s'intersectent en un point.

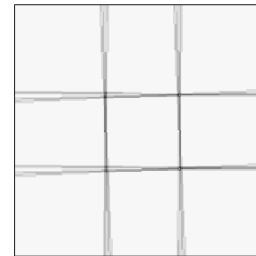
-Exemple-



(a)



(b)



(c)

- (a) Image originale
- (b) Transformée de Hough (Espace  $(s, \theta)$ )
- (c) Principales lignes reconstruites

# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

## TRANSFORMÉE DE HOUGH (3)

-Recherche de droites-

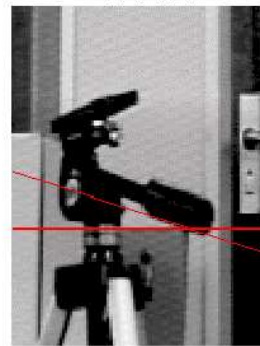
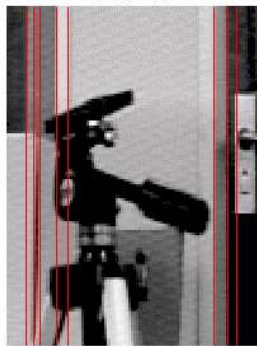
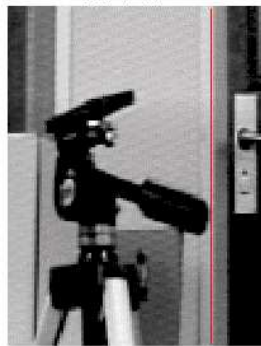
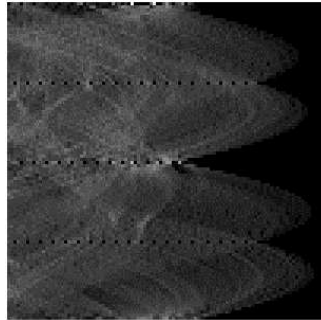
Image



Image des contours



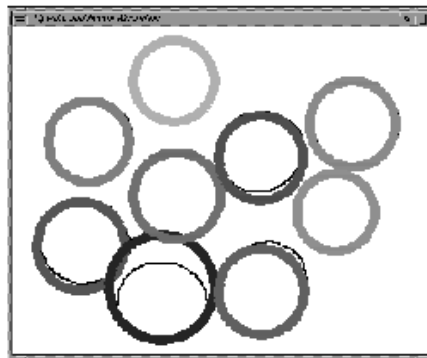
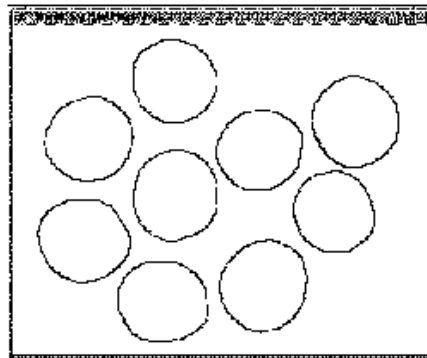
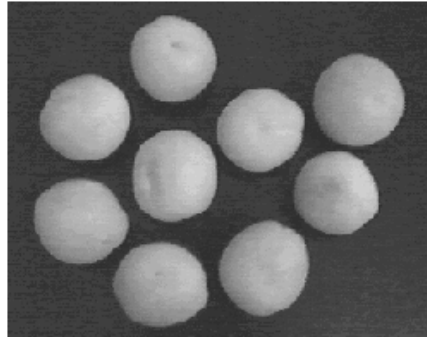
Transformée de Hough



# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

## TRANSFORMÉE DE HOUGH (4)

-Recherche de cercles-

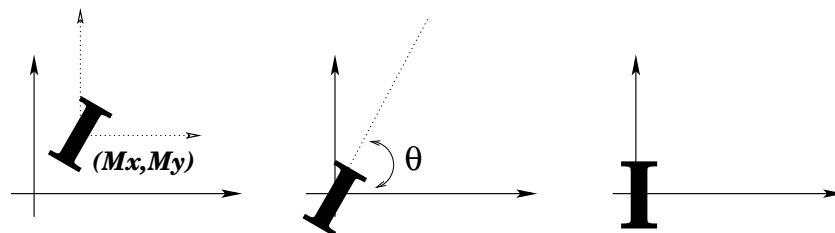
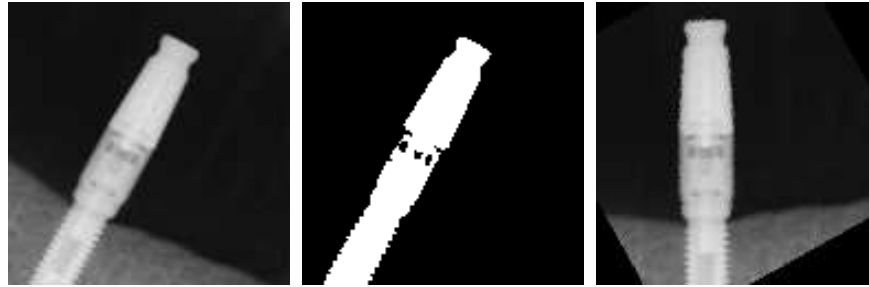




# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING

## TRANSFORMÉE DE HOTELLING (1)

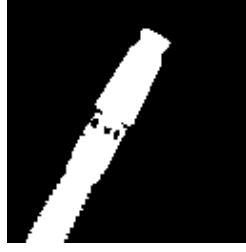
► Permet la rotation automatique d'un objet dans une image selon son axe principal (Application : Recalage, Prise de mesure, Reconnaissance des Formes, de caractères d'écritures, etc.).



$$\begin{bmatrix} x_{\text{nouveau}} \\ y_{\text{nouveau}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{ancien}} - x_g \\ y_{\text{ancien}} - y_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

- $\theta$  Angle de rotation de la TH
- $(x_g, y_g)$  Centroid de l'objet à redresser
- $(x_0, y_0)$  position du centre de l'objet désiré

# TRANSFORMÉE DE HADAMARD, HOUGH ET HOTELLING TRANSFORMÉE DE HOTELLING (1)



## -Paramètres de la TH-

Matrice de corrélation  $C$  de l'objet détecté

$$C = \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{xy} & C_{yy} \end{pmatrix}$$

$$C_{xx} = \frac{1}{N} \sum_s (x_s - x_g)^2 \quad C_{yy} = \frac{1}{N} \sum_s (y_s - y_g)^2$$

$$C_{xy} = \frac{1}{N} \sum_s (x_s - x_g)(y_s - y_g)$$

où les  $\sum_s$  se font sur l'ensemble des  $N$  pixels blancs de l'image binarisée.  $(x_g, y_g)$  est le barycentre de l'objet.

$$x_g = \frac{1}{N} \sum_s x_s \quad \text{et} \quad y_g = \frac{1}{N} \sum_s y_s$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( C_{xx} + C_{yy} + \sqrt{(C_{xx} - C_{yy})^2 + 4C_{xy}^2} \right)$$

Et l'angle  $\theta$  d'orientation de l'objet (i.e., l'implant) par rapport à l'axe des  $x$  (axe vertical) est donnée par,

$$\theta = \arctan\left(\frac{\lambda_1 - C_{xx}}{C_{xy}}\right)$$