



TRAITEMENT D'IMAGES RESTAURATION

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

*Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

RESTAURATION

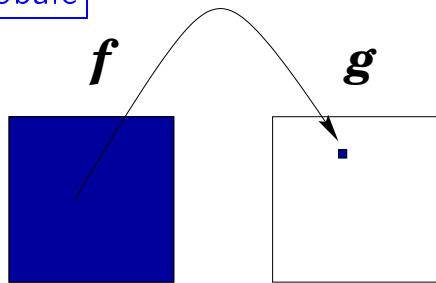
SOMMAIRE

Modèle de Dégradation	2
Estimation du Modèle de Flou	4
Filtrage Inverse	7
La Restoration : Problème Inverse Mal Posé .	9
Filtre de Wiener	10
Restauration Interactive	13
Algorithmes Itératifs	14

RESTAURATION

MODÈLE DE DÉGRADATION (1)

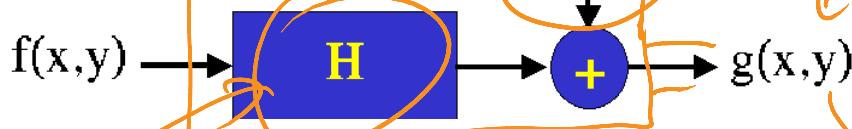
Opération Globale



Modèle de Dégradation

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

par has = Δ

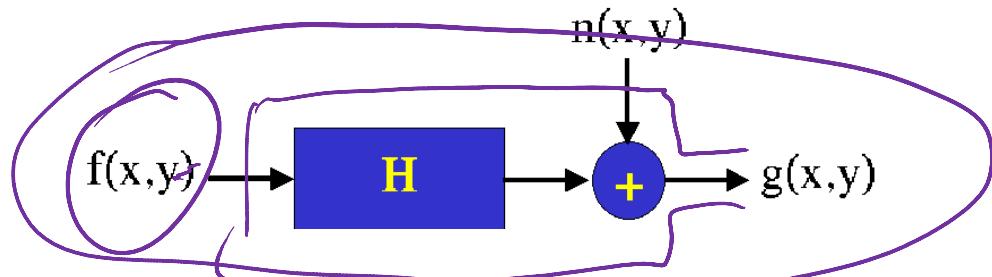


- $f(x, y)$ Image avant dégradation (ou image idéale)
- $n(x, y)$ Bruit supposé additif
- $g(x, y)$ Image dégradée (ou à restaurer)

Restauration ▶ Retrouver $f(x, y)$ à partir de $g(x, y)$
 - connaissant les caractéristiques du bruit $n(x, y)$?
 - connaissant $H()$?

RESTAURATION

MODÈLE DE DÉGRADATION (2)



h : psf absolue
à un filtre passe bas

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

Modèle LINÉAIRE de Dégradation
(H invariant en position)

$$H(u, v)$$

flou

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

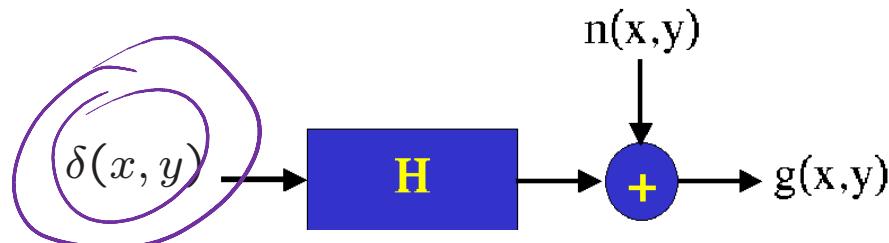
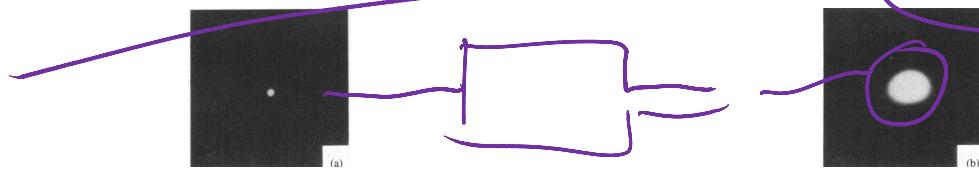
$h(x, y)$: Réponse à l'impulsion
(Réponse du système à une impulsion de Dirac)

Comment trouver $h(x, y)$?

- Réponse du système à une impulsion de Dirac
- Identification de la réponse du système à une source ponctuelle
- Identification du flou basé sur les zéros du domaine fréquentiel

RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (1)

Réponse du système à une impulsion de Dirac

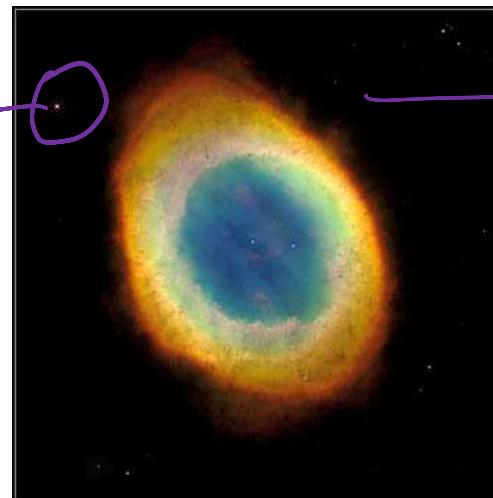
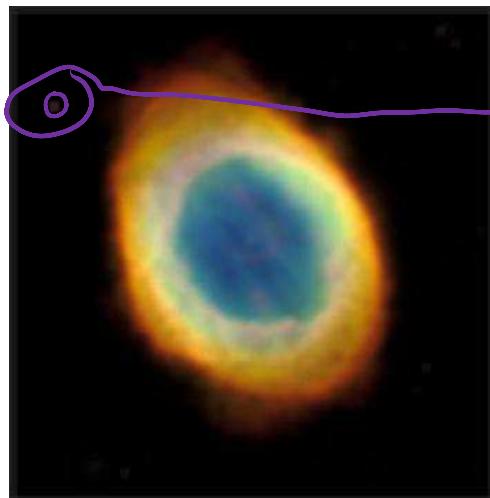


$$h(x, y) \approx h(x, y) * \delta(x, y) + n(x, y)$$

(On peut éliminer le bruit en moyennant par exemple)

$$= h(x_{ig}) + m_1(x_{ig}) \\ h(x_{ig}) + m_2(x_{ig}) \\ h(x_{ig}) + m_3(x_{ig}) \\ \vdots \\ h(x_{ig})$$

Réponse du système à une source ponctuelle



RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (2)

Identification du flou basé sur les zéros fréquentielles

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}^{-1} \\ \parallel \\ \mathbf{F} \end{array}$$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

Si on suppose une forme paramétrique connue pour la PSF (et donc pour sa réponse fréquentielle), $H(u, \nu)$ peut être identifié en trouvant les zéros de $G(u, \nu)$.

a- Flou rectiligne causé par du mouvement

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, -\infty \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{2d} & y = 0, -d \leq x \leq d \end{cases}$$



- Zéros sur des lignes perpendiculaires à la direction du mouvement et espacés de $1/2d$

b- Erreur de mise au point de lentille circulaire

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \end{cases}$$

- Zéros se trouvant sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique de période r dont le premier zéro est à la fréquence numérique $\approx 0.61/r$

RESTAURATION

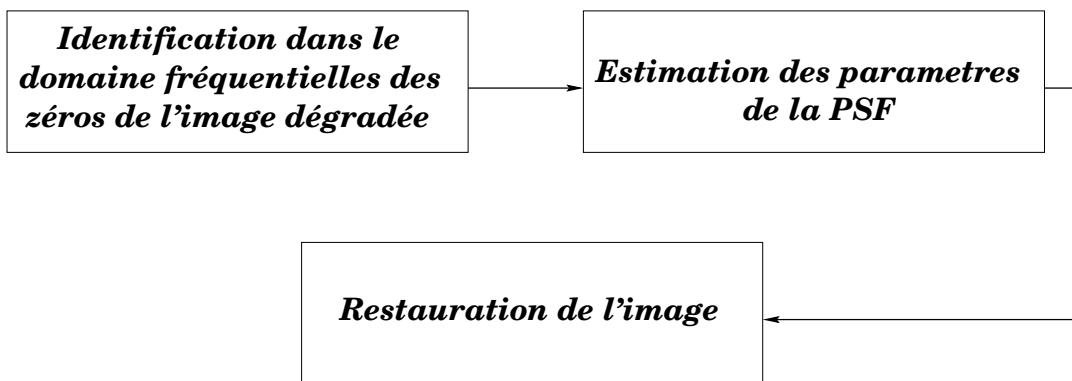
ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (3)

c- Flou uniforme 2D

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

- Zéros espacés de n/L en u et v

Bloc Diagramme



Problèmes

- Requiert une forme paramétrique pour la PSF
- Requiert une PSF créant des zéros dans le domaine fréquentiel (PSF Gaussienne ► aucun zéro)

RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (1)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \mathbf{F}^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \\ \mathbf{F} \end{array}$$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

$$\hat{F}(u, \nu) = \underbrace{\frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)}}_{\text{si } F(u, \nu) \text{ et } N(u, \nu) = 0} - \frac{N(u, \nu)}{H(u, \nu)}$$

$$\hat{F}(u, \nu) = \frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} - \frac{N(u, \nu)}{H(u, \nu)}$$

Problèmes

- $H(u, \nu)$ peut s'annuler pour certaines fréquences
- $G(u, \nu)$ et $H(u, \nu)$ peuvent s'annuler simultanément
- le bruit $N(u, \nu)$ n'est jamais nul



Image Originale

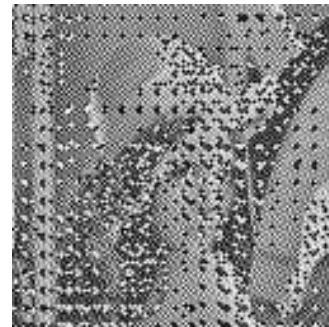
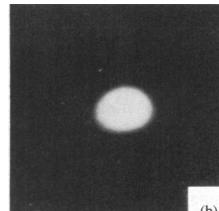


Image restorée par Filtrage Inverse

RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (2)

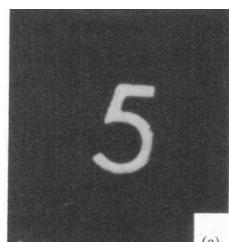
Solutions

- Si $H(u, \nu)$ petit $\hat{F}(u, \nu) = G(u, \nu)$ (ou 0) sinon G/H
- Au delà d'une certaine fréquence de coupure D_0
 - $\hat{F}(u, \nu) = 0$ sinon $G(u, \nu)/H(u, \nu)$



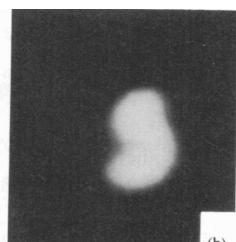
$h(x, y)$

$f(x, y)$

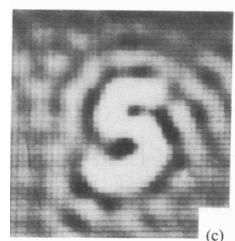


(a)

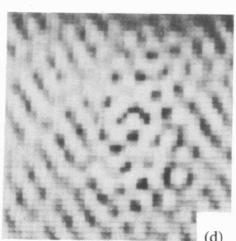
$g(x, y)$



(b)



(c)



(d)

D_0 bien choisi D_0 trop grand

Remarque

$$\frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} = \frac{H^*(u, \nu) G(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}$$

RESTAURATION

LA RESTAURATION : PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{F}^{-1} \\ \downarrow \\ G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu) \end{array}$$

► Problème inverse mal posé

La solution de ce problème n'est pas unique et une très faible variation sur l'image $g(x, y)$ (un bruit par exemple), a pour effet de produire de grandes variations sur la solution

Solutions pour rendre le problème bien posé

- Exploiter les connaissances statistiques et spectrales de l'image et du bruit (filtre de Wiener, etc.)
- Modéliser et Exploiter des connaissances *a priori* que l'on a sur l'image et exploiter une solution que l'on sait être pas trop éloignée du résultat désiré (Algorithme itératifs de Landweber, Tichonov-Miller, etc.)

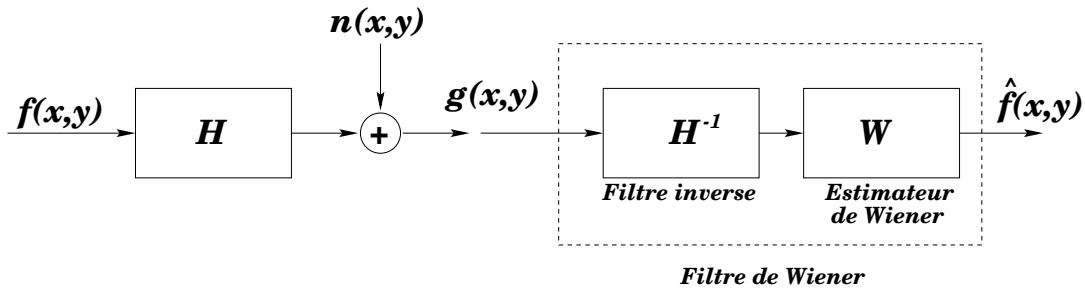


On constraint la solution de ce problème

Avantage des algorithmes itératifs

- Ne requiert pas l'implémentation d'une division
- Le processus de restauration peut être contrôlé et visualisé à chaque itération

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (1)



- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_{\hat{f}} \left\{ \| \hat{f}(x, y) - f(x, y) \|^2 \right\}$$

- Supposons que $H(u, \nu) = 1$, on montre que la réponse impulsionnelle $w(x, y)$ qui conduit à ce résultat est

$$A_{gf}(x, y) = (w * A_g)(x, y)$$

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{F}^{-1} \\ \hline \mathbf{F} \end{array} \right|$$

$$W(u, \nu) = \frac{P_{gf}(u, \nu)}{P_g(u, \nu)}$$

- Signal et bruit non corrélés, on montre que

$$P_g = P_f + P_n \quad \text{et} \quad P_{gf} = P_f$$

où P_f et P_n désigne la DSP du signal et du bruit

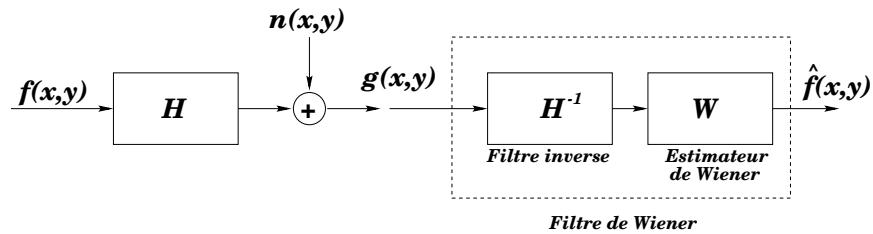
Nota

$$A_g = g(x, y) * g(-x, -y) \quad (\text{Autocorrélation de } g(x, y))$$

$$\mathcal{F}(A_g) = |G(u, \nu)|^2 = P_g(u, \nu) \quad (\text{DSP ou spectre de puissance})$$

$$|\mathcal{F}(A_{gf})|^2 = P_{gf}(u, \nu) \quad (\text{Spectre d'interaction entre } g \text{ et } f)$$

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (2)



$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)}$$

En considérant maintenant que $H(u, \nu) \neq 1$, on trouve,

$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + \frac{P_n(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}} = \frac{P_f(u, \nu)|H(u, \nu)|^2}{P_f(u, \nu)|H(u, \nu)|^2 + P_n(u, \nu)}$$

Fonction de transfert du filtre de Wiener

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]$$

Remarques

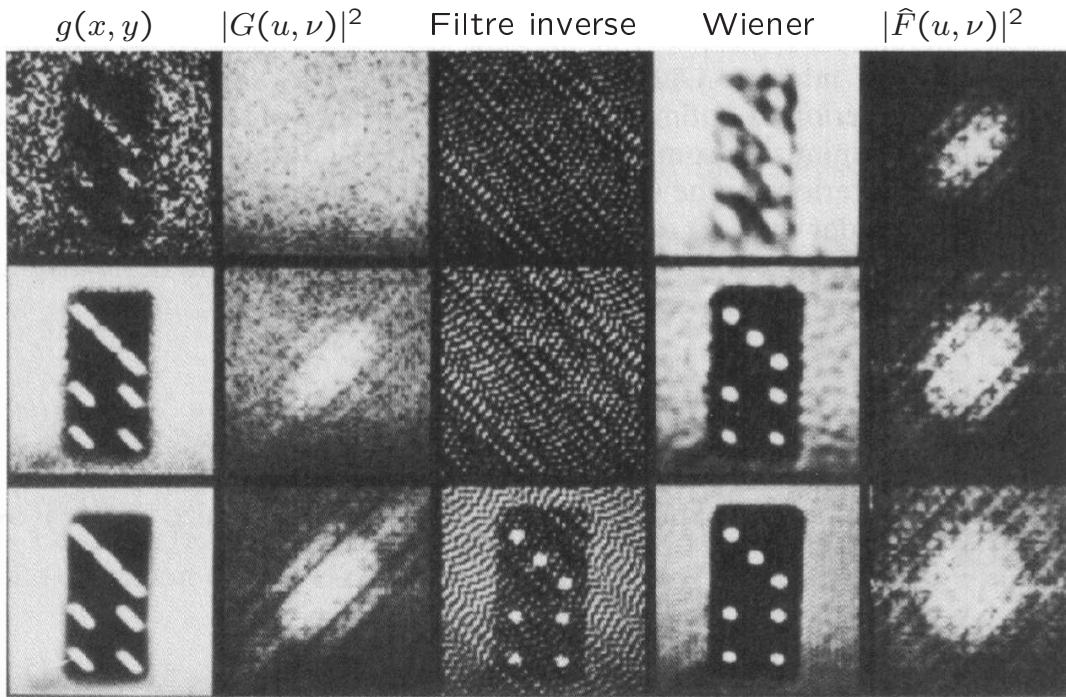
- $P_n(u, \nu)/P_f(u, \nu)$ peut être approximé par une constante ou une fonction choisie adéquatement
- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \blacktriangleright$ Filtrage inverse

Nota

$$H[P_n(u, \nu)] = P_n |H|^2$$

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (3)

Exemples



Remarques

- Meilleur que le filtrage inverse
- Limité lorsque le flou est important

RESTAURATION

RESTAURATION INTERACTIVE

Restauration du spectre de puissance de l'image

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{P_f(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)} \right]^{1/2}$$

- Remarques -

- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \blacktriangleright$ Filtrage inverse
- Donne en général de meilleur résultats car $G(u, \nu) \neq 0$ lorsque $H(u, \nu)$ l'est, à la différence du filtre de Wiener.

Filtres de moyenne géométrique

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \right]^\alpha \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \beta \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]^{1-\alpha}$$

α et β sont des paramètres positifs.

- Remarques -

- Pour $\alpha = 1$ ou $\beta = 0 \blacktriangleright$ Filtre inverse
- Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1 \blacktriangleright$ Filtre de Wiener
- Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1 \blacktriangleright$ Restauration du spectre de puissance de l'image (moyenne géométrique entre filtre inverse et Wiener)

RESTAURATION ALGORITHME ITÉRATIFS

Algorithmes de Landweber

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_f \left\{ \|g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 \right\}$$

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\hat{f}_{k+1}(x, y) = \hat{f}_k(x, y) + \alpha h(-x, -y) * \left(g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}_k(x, y) \right)$$

avec $\hat{f}_0(x, y) = g(x, y)$



Image originale



Restoration (Algo. Landweber)

- Algorithme de descente du gradient avec $g(x, y)$ comme solution initiale et α comme pas ($\alpha = 1$)

RESTAURATION ALGORITHME ITÉRATIFS

Algorithmes de Tichonov-Miller

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_f \left\{ \|g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 + \alpha \|c(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 \right\}$$

où $c(x, y)$ représente l'opérateur laplacien 2D

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k+1}(x, y) &= \hat{f}_k(x, y) + \\ &\beta \left(g(x, y) * h(-x, -y) - (A_h(x, y) + \alpha A_c(x, y)) * \hat{f}_k(x, y) \right) \\ \text{avec } \hat{f}_0(x, y) &= \beta \left(g(x, y) * h(-x, -y) \right) \end{aligned}$$

$A_h(x, y)$ et $A_c(x, y)$, autocorrélation de $h(x, y)$ et $c(x, y)$
 α : paramètre de régularisation



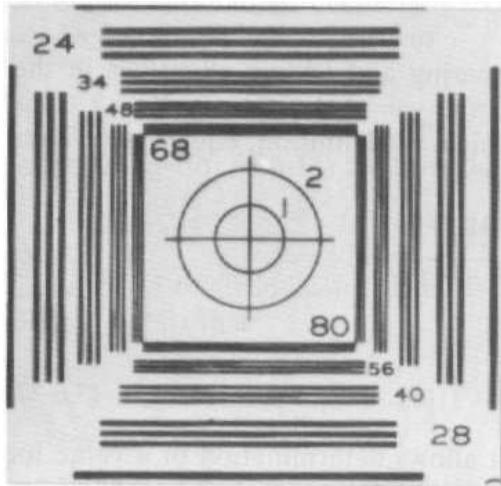
Image originale



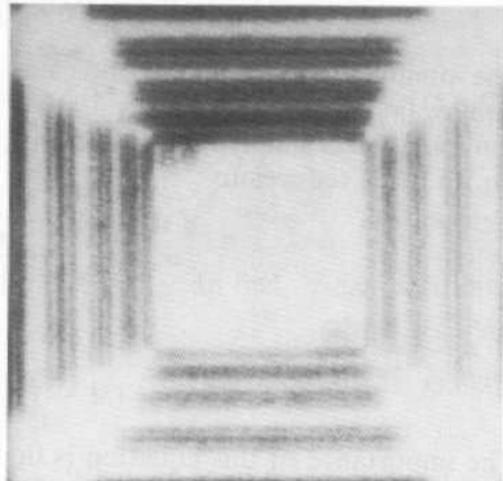
Restoration (Algo. Tichonov-Millerr)

RESTAURATION EXEMPLE

Exemples



(a)

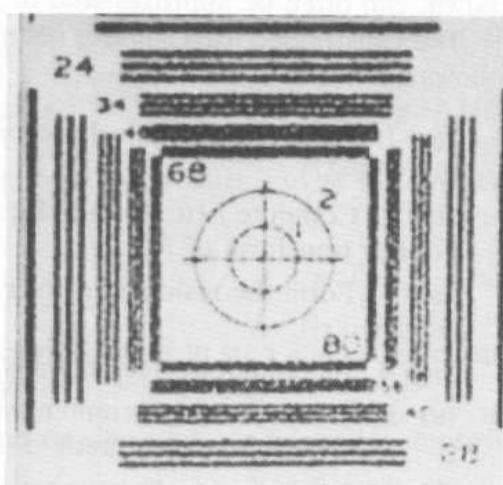


(b)



(c)

Filtre inverse



(d)

Filtre contraint