



TRAITEMENT D'IMAGES RESTAURATION

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

RESTAURATION

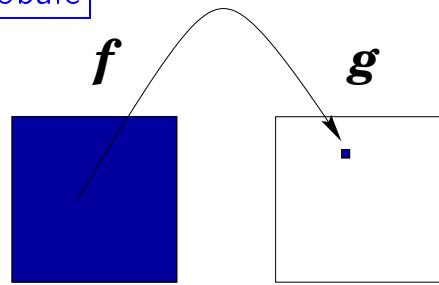
SOMMAIRE

Modèle de Dégradation	2
Estimation du Modèle de Flou	4
Filtrage Inverse	7
La Restoration : Problème Inverse Mal Posé .	9
Filtre de Wiener	10
Restauration Interactive	13
Algorithmes Itératifs	14

RESTAURATION

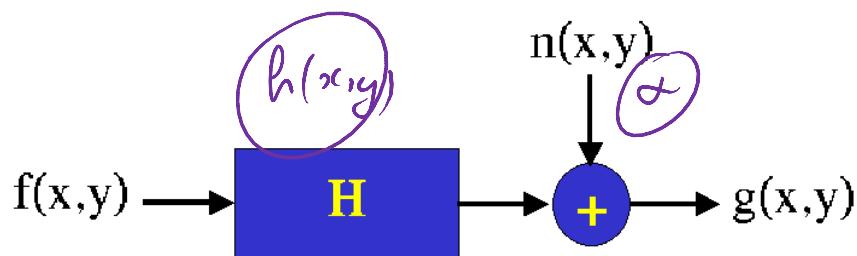
MODÈLE DE DÉGRADATION (1)

Opération Globale



Modèle de Dégradation

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

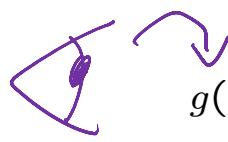
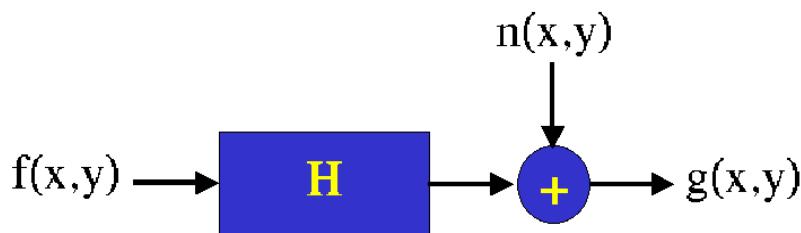


- $f(x, y)$ Image avant dégradation (ou image idéale)
- $n(x, y)$ Bruit supposé additif
- $g(x, y)$ Image dégradée (ou à restaurer)

Restauration ► Retrouver $f(x, y)$ à partir de $g(x, y)$
 - connaissant les caractéristiques du bruit $n(x, y)$?
 - connaissant $H()$?

RESTAURATION

MODÈLE DE DÉGRADATION (2)



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

Modèle LINÉAIRE de Dégradation
(H invariant en position)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

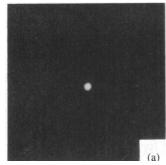
$h(x, y)$: Réponse à l'impulsion
(Réponse du système à une impulsion de Dirac)

Comment trouver $h(x, y)$?

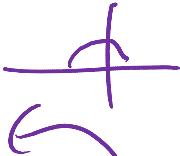
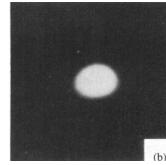
- Réponse du système à une impulsion de Dirac
- Identification de la réponse du système à une source ponctuelle
- Identification du flou basé sur les zéros du domaine fréquentiel

RESTAURATION ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (1)

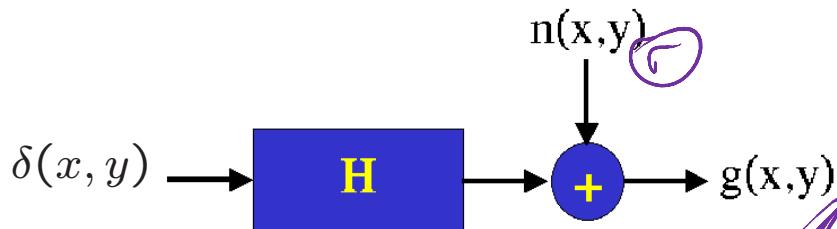
Réponse du système à une impulsion de Dirac



(a)



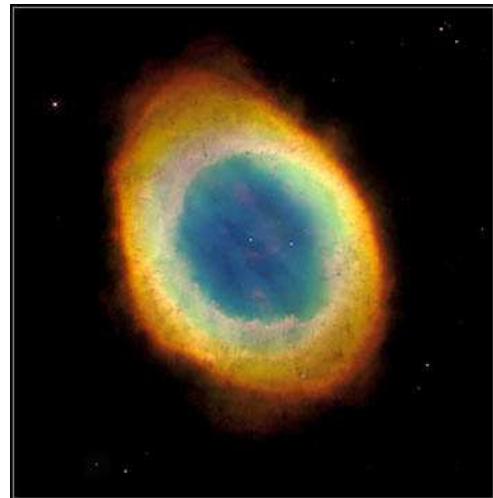
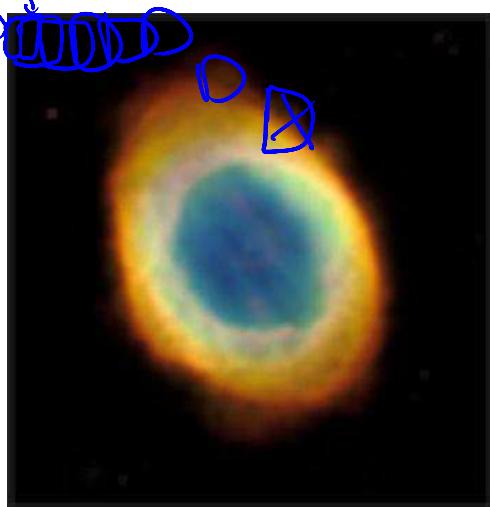
(b)



$$h(x, y) \approx h(x, y) * \delta(x, y) + n(x, y)$$

(On peut éliminer le bruit en moyennant par exemple)

Réponse du système à une source ponctuelle



RESTAURATION

ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (2)

Identification du flou basé sur les zéros fréquentielles

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$\pi(\frac{x}{\epsilon}) \geq e$ suivre $\pi \neq e$

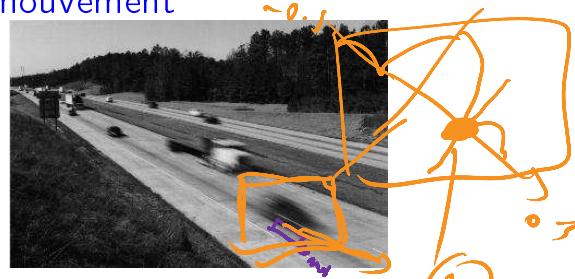
$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

Si on suppose une forme paramétrique connue pour la PSF (et donc pour sa réponse fréquentielle), $H(u, v)$ peut être identifié en trouvant les zéros de $G(u, v)$.

a- Flou rectiligne causé par du mouvement



$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, -\infty \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{2d} & y = 0, -d \leq x \leq d \end{cases}$$



- Zéros sur des lignes perpendiculaires à la direction du mouvement et espacés de $1/2d$

b- Erreur de mise au point de lentille circulaire

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \end{cases}$$

- Zéros se trouvant sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique de période r dont le premier zéro est à la fréquence numérique $\sim 0.61/r$

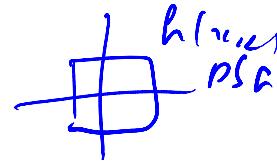
$$\nu = \dots \cdot 61/r$$

RESTAURATION

ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (3)

c- Flou uniforme 2D

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$



- Zéros espacés de n/L en u et ν

Bloc Diagramme

Identification dans le domaine fréquentielles des zéros de l'image dégradée

Estimation des paramètres de la PSF

Restauration de l'image

Problèmes

- Requiert une forme paramétrique pour la PSF
- Requiert une PSF créant des zéros dans le domaine fréquentiel (PSF Gaussienne ► aucun zéro)

RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (1)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\frac{F^{-1}}{F}$$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

$$(N(u, \nu))^2$$

$\hat{f}(u, \nu)$

$$\hat{F}(u, \nu) = \frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} - \frac{N(u, \nu)}{H(u, \nu)}$$

$F(u, \nu)$ si $N(u, \nu) = 0$

$$h(u, \nu) \neq 0$$

$f(x, y)$

$$\hat{F}(u, \nu) = \frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} - \frac{N(u, \nu)}{H(u, \nu)}$$

Problèmes

- $H(u, \nu)$ peut s'annuler pour certaines fréquences
- $G(u, \nu)$ et $H(u, \nu)$ peuvent s'annuler simultanément
- le bruit $N(u, \nu)$ n'est jamais nul



Image Originale

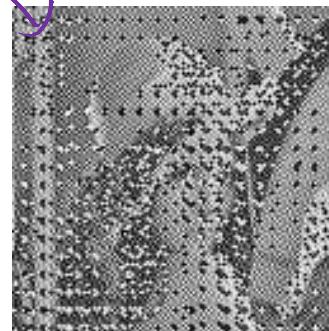
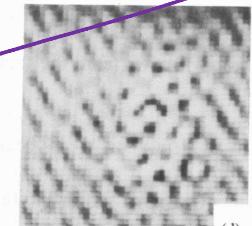
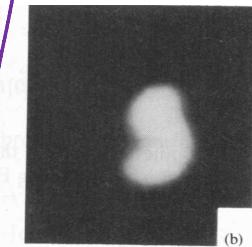
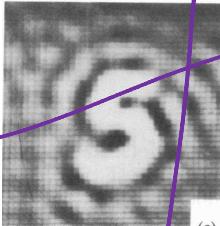
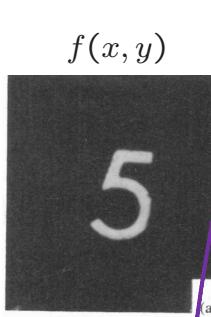
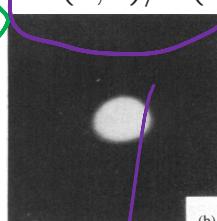
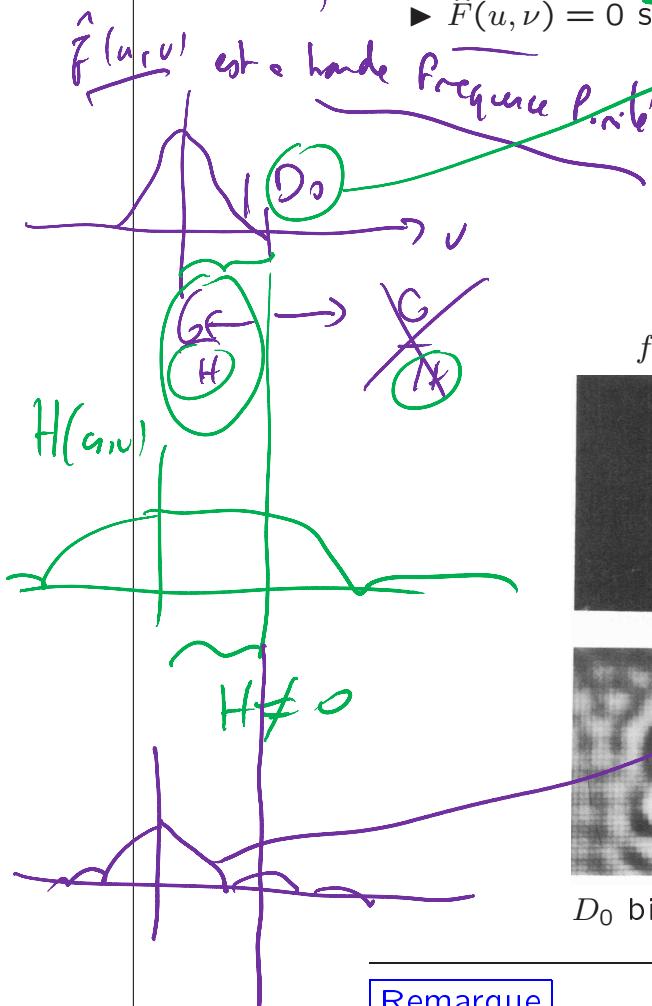


Image restorée par Filtrage Inverse

RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (2)

Solutions

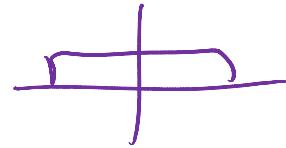
- Si $H(u, \nu)$ petit $\hat{F}(u, \nu) = G(u, \nu)$ (ou 0) sinon G/H
- Au delà d'une certaine fréquence de coupure D_0
 - $\hat{F}(u, \nu) = 0$ sinon $G(u, \nu)/H(u, \nu)$



flux pas trop synthetique



un peu



Remarque

$$\frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} = \frac{H^*(u, \nu) G(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}$$

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

$r + j$

$$O = O \cdot F(u_0, v)$$

RESTAURATION LA RESTAURATION : PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

$$F(u_0, v) = \frac{\partial}{\partial} =$$

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$\downarrow u_0, v_0$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

\blacktriangleleft Problème inverse mal posé

La solution de ce problème n'est pas unique et une très faible variation sur l'image $g(x, y)$ (un bruit par exemple), a pour effet de produire de grandes variations sur la solution

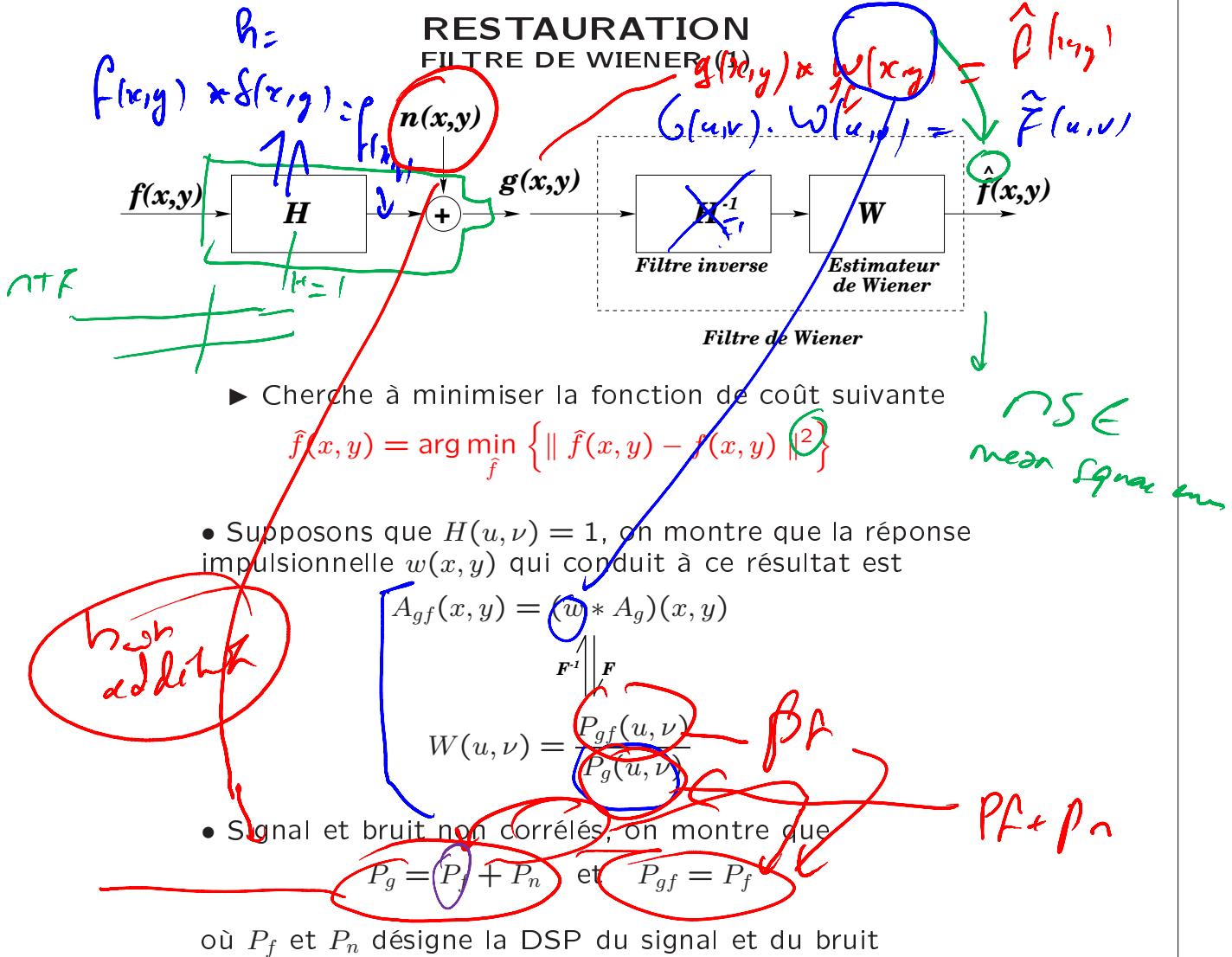
Solutions pour rendre le problème bien posé

- Exploiter les connaissances statistiques et spectrales de l'image et du bruit (filtre de Wiener, etc.)
- Modéliser et Exploiter des connaissances *a priori* que l'on a sur l'image et exploiter une solution que l'on sait être pas trop éloignée du résultat désiré (Algorithmes itératifs de Landweber, Tichonov-Miller, etc.)

On constraint la solution de ce problème

Avantage des algorithmes itératifs

- Ne requiert pas l'implémentation d'une division
- Le processus de restauration peut être contrôlé et visualisé à chaque itération



Nota

$$A_{gf}(x,y) = g(x,y) * F(-x,-y)$$

$A_g = g(x,y) * g(-x,-y)$ (Autocorrélation de $g(x,y)$)

$\mathcal{F}(A_g) = |G(u,v)|^2 = P_g(u,v)$ (DSP ou spectre de puissance)

$|\mathcal{F}(A_{gf})|^2 = P_{gf}(u,v)$ (Spectre d'interaction entre g et f)

10

$$g^\#(x,y)$$

$$A_g = g(x,y) * g(-x,-y)$$

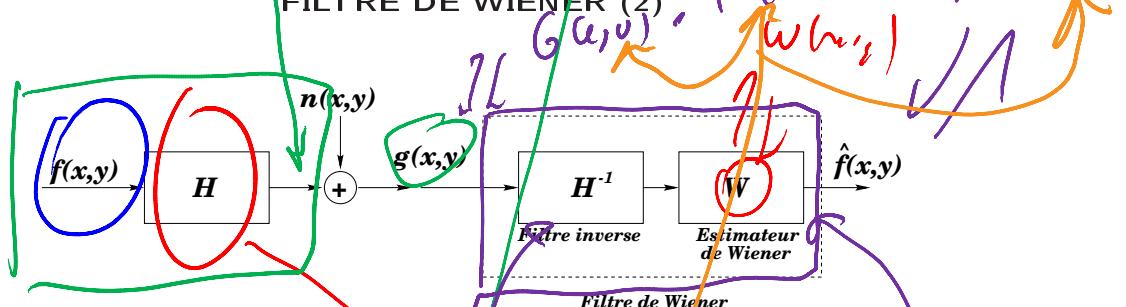
\sqrt{R}

$$\# \geq x$$

$$G(u,v) \cdot G^*(u,v) = |G(u,v)|^2$$

$P_f |H|^2$ au Pion de P_f

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (2)



$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)}$$

En considérant maintenant que $H(u, \nu) \neq 1$, on trouve,

$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + \frac{P_n(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}} = \frac{P_f(u, \nu) |H(u, \nu)|^2}{P_f(u, \nu) |H(u, \nu)|^2 + P_n(u, \nu)}$$

Fonction de transfert du filtre de Wiener

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{P_n(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}} \right]$$

Remarques

- $P_n(u, \nu)/P_f(u, \nu)$ peut être approximé par une constante ou une fonction choisie adéquatement
- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \rightarrow$ Filtrage inverse

Nota

$$f(x, y) \xrightarrow{|H|^2} P_f$$

$$f(x, y) \xrightarrow{|H|^2} P_f$$

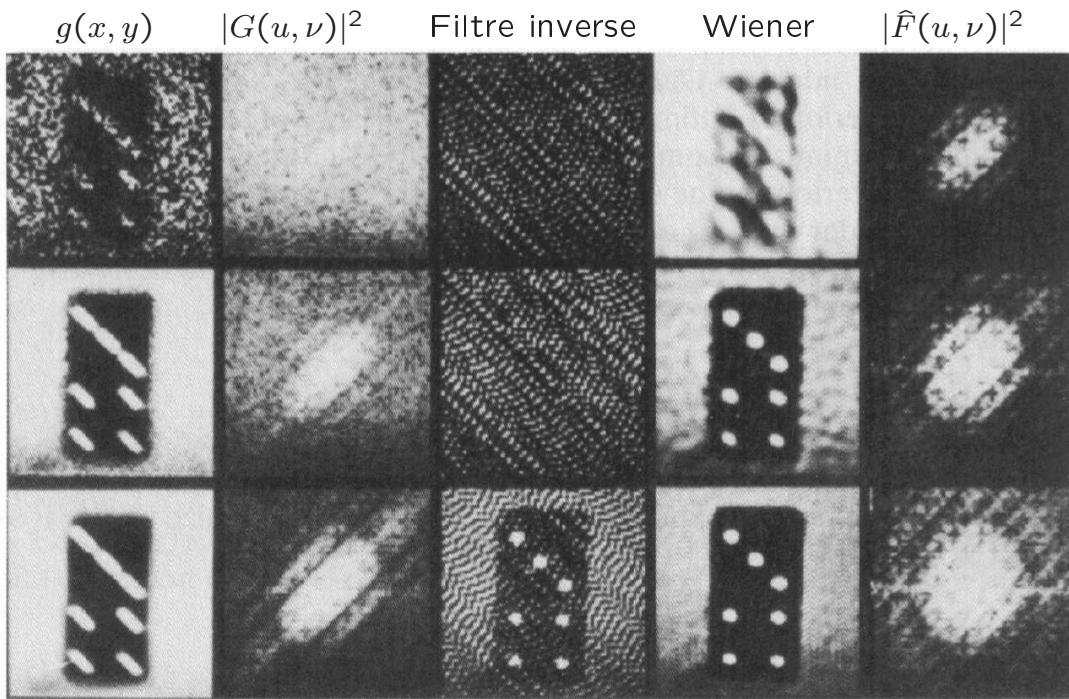
$$H[P_n(u, \nu)] = P_n |H|^2$$

$$\frac{\sigma^2}{P_g} = \frac{\sigma^2}{|G(u, \nu)|^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{P_g - \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{|G(u, \nu)|^2 - \sigma^2}$$

RESTAURATION FILTRE DE WIENER (3)

Exemples



Remarques

- Meilleur que le filtrage inverse
- Limité lorsque le flou est important

RESTAURATION

RESTAURATION INTERACTIVE

Restauration du spectre de puissance de l'image

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[\frac{P_f(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)} \right]^{1/2}$$

- Remarques -

- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \blacktriangleright$ Filtrage inverse
- Donne en général de meilleur résultats car $G(u, \nu) \neq 0$ lorsque $H(u, \nu)$ l'est, à la différence du filtre de Wiener.

Filtres de moyenne géométrique

Fonction de Transfert

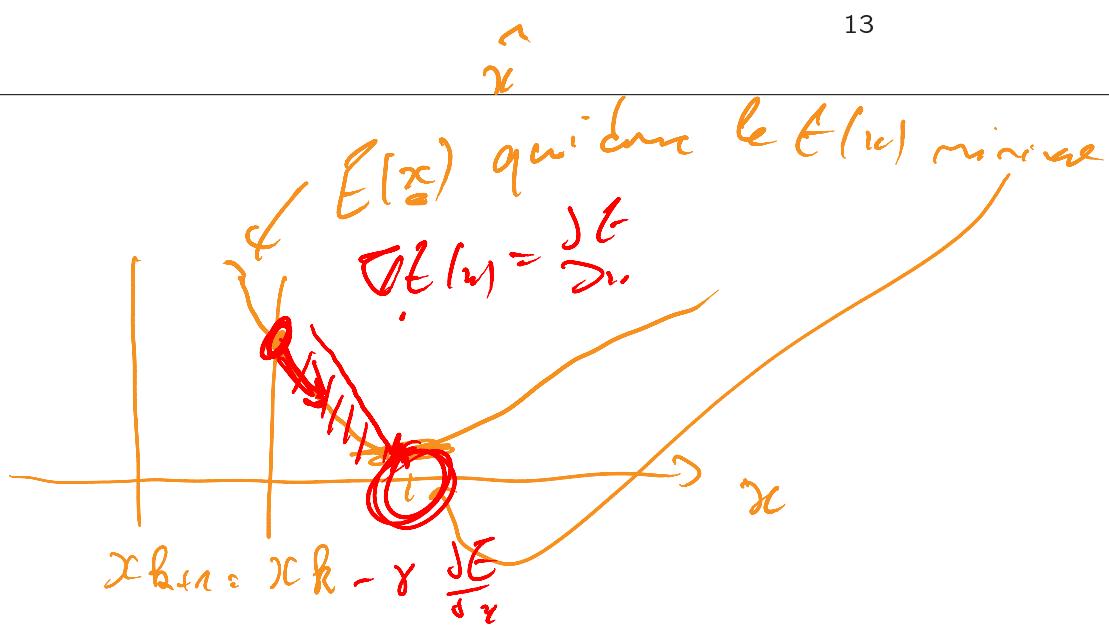
$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \right]^\alpha \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \beta \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]^{1-\alpha}$$

α et β sont des paramètres positifs.

- Remarques -

- Pour $\alpha = 1$ ou $\beta = 0 \blacktriangleright$ Filtre inverse
- Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1 \blacktriangleright$ Filtre de Wiener
- Pour $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1 \blacktriangleright$ Restauration du spectre de puissance de l'image (moyenne géométrique entre filtre inverse et Wiener)

13



$\widehat{f}(x)$

$$\|u^m\| = \mu^{m-1} \|u^1\|$$

RESTAURATION ALGORITHME ITÉRATIFS

Algorithmes de Landweber

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\widehat{f}(x, y) = \arg \min_f \left\{ \|g(x, y) - h(x, y) * \widehat{f}(x, y)\|^2 \right\}$$

$\widehat{f}_k(x, y)$

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\widehat{f}_{k+1}(x, y) = \widehat{f}_k(x, y) + \alpha h(-x, -y) * (g(x, y) - h(x, y) * \widehat{f}_k(x, y))$$

avec $\widehat{f}_0(x, y) = g(x, y)$



Image originale



Restoration (Algo. Landweber)

- Algorithme de descente du gradient avec $g(x, y)$ comme solution initiale et α comme pas ($\alpha = 1$)

RESTAURATION ALGORITHME ITÉRATIFS

Algorithmes de Tichonov-Miller

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_f \left\{ \|g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 + \alpha \|c(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 \right\}$$

où $c(x, y)$ représente l'opérateur laplacien 2D

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k+1}(x, y) &= \hat{f}_k(x, y) + \\ &\beta \left(g(x, y) * h(-x, -y) - (A_h(x, y) + \alpha A_c(x, y)) * \hat{f}_k(x, y) \right) \\ \text{avec } \hat{f}_0(x, y) &= \beta \left(g(x, y) * h(-x, -y) \right) \end{aligned}$$

$A_h(x, y)$ et $A_c(x, y)$, autocorrélation de $h(x, y)$ et $c(x, y)$
 α : paramètre de régularisation



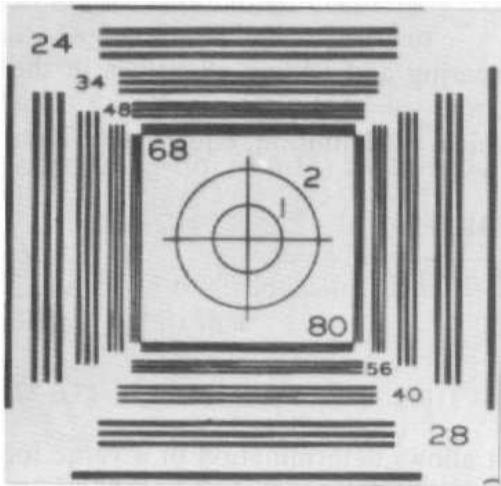
Image originale



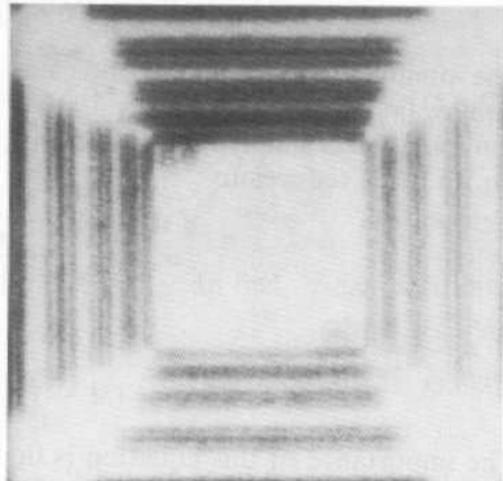
Restoration (Algo. Tichonov-Millerr)

RESTAURATION EXEMPLE

Exemples



(a)

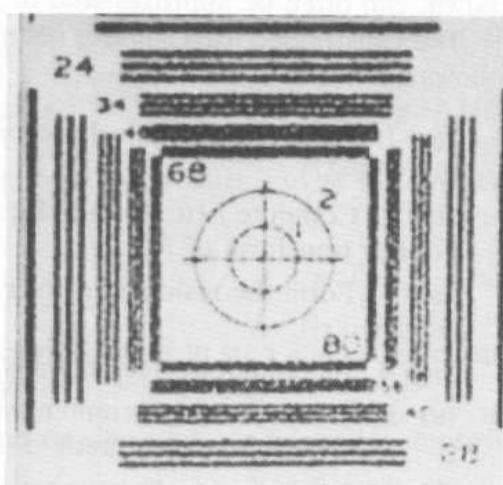


(b)



(c)

Filtre inverse



(d)

Filtre contraint