



DIRO  
IFT 6150

## TRAITEMENT D'IMAGES RESTAURATION

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : [mignotte@iro.umontreal.ca](mailto:mignotte@iro.umontreal.ca)

# RESTAURATION

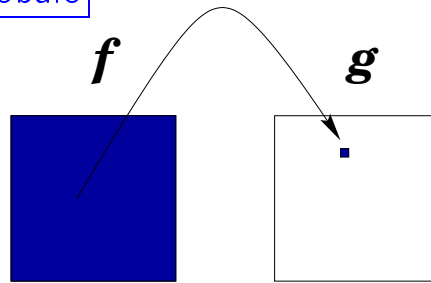
## SOMMAIRE

Modèle de Dégradation .....	2
Estimation du Modèle de Flou .....	4
Filtrage Inverse .....	7
La Restoration : Problème Inverse Mal Posé .	9
Filtre de Wiener .....	10
Restauration Interactive .....	13
Algorithmes Itératifs .....	14

# RESTAURATION

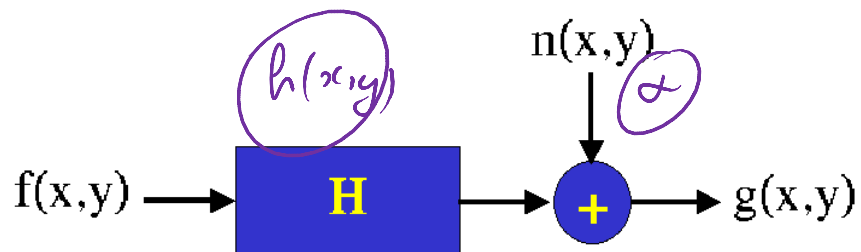
## MODÈLE DE DÉGRADATION (1)

Opération Globale



Modèle de Dégradation

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

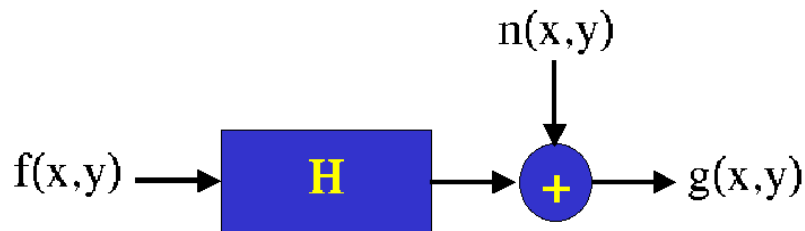


- $f(x, y)$  Image avant dégradation (ou image idéale)
- $n(x, y)$  Bruit supposé additif
- $g(x, y)$  Image dégradée (ou à restaurer)

**Restauration** ► Retrouver  $f(x, y)$  à partir de  $g(x, y)$   
- connaissant les caractéristiques du bruit  $n(x, y)$  ?  
- connaissant  $H()$  ?

# RESTAURATION

## MODÈLE DE DÉGRADATION (2)



$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y)$$

Modèle LINÉAIRE de Dégradation  
(H invariant en position)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ F^{-1} \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ F \\ \downarrow \end{matrix}$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

$h(x, y)$  : Réponse à l'impulsion  
(Réponse du système à une impulsion de Dirac)

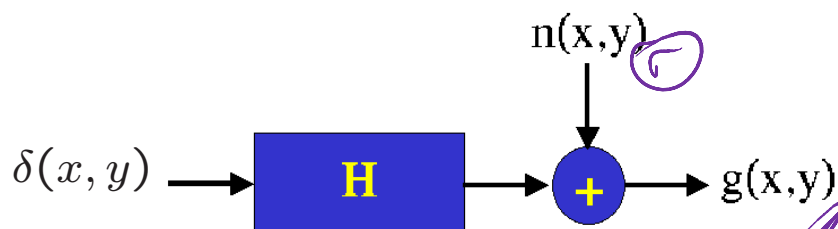
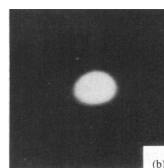
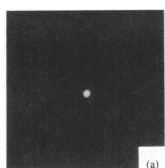
### Comment trouver $h(x, y)$ ?

- Réponse du système à une impulsion de Dirac
- Identification de la réponse du système à une source ponctuelle
- Identification du flou basé sur les zéros du domaine fréquentiel

# RESTAURATION

## ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (1)

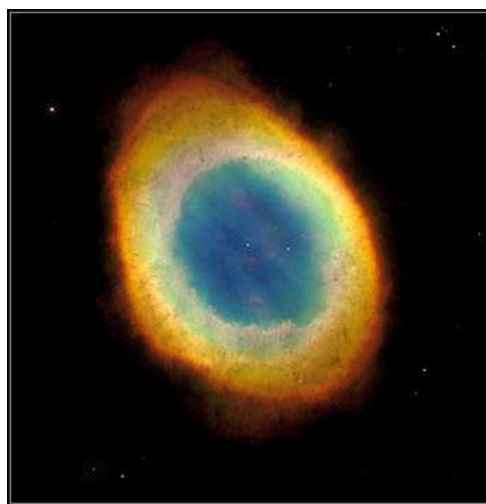
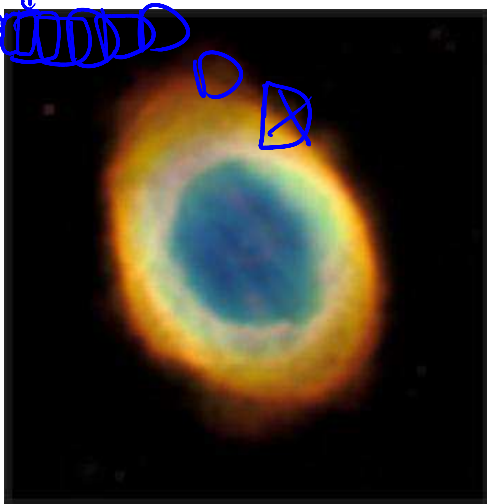
Réponse du système à une impulsion de Dirac



$$h(x, y) \approx h(x, y) * \delta(x, y) + n(x, y)$$

(On peut éliminer le bruit en moyennant par exemple)

Réponse du système à une source ponctuelle



# RESTAURATION

## ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (2)

### Identification du flou basé sur les zéros fréquentielles

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

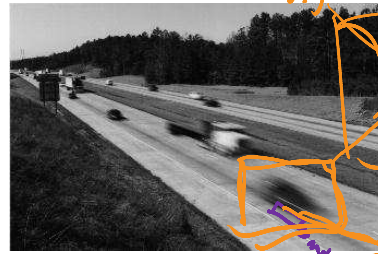
$$\pi\left(\frac{x}{c}\right) \approx p \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

Si on suppose une forme paramétrique connue pour la PSF (et donc pour sa réponse fréquentielle),  $H(u, v)$  peut être identifié en trouvant les zéros de  $G(u, v)$ .

#### a- Flou rectiligne causé par du mouvement

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0, -\infty \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{2d} & y = 0, -d \leq x \leq d \end{cases}$$



► Zéros sur des lignes perpendiculaires à la direction du mouvement et espacés de  $1/2d$

#### b- Erreur de mise au point de lentille circulaire

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > r \\ \frac{1}{\pi r^2} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \end{cases}$$

► Zéros se trouvant sur des cercles concentriques centrés à l'origine et périodique de période  $r$  dont le premier zéro est à la fréquence numérique  $\approx 0.61/r$

# RESTAURATION

## ESTIMATION DU MODÈLE DE FLOU (3)

c- Flou uniforme 2D

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

► Zéros espacés de  $n/L$  en  $u$  et  $v$

Bloc Diagramme

*Identification dans le domaine fréquentiel des zéros de l'image dégradée*

*Estimation des paramètres de la PSF*

*Restauration de l'image*

Problèmes

- Requiert une forme paramétrique pour la PSF
- Requiert une PSF créant des zéros dans le domaine fréquentiel (PSF Gaussienne ► aucun zéro)

# RESTAURATION

## FILTRAGE INVERSE (1)

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$$\mathbf{F}^{-1} \parallel \mathbf{F}$$

$$G(u, \nu) = H(u, \nu) \cdot F(u, \nu) + N(u, \nu)$$

$$(N(u, \nu))^2 \neq \sigma^2$$

$\exists u, \nu$

$$\hat{F}(u, \nu) = \frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} - \frac{N(u, \nu)}{H(u, \nu)}$$

$F(u, \nu) \text{ si } N(u, \nu) = 0$

$$h(u, \nu) \neq 0$$

$$\hat{F}(u, \nu) = \frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} - \frac{N(u, \nu)}{H(u, \nu)}$$

### Problèmes

- $H(u, \nu)$  peut s'annuler pour certaines fréquences
- $G(u, \nu)$  et  $H(u, \nu)$  peuvent s'annuler simultanément
- le bruit  $N(u, \nu)$  n'est jamais nul

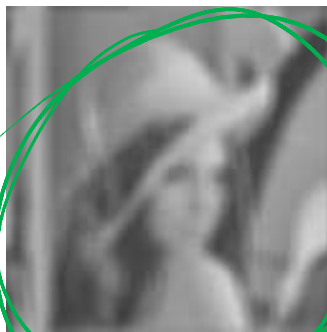


Image Originale

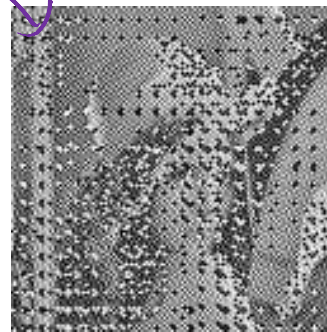


Image restaurée par Filtrage Inverse



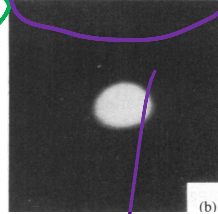
# RESTAURATION FILTRAGE INVERSE (2)

## Solutions

- Si  $H(u, \nu)$  petit  $\hat{F}(u, \nu) = G(u, \nu)$  (ou 0) sinon  $G/H$
- Au delà d'une certaine fréquence de coupure  $D_0$ 
  - $\hat{F}(u, \nu) = 0$  sinon  $G(u, \nu)/H(u, \nu)$

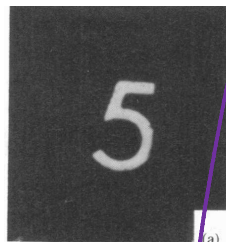
$\hat{f}(u, \nu)$  est une bande fréquence limitée

flou pas trop important



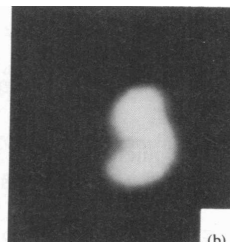
$h(x, y)$

$f(x, y)$

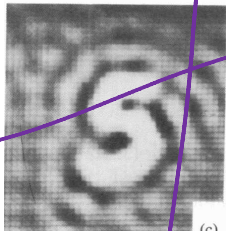


(a)

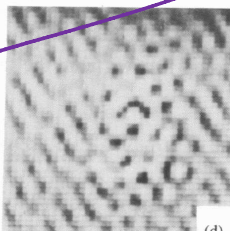
$g(x, y)$



(b)



(c)



(d)

$D_0$  bien choisi

$D_0$  trop grand

## Remarque

$$\frac{G(u, \nu)}{H(u, \nu)} = \frac{H^*(u, \nu) G(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}$$

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{(c+jd)(c-jd)} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

$n+1$

# RESTAURATION

## LA RESTAURATION : PROBLÈME INVERSE MAL POSÉ

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

$f(u, v)$

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) + N(u, v)$$

► Problème inverse mal posé

La solution de ce problème n'est pas unique et une très faible variation sur l'image  $g(x, y)$  (un bruit par exemple), a pour effet de produire de grandes variations sur la solution

### Solutions pour rendre le problème bien posé

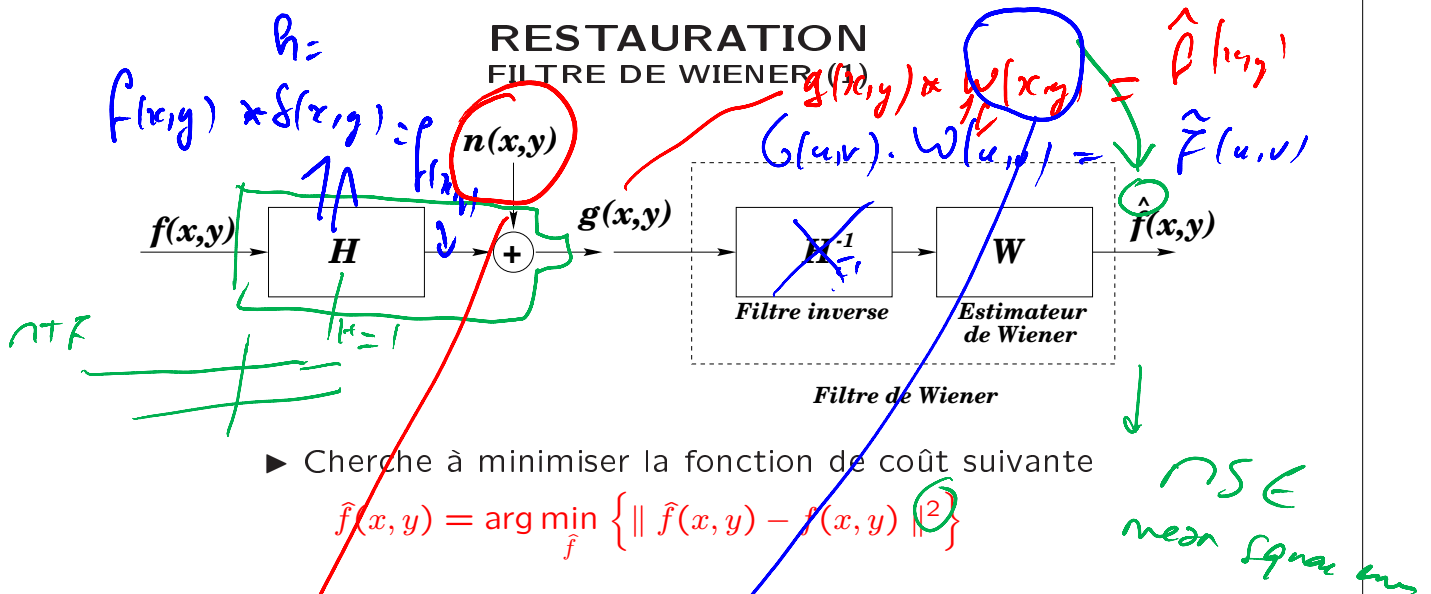
- Exploiter les connaissances statistiques et spectrales de l'image et du bruit (filtre de Wiener, etc.)
- Modéliser et Exploiter des connaissances *a priori* que l'on a sur l'image et exploiter une solution que l'on sait être pas trop éloignée du résultat désiré (Algorithmes itératifs de Landweber, Tichonov-Miller, etc.)

On contraint la solution de ce problème

### Avantage des algorithmes itératifs

- Ne requiert pas l'implémentation d'une division
- Le processus de restauration peut être contrôlé et visualisé à chaque itération

# RESTAURATION FILTRE DE WIENER (1)



► Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x,y) = \arg \min_{\hat{f}} \{ \| \hat{f}(x,y) - f(x,y) \|^2 \}$$

- Supposons que  $H(u,v) = 1$ , on montre que la réponse impulsionnelle  $w(x,y)$  qui conduit à ce résultat est

$$A_{gf}(x,y) = (w * A_g)(x,y)$$

$$F^{-1} \parallel F$$

$$W(u,v) = \frac{P_{gf}(u,v)}{P_g(u,v)}$$

- Signal et bruit non corrélés, on montre que

$$P_g = P_f + P_n \quad \text{et} \quad P_{gf} = P_f$$

où  $P_f$  et  $P_n$  désigne la DSP du signal et du bruit

Nota

$$A_{gf}(x,y) = g(x,y) * f(-x,-y)$$

$$A_g = g(x,y) * g(-x,-y) \quad (\text{Autocorrélation de } g(x,y))$$

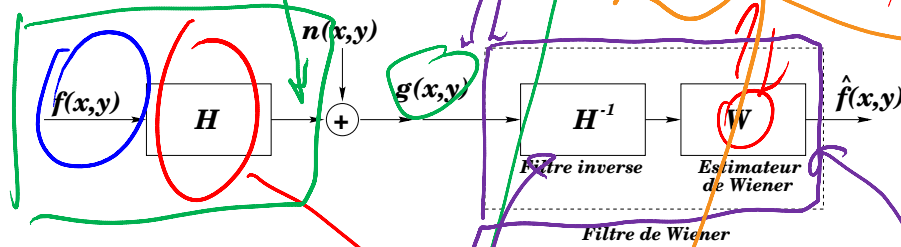
$$F(A_g) = |G(u,v)|^2 = P_g(u,v) \quad (\text{DSP ou spectre de puissance})$$

$$|F(A_{gf})|^2 = P_{gf}(u,v) \quad (\text{Spectre d'interaction entre } g \text{ et } f)$$

Handwritten notes:

- $g^\#(x,y)$
- $A_g = g(x,y) * g(-x,-y)$
- $\# \hat{=} *$
- $G(u,v) \cdot G^*(u,v) = |G(u,v)|^2$

# RESTAURATION FILTRE DE WIENER (2)



$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)}$$

En considérant maintenant que  $H(u, \nu) \neq 1$ , on trouve,

$$W(u, \nu) = \frac{P_f(u, \nu)}{P_f(u, \nu) + \frac{P_n(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2}} = \frac{P_f(u, \nu)|H(u, \nu)|^2}{P_f(u, \nu)|H(u, \nu)|^2 + P_n(u, \nu)}$$

Fonction de transfert du filtre de Wiener

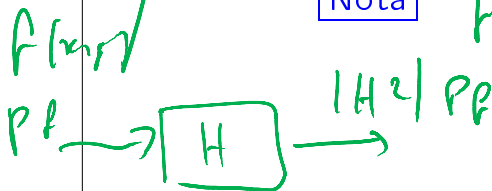
$$T(u, \nu) = \left[ \frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]$$

## Remarques

- $P_n(u, \nu)/P_f(u, \nu)$  peut être approximé par une constante ou une fonction choisie adéquatement
- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \rightarrow$  Filtrage inverse

## Nota

$$F_{H^2} H[P_n(u, \nu)] = P_n |H|^2$$



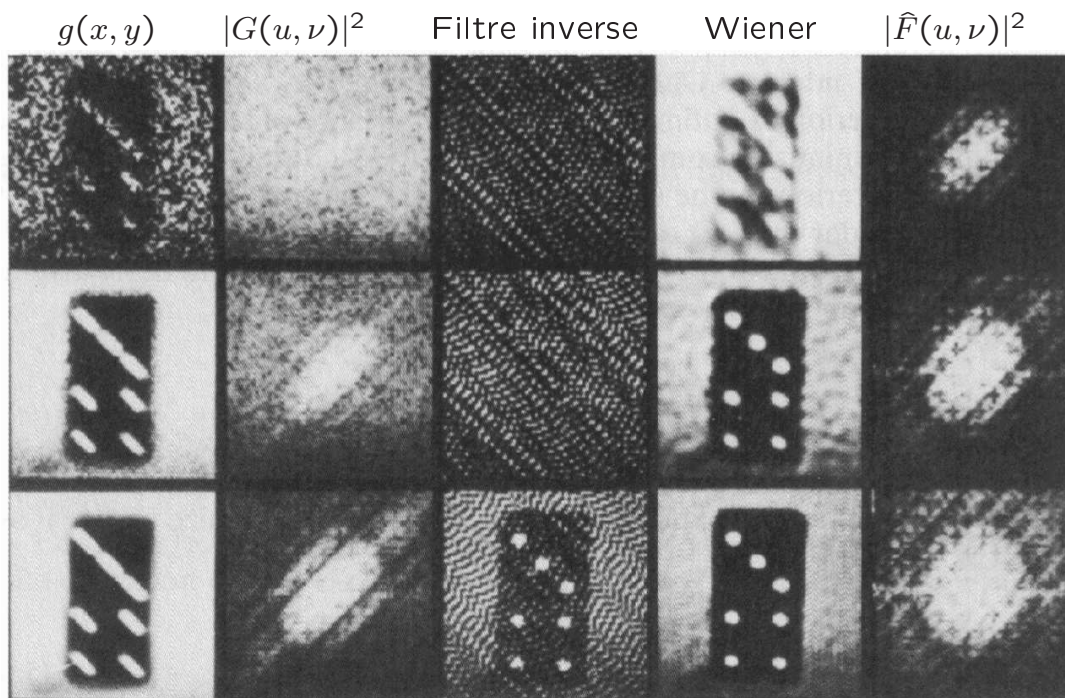
$$P_g = \frac{\sigma^2}{|G(u, \nu)|^2}$$

$$\frac{\sigma^2}{P_g - \sigma^2} = \frac{\sigma^2}{|G(u, \nu)|^2 - \sigma^2}$$

## RESTAURATION

### FILTRE DE WIENER (3)

#### Exemples



#### Remarques

- Meilleur que le filtrage inverse
- Limité lorsque le flou est important

# RESTAURATION

## RESTAURATION INTERACTIVE

### Restauration du spectre de puissance de l'image

Fonction de Transfert

$$T(u, \nu) = \left[ \frac{P_f(u, \nu)}{|H(u, \nu)|^2 P_f(u, \nu) + P_n(u, \nu)} \right]^{1/2}$$

- Remarques -

- $P_n(u, \nu) \rightarrow 0 \rightarrow$  Filtrage inverse
- Donne en général de meilleurs résultats car  $G(u, \nu) \neq 0$  lorsque  $H(u, \nu)$  l'est, à la différence du filtre de Wiener.

### Filtres de moyenne géométrique

Fonction de Transfert

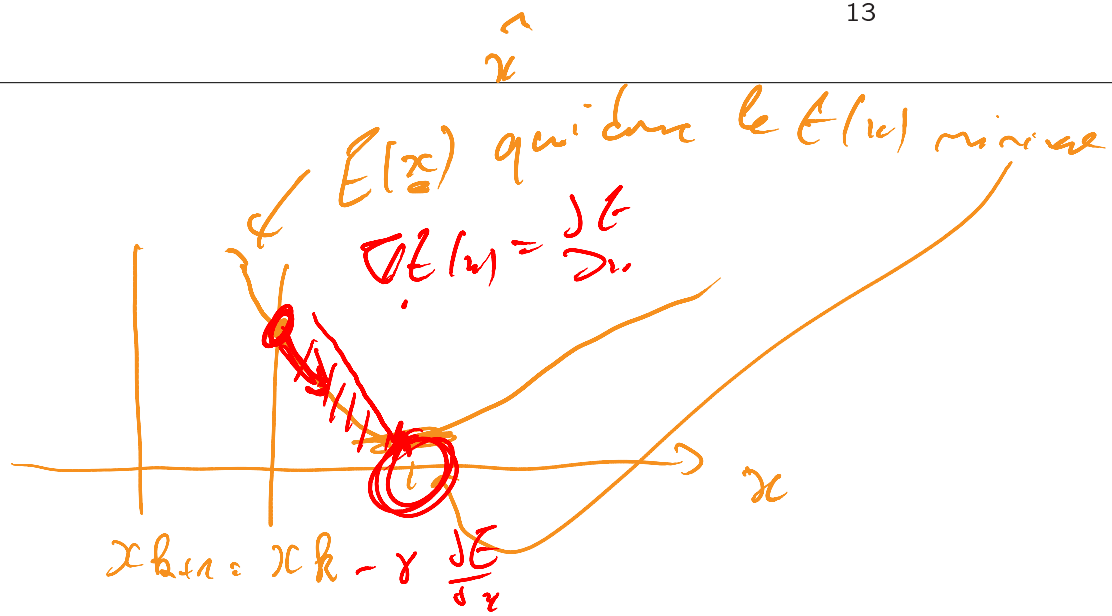
$$T(u, \nu) = \left[ \frac{1}{H(u, \nu)} \right]^\alpha \left[ \frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \beta \frac{P_n(u, \nu)}{P_f(u, \nu)}} \right]^{1-\alpha}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs.

- Remarques -

- Pour  $\alpha = 1$  ou  $\beta = 0 \rightarrow$  Filtre inverse
- Pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1 \rightarrow$  Filtre de Wiener
- Pour  $\alpha = 1/2$  et  $\beta = 1 \rightarrow$  Restauration du spectre de puissance de l'image (moyenne géométrique entre filtre inverse et Wiener)

13



$-8 \text{ DE}$

## RESTAURATION ALGORITHME ITÉRATIFS

### Algorithmes de Landweber

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_f \left\{ \|g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 \right\}$$

$-8 \text{ GUY}$

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\hat{f}_{k+1}(x, y) = \hat{f}_k(x, y) + \alpha h(-x, -y) * (g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}_k(x, y))$$

avec  $\hat{f}_0(x, y) = g(x, y)$



Image originale



Restoration (Algo. Landweber)

- Algorithme de descente du gradient avec  $g(x, y)$  comme solution initiale et  $\alpha$  comme pas ( $\alpha = 1$ )

## RESTAURATION ALGORITHME ITÉRATIFS

### Algorithmes de Tichonov-Miller

- Cherche à minimiser la fonction de coût suivante

$$\hat{f}(x, y) = \arg \min_f \left\{ \|g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 + \alpha \|c(x, y) * \hat{f}(x, y)\|^2 \right\}$$

où  $c(x, y)$  représente l'opérateur laplacien 2D

Conduit à l'approche itérative suivante

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k+1}(x, y) &= \hat{f}_k(x, y) + \\ &\beta \left( g(x, y) * h(-x, -y) - (A_h(x, y) + \alpha A_c(x, y)) * \hat{f}_k(x, y) \right) \\ \text{avec } \hat{f}_0(x, y) &= \beta \left( g(x, y) * h(-x, -y) \right) \end{aligned}$$

$A_h(x, y)$  et  $A_c(x, y)$ , autocorrélation de  $h(x, y)$  et  $c(x, y)$   
 $\alpha$  : paramètre de régularisation



Image originale



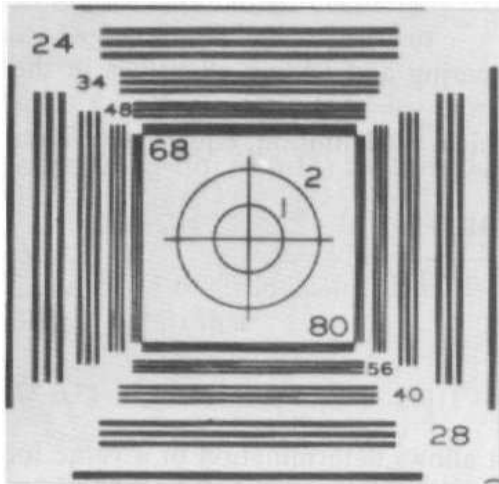
Restoration (Algo. Tichonov-Millerr)



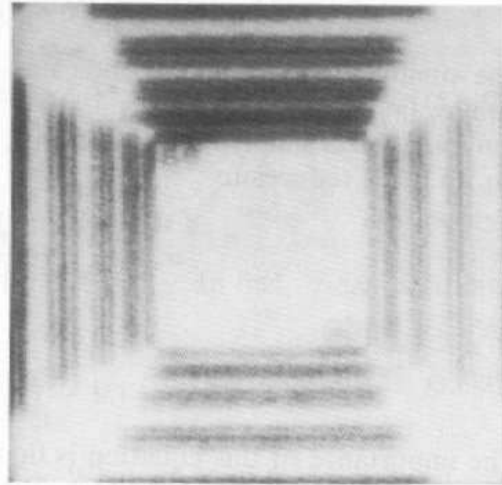
# RESTAURATION

## EXEMPLE

### Exemples



(a)

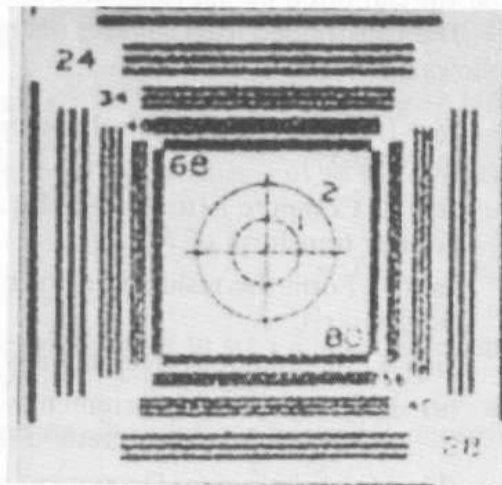


(b)



(c)

Filtre inverse



(d)

Filtre contraint