



## **TRAITEMENT D'IMAGES CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE**

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

# **CORRECTION GÉOMÉTRIQUE ET TOMOGRAPHIE**

## **SOMMAIRE**

Exemples .....	2
Transformations Géométriques .....	3
Interpolation Directe .....	4
Interpolation Bilinéaire .....	6
Autres Interpolations .....	8
Tomographie .....	9

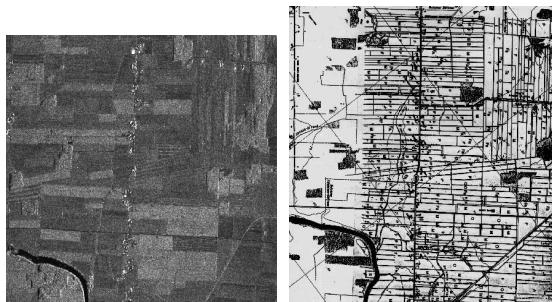
# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

## EXEMPLES

Exemples de distorsions géométriques



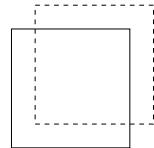
Exemples de corrections géométriques



# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

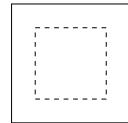
## TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

### Translation



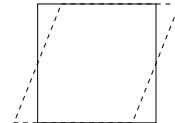
$$\begin{aligned}x' &= a + x \\y' &= b + y\end{aligned}$$

### Echelle



$$\begin{aligned}x' &= a \cdot x \\y' &= b \cdot y\end{aligned}$$

### Inclinaison



$$\begin{aligned}x' &= x + a \cdot y \\y' &= y\end{aligned}$$

### Rotation

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

### Assignation des niveaux de gris

► Nécessaire car la position d'un pixel transformé n'est pas entière

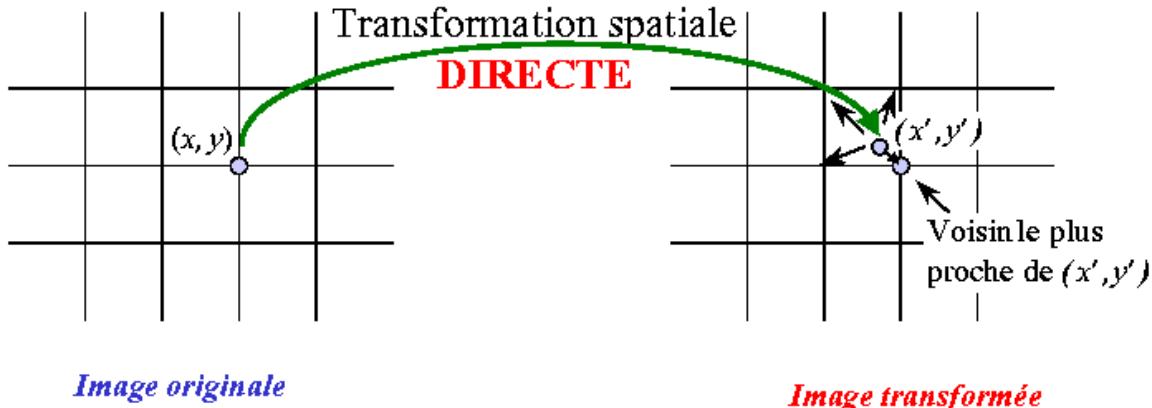
- Interpolation au voisin le plus proche
- Interpolation bilinéaire
- Autres type d'interpolation



# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

## INTERPOLATION DIRECTE (1)

### Transformée spatiale directe



- Difficile de distribuer le niveau de gris sur les pixels voisins
  - Des "trous" peuvent apparaître car on n'a pas la certitude que tous les pixels de l'image transformée recevront une valeur

### Exemple

Transformation : Facteur d'échelle  $10\times$

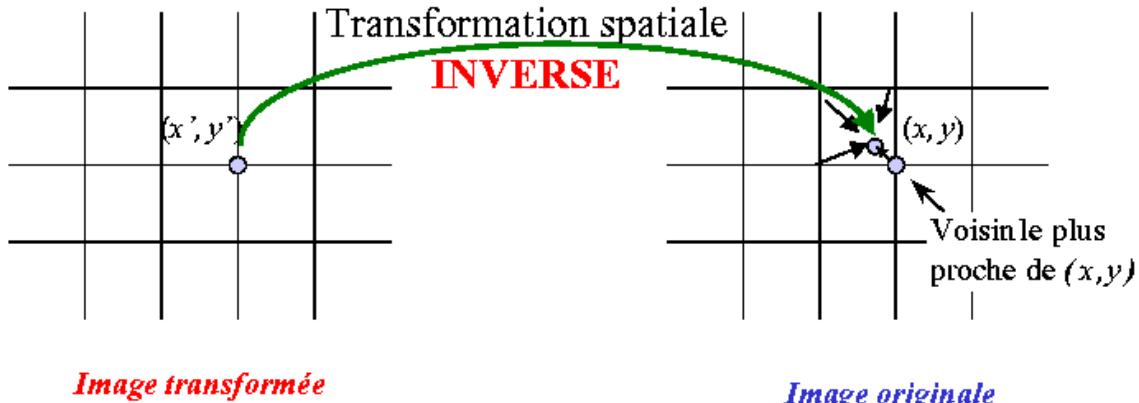
$A(x_0, y_0) \rightarrow A(x_0, y_0)$  et  $B(x_0 + 1, y_0) \rightarrow B(x_0 + 10, y_0)$

Mais entre  $A(x_0, y_0)$  et  $B(x_0 + 10, y_0)$  ?

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

### INTERPOLATION DIRECTE (2)

Transformée spatiale inverse



- ▶ Interpolation de la valeur du pixel à partir des voisins ▶ plus facile
  - ▶ Aucun "trou" car on parcourt tous les pixels de l'image transformée

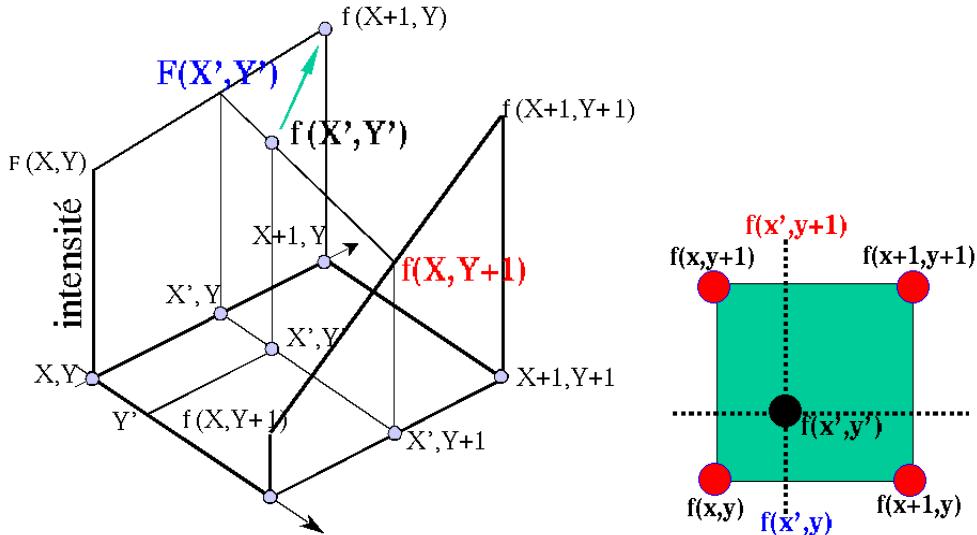
Exemple



512 × 512 ▶ 64 × 64

# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

## INTERPOLATION BILINÉAIRE (1)



$$f(x, y) = ax + by + cxy + d$$

4 inconnus ► 4 points

### Résolution du système

$$a = f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$b = f(x, y+1) - f(x, y)$$

$$c = f(x+1, y+1) + f(x, y) - f(x, y+1) - f(x+1, y)$$

$$d = f(x, y)$$

(4 Multiplications et 8 additions)

### Implantation

$$f(x', y) = f(x, y) + (x' - x)[f(x+1, y) - f(x, y)]$$

$$f(x', y+1) = f(x, y+1) + (x' - x)[f(x+1, y+1) - f(x, y+1)]$$

$$f(x', y') = f(x', y) + (y' - y)[f(x', y+1) - f(x', y)]$$

(3 Multiplications et 6 additions)

## CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

### INTERPOLATION BILINÉAIRE (2)

#### Exemple

100	150	$y+1$
175	●	$y$
$x$	$x+1$	

Quel est la valeur interpolée en  $(x+0.7, y+0.2)$ ?

- Interpolation au voisin le plus près : 200
- Interpolation bilinéaire

$$\begin{aligned}
 I(x', y) &= I(x, y) + [I(x+1, y) - I(x, y)](x' - x) \\
 &= 175 + (200 - 175) \times 0.7 = 192.5 \\
 I(x', y+1) &= I(x, y+1) + [I(x+1, y+1) - I(x, y+1)](x' - x) \\
 &= 100 + (150 - 100) \times 0.7 = 135 \\
 I(x', y') &= I(x', y) + [I(x', y+1) - I(x', y)](y' - y) \\
 &= 192.5 + (135 - 192.5) \times 0.2 = 181
 \end{aligned}$$

#### Exemple

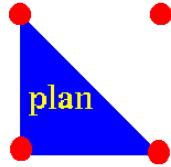


$512 \times 512 \blacktriangleright 64 \times 64$

# CORRECTION GÉOMÉTRIQUE

## AUTRES INTERPOLATION

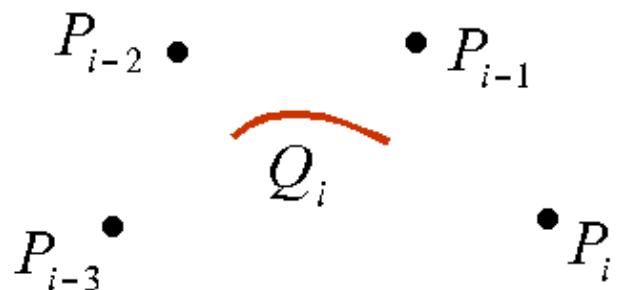
Interpolation linéaire



$$f(x, y) = ax + by + c$$

B-splines cubique

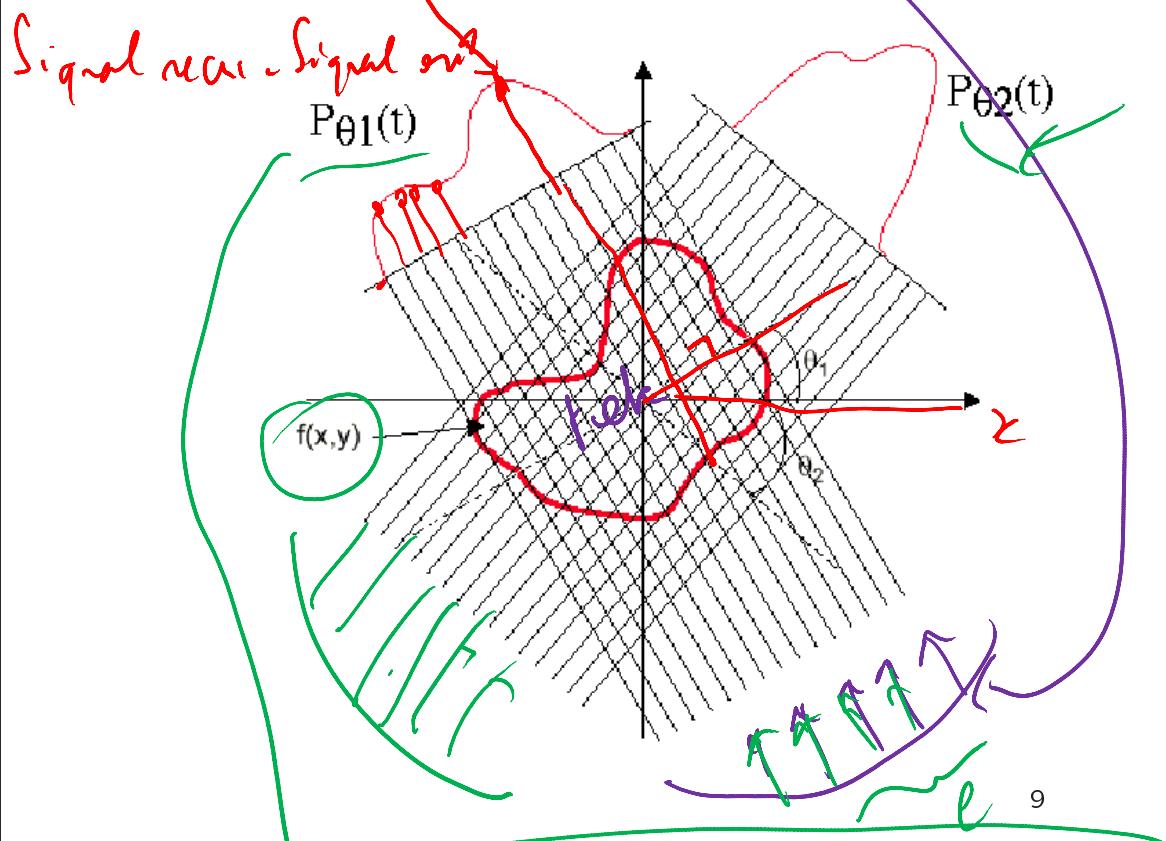
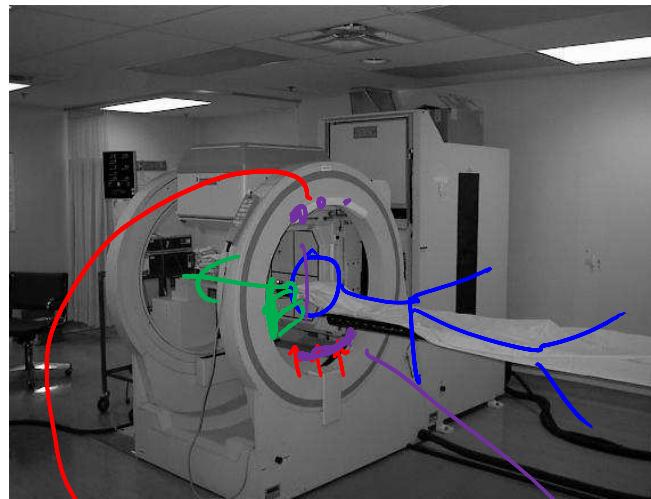
## B-Spline cubique



$$Q_i(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

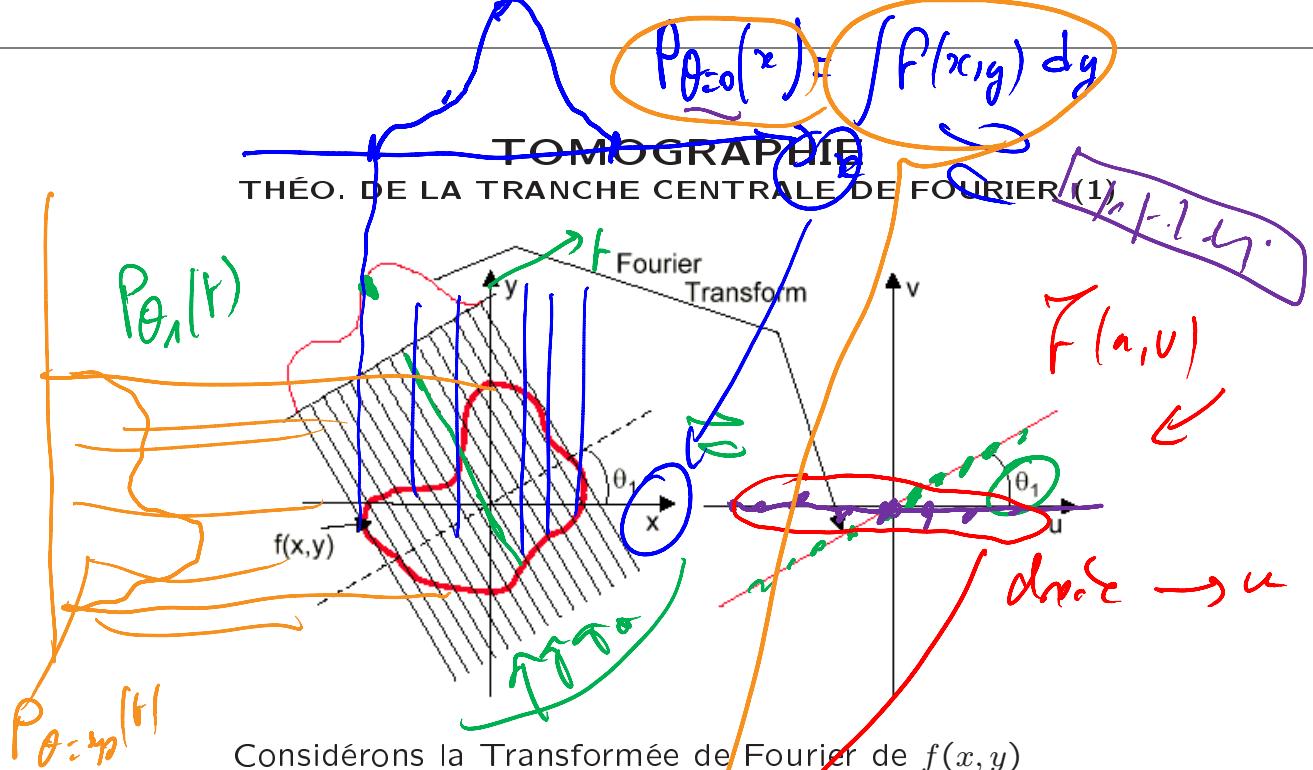
# TOMOGRAPHIE

## RECONSTRUCTION À PARTIR DE PROJECTIONS



$$P_{\theta_1}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$$





Considérons la Transformée de Fourier de  $f(x, y)$

$$F(u, v) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j(ux + vy)) dx dy$$

Que représente la ligne  $v = 0$  du spectre de Fourier ?

$$F(u, 0) = \int \left[ \int f(x, y) dy \right] \exp(-2\pi j(ux)) dx$$

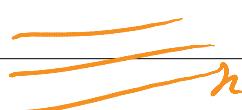
$$F(u, 0) = \mathcal{F}(p_{\theta=0^\circ}(t)) \text{ de même } F(0, v) = \mathcal{F}(p_{\theta=90^\circ}(t))$$

Plus généralement, pour une projection de l'image suivant un angle  $\theta$  (i.e., suivant un axe de projection passant par l'origine et orienté selon un angle  $\theta$ )

$$p_\theta(t) = \int_l f(x, y) dl$$



10

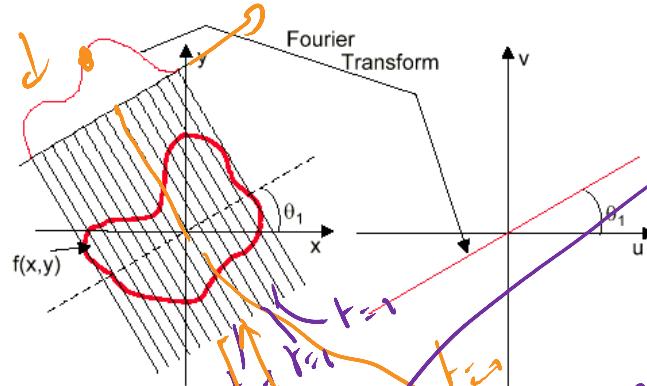


$$P_\theta(t) = \int_l f(x, y) dl$$

## TOMOGRAPHIE

### THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (2)

$P_{\theta_1}(t)$



Une ligne de projection au point  $t$  est (cf. Hough)

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t$$

$t \geq w$

On obtient donc

$$p_{\theta}(t) = \iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

La TF de  $p_{\theta}(t)$  est

$$P_{\theta}(w) = \int p_{\theta}(t) \exp(-2\pi j w t) dt$$

$$P_{\theta}(w) = \int \left[ \iint f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \right] \exp(-2\pi j w t) dt$$

En utilisant la propriété du  $\delta$ , ( $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$ )

$$P_{\theta}(w) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j w [x \cos \theta + y \sin \theta]) dx dy$$

Sachant que la TF 2D est

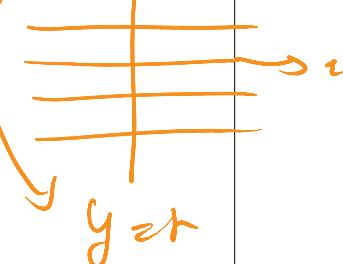
$$F(u, v) = \iint f(x, y) \exp(-2\pi j (ux + vy)) dx dy$$

$\theta = 0^\circ$



$x=t$

$\theta = 90^\circ$



$y=t$

$P_{\theta}(t) \geq P_{\theta}(w)$

$\int \delta(t) dt = 1$

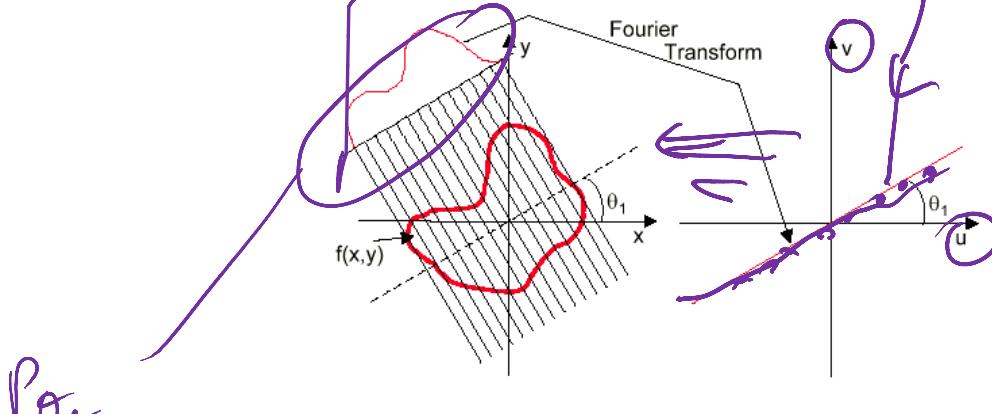
1975

## TOMOGRAPHIE

### THÉO. DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER (3)

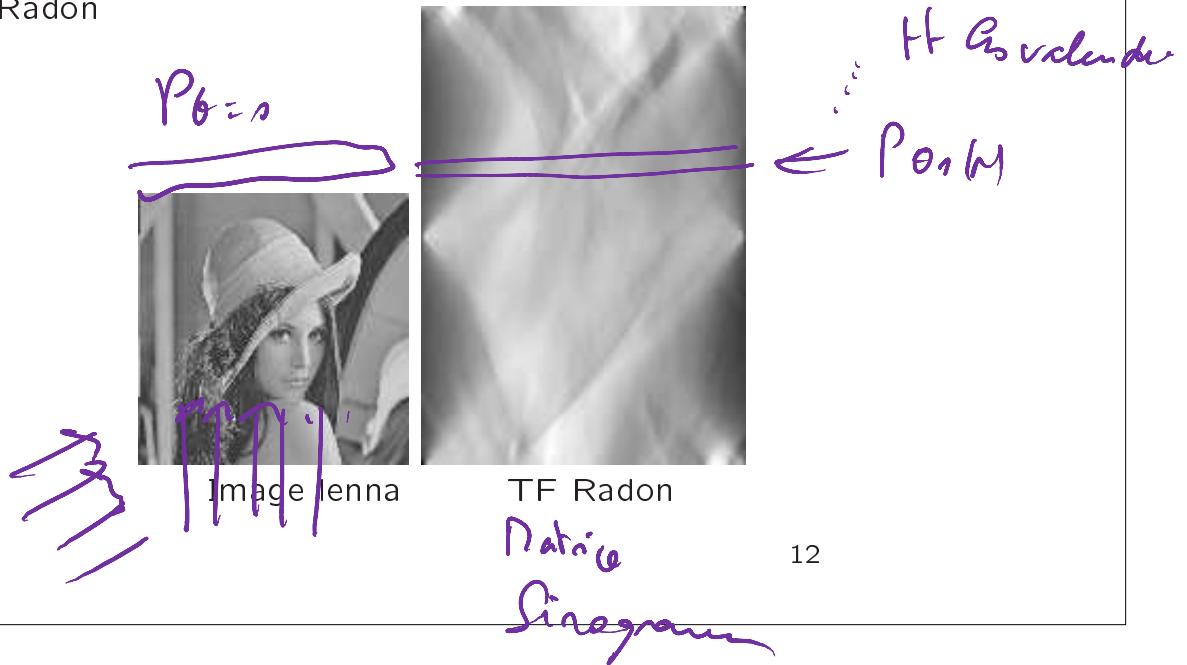
Si on pose  $u = w \cos \theta$  et  $v = w \sin \theta$ , on a l'équation de l'axe de projection dans le domaine de Fourier

Donc à une ligne du spectre de Fourier d'orientation  $\theta$  correspond la TF de la projection de l'image selon cet angle

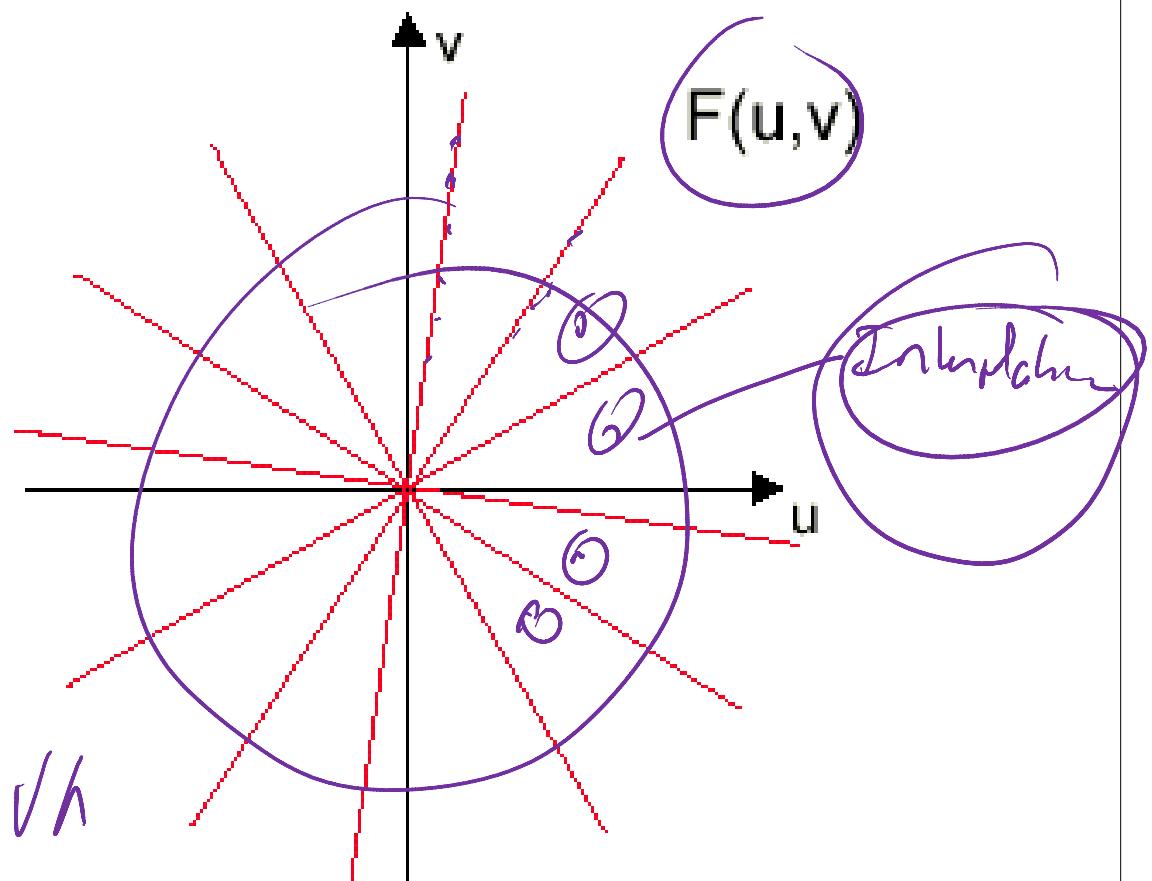


$p_{\theta_1}$

Si on empile les différentes projections  $p_\theta(t)$  d'une image dans une matrice  $g(\theta, t)$ , on obtient la Transformée de Radon



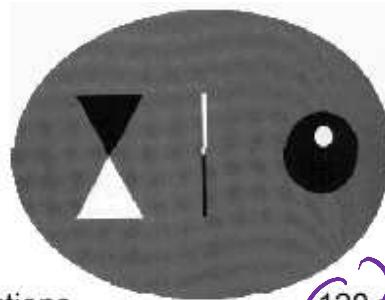
## TOMOGRAPHIE RECONSTRUCTION



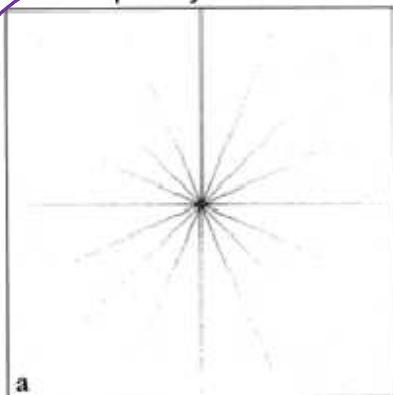
### Reconstruction

- Interpolation des points manquant de  $F(u, v)$ , par exemple ► interpolation bilinéaire
- Transformée de Fourier inverse de  $F(u, v)$  pour obtenir  $f(x, y)$  ► Cf. TP

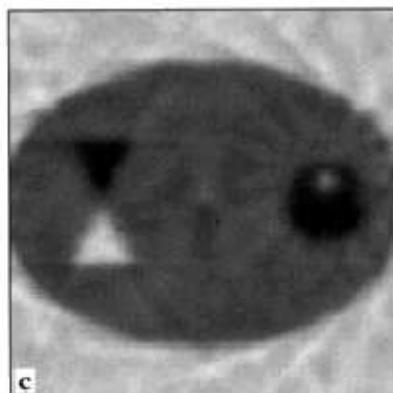
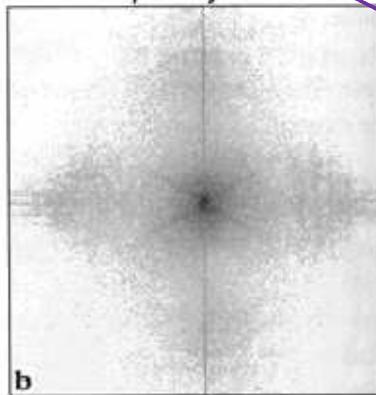
## TOMOGRAPHIE EXEMPLES



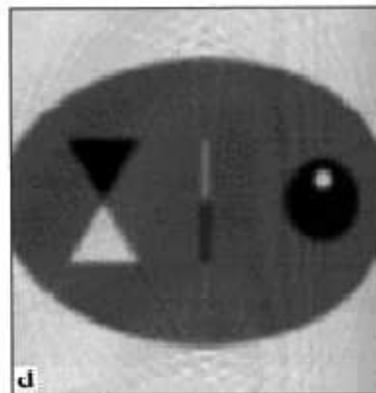
8 projections-  
Frequency Domain



120 projections-  
Frequency Domain

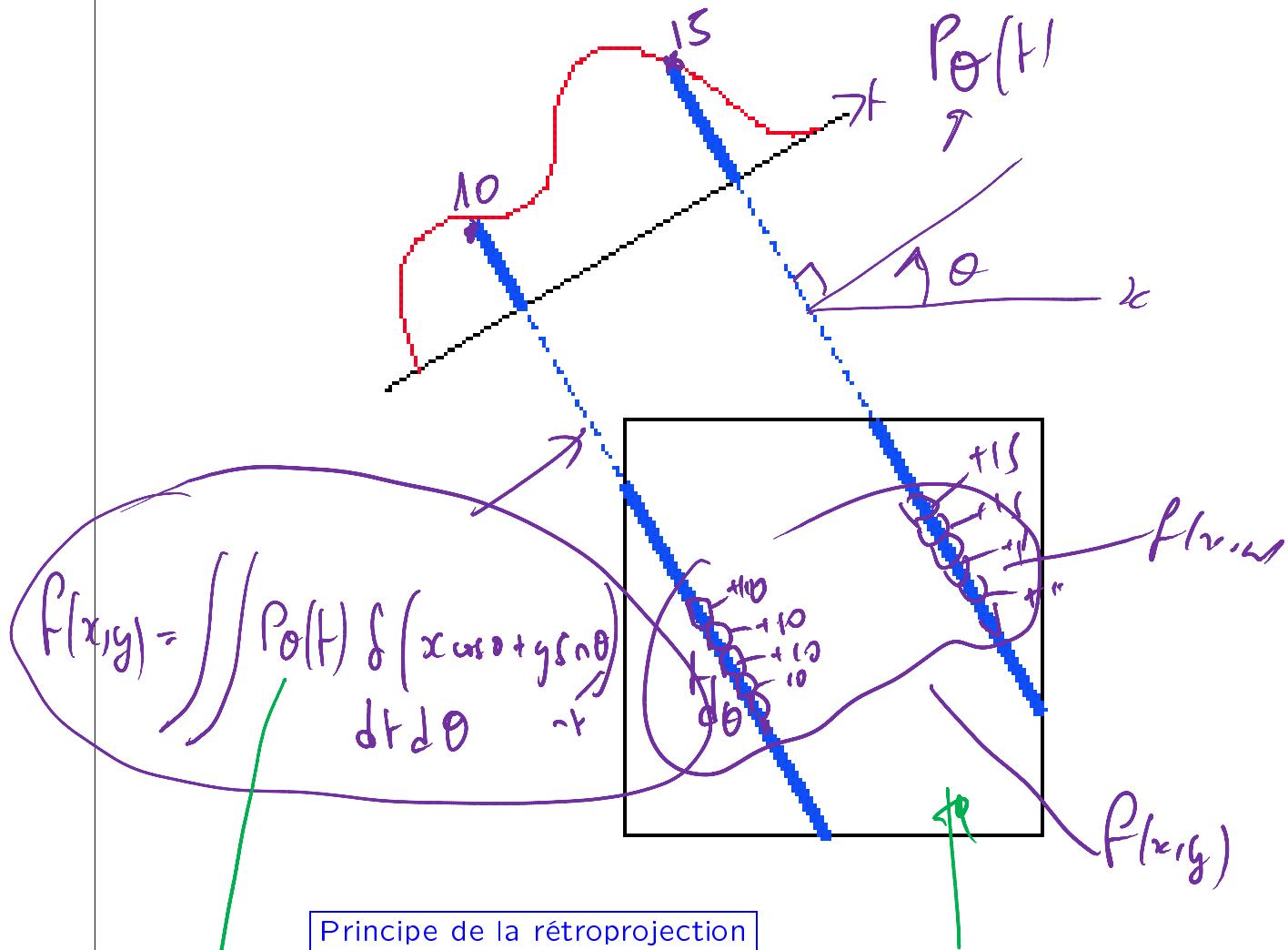


8 projections-  
Reconstruction



120 projections-  
Reconstruction

# TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION (1)



## Principe de la rétroprojection

- $p_\theta(t)$  est rétroprojecté le long des lignes de projections
  - Les valeurs de  $p_\theta(t)$  sont ajoutées aux valeurs existantes obtenues des autres projections

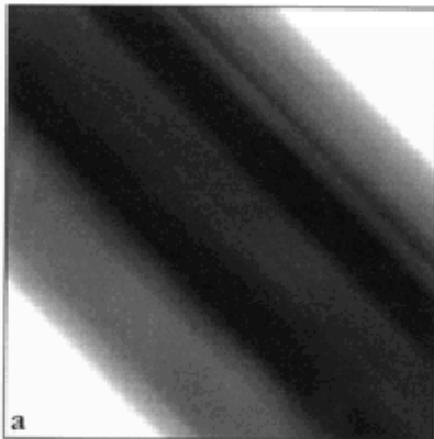
d. flue

15

$(P_\theta(t))$  ist die grone Bank

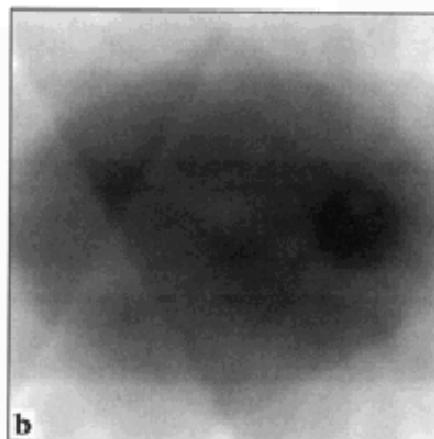
## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION (2- EXEMPLE)

1 view

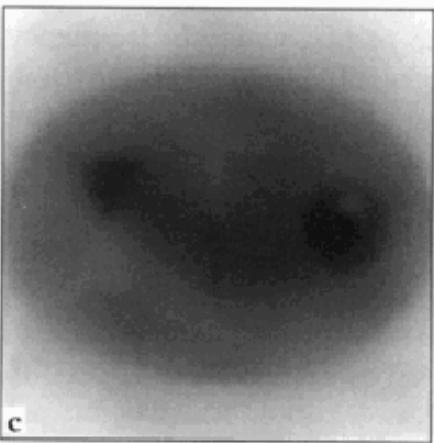


a

8 views

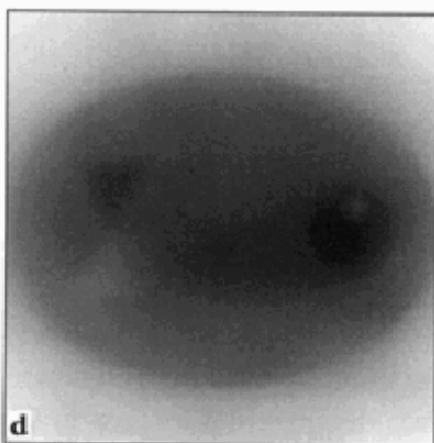


b



c

32 views



d

180 views

► Reconstruction floue

Un point rétroprojété ne donnera pas un point  
mais une "tache"

Solution : Infinité de Projections

$F(u, v)$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)]$$

### TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION FILTRÉE (3)

$$u = w \cos \theta$$
$$v = w \sin \theta$$

La TF inverse de  $F(u, v)$  est

$$f(x, y) = \iint F(u, v) \exp(2\pi j(ux + vy)) du dv$$

$$P_\theta(t) \geq P_\theta(w)$$

En coordonnées polaires

$$f(x, y) = \iint F(w, \theta) \exp(2\pi j(xw \cos \theta + yw \sin \theta)) |w| dw d\theta$$

Puisqu'on obtient  $F(w, \theta)$  à partir des projections  $P_\theta(w)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial w} & \frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$|w|$

$$f(x, y) = \iint [P_\theta(w) |w|] \exp(2\pi jw(x \cos \theta + y \sin \theta)) dw d\theta$$

$$= \iint [P_\theta(w) |w| \exp(2\pi jwt)] \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dt d\theta$$

(le long d'une ligne de projection d'orientation  $\theta$   
et passant par l'origine)

parabolique

$$f(x) \cdot \delta(x - x_0)$$

$$= f(x_0) \delta(z - z_0)$$

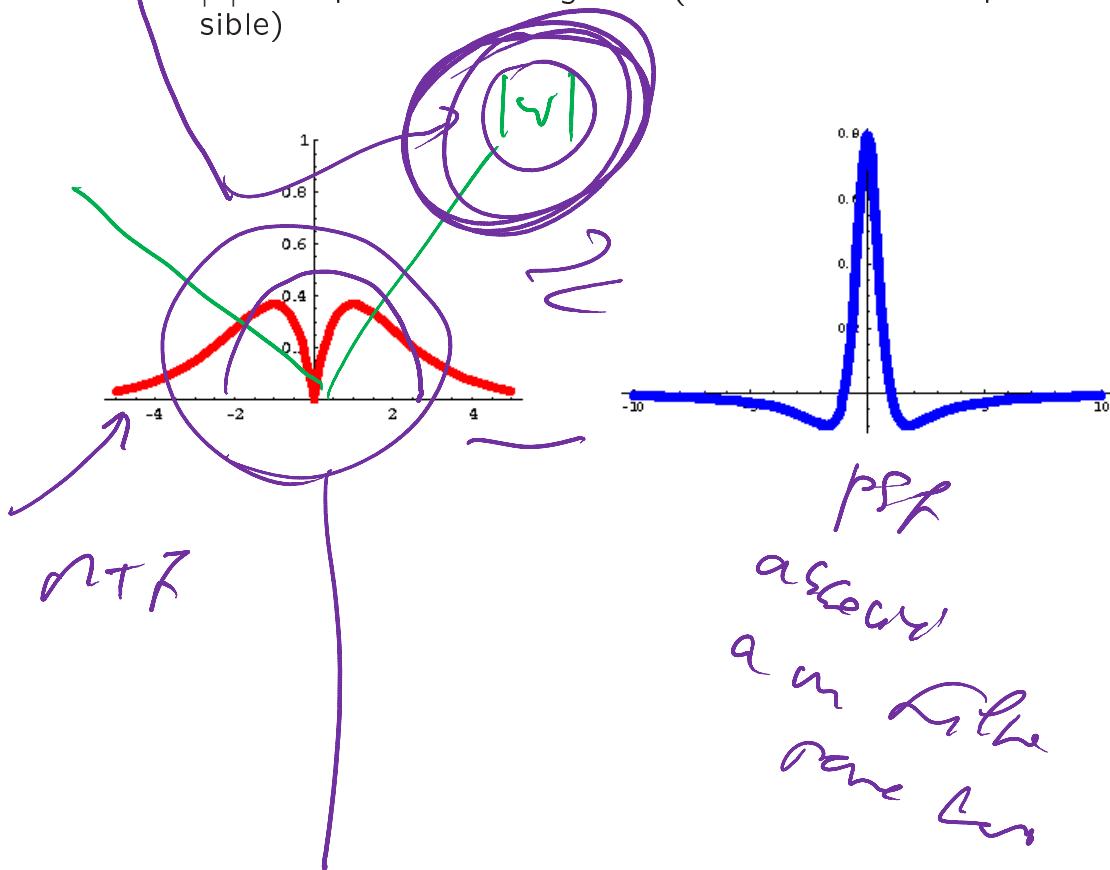
#### Principe de la rétroprojection filtrée

- On calcule  $P_\theta(w) |w|$  (projection filtrée)
- On fait la TF inverse de  $P_\theta(w)$  filtrée
- On rétroprojette pour tous les angles  $\theta$

## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION FILTRÉE (4)

### Réduction du bruit

- L'objet à reconstruire est bande-limité
- On a donc généralement intérêt à multiplier dans le domaine fréquence par une fenêtre de Hamming (filtre passe-bas)
- $|u|$  n'est pas carré intégrable (Fourier inverse impossible)



## TOMOGRAPHIE RÉTROPROJECTION FILTRÉE (5)

Exemple

