



# TRAITEMENT D'IMAGES

## BINARISATION ET MORPHOLOGIE

## MATHÉMATIQUE

*Max Mignotte*

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

# BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## SOMMAIRE

### **Seuillage**

Seuillage par Inspection .....	2
Seuillage Optimale .....	4
Seuillage Locale .....	7
Seuillage & Filtrage .....	9

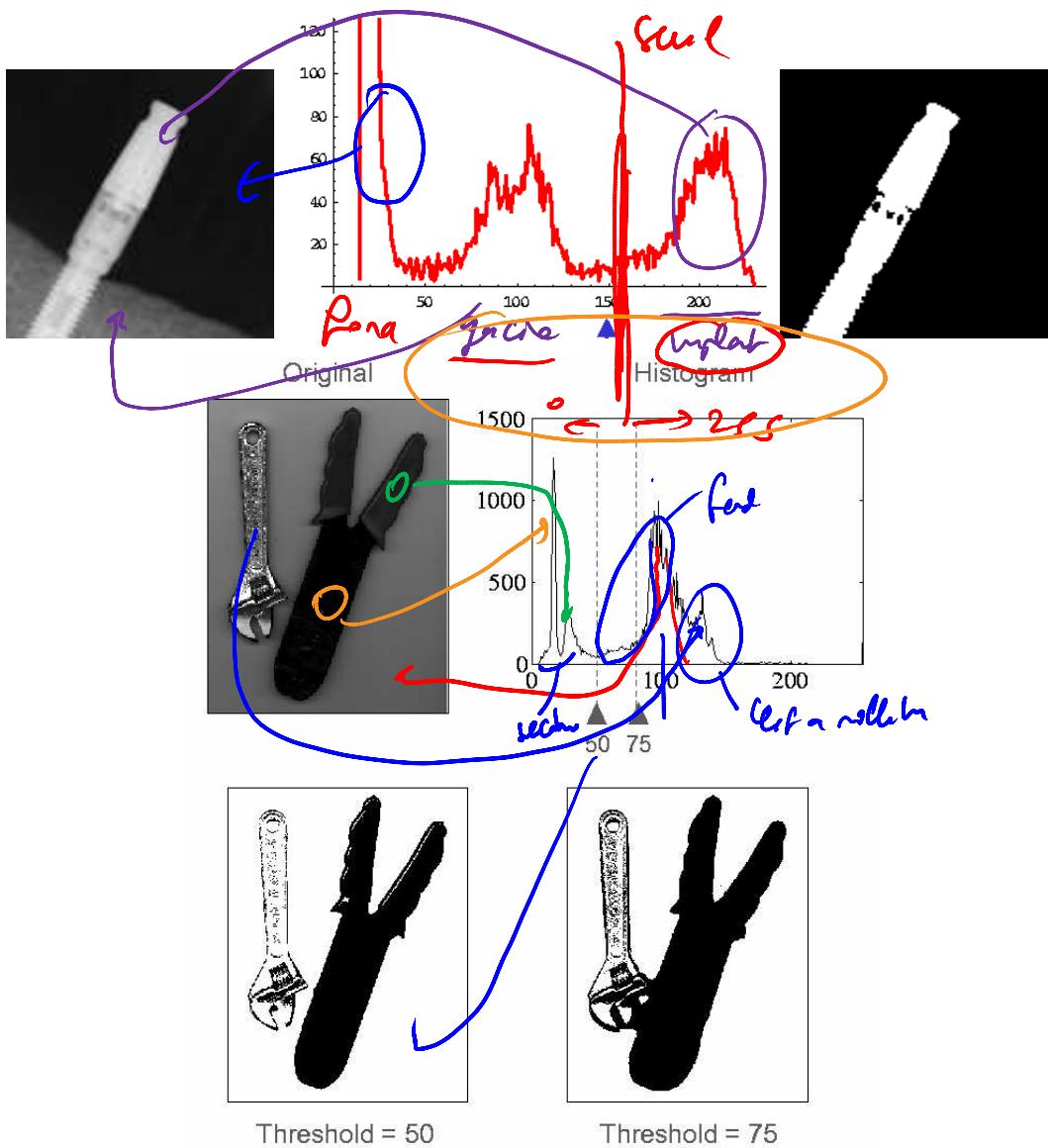
### **Morphologie Mathématique**

Théorie des Ensembles .....	10
Translation .....	11
Dilatation .....	12
Érosion .....	15
Détection des Contours .....	17
Estimation de Squelette .....	18
Remplissage .....	19
Détection .....	20
Ouverture .....	21
Fermeture .....	22
Propriétés de l'Ouverture/Fermeture .....	23
Filtrage Morphologique .....	24
Autres Applications .....	25
Morphologie en Niveaux de Gris .....	26
Exemples .....	27

## BINARISATION

### SEUILLAGE PAR INSPECTION (1)

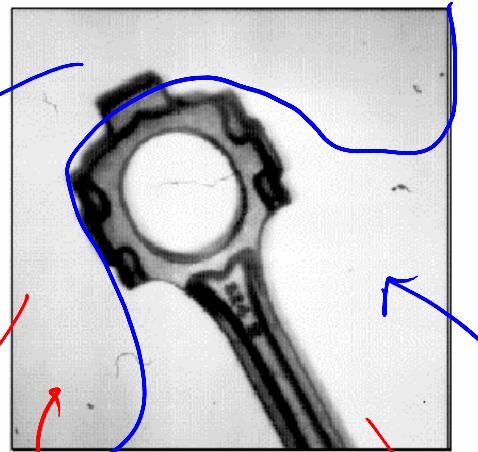
#### Seuillage par inspection de l'histogramme



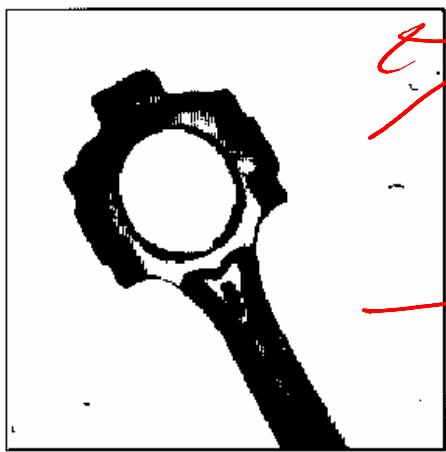
## BINARISATION SEUILAGE PAR INSPECTION (2)

Seuillage par inspection de l'histogramme

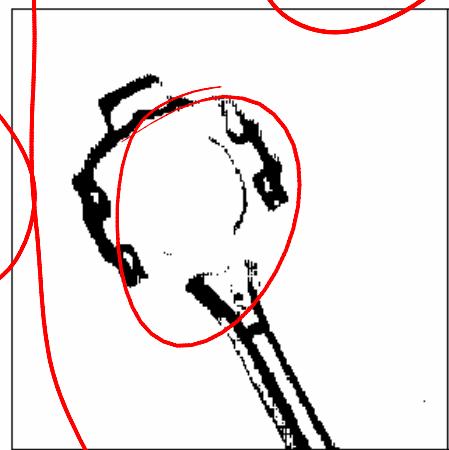
Original Image



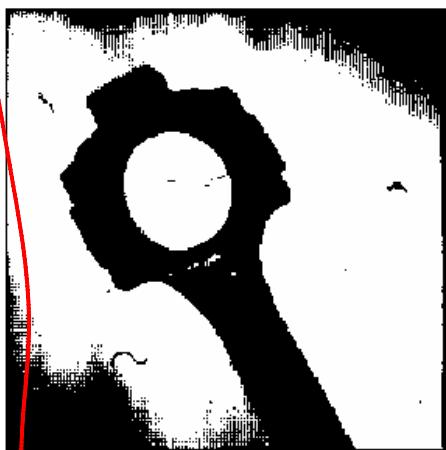
Binary Image



Threshold too low



Threshold too high



debut  
d'histogramme

Restante

filterage horizontale



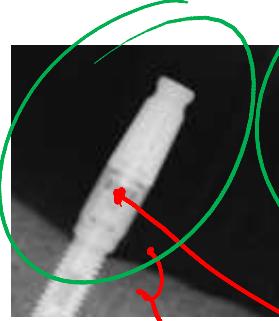
3  
debut  
d'histogramme

phén

fin

## BINARISATION SEUILAGE OPTIMAL (1)

Seuillage optimal



Soit deux régions (arrière-plan et objet) présent dans une image

La probabilité  $P(z)$  d'avoir une valeur de niveau de gris  $z$  ( $z \in [0, 255]$  par ex.) dans l'image est donnée par

$$p(z) = P_1 p_1(z) + P_2 p_2(z)$$

$P_i$  : prop. de pixels appartenant à la région  $i$  ( $P_1 + P_2 = 1$ )  
 $p(z)$  : Histogramme de l'image  
 $p_i(z)$  : proba. d'un pixel  $\in$  région  $i$  d'avoir un ng =  $z$

Si nous supposons que  $p_1(z)$  et  $p_2(z)$  sont distribués selon une loi normale, nous obtenons

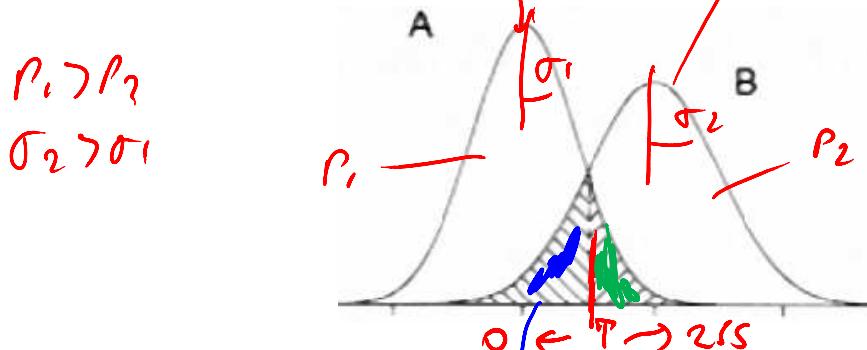
$$p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

## BINARISATION SEUILAGE OPTIMAL (2)

$p(z)$  devient alors  $P_1 p_1(z)$

$$p(z) = P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + P_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$



Soit  $E_1$ , la probabilité de classer un pixel dans la classe 1 lorsqu'il appartient à la classe 2 et  $E_2$ , la proba. de classer un pixel dans la classe 2 lorsque celui-ci appartient à la classe 1.

Les probabilités d'erreur sont données par

$$E_1(T) = \int_{-\infty}^T p_2(z) dz \quad \text{et} \quad E_2(T) = \int_T^{\infty} p_1(z) dz$$

La probabilité d'erreur totale est alors donnée par

$$E(T) = P_2 E_1(T) + P_1 E_2(T) = P_2 \left( \int_{-\infty}^T p_1(z) dz \right) + P_1 \left( 1 - \int_T^{\infty} p_2(z) dz \right)$$

Cherchons une valeur de  $T$  qui minimise  $E(T)$

$$E'(T) = -P_1 p_1(T) + P_2 p_2(T) = 0$$

$$P_1 p_1(T) = P_2 p_2(T)$$

5

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^T P_1 p_1(z) dz + \int_T^{\infty} P_2 p_2(z) dz &= 1 \\ \int_{-\infty}^T P_1 p_1(z) dz &= 1 - \int_T^{\infty} P_2 p_2(z) dz \end{aligned}$$

nb de pixels real devu

0% de pixels appartenant à classe de classe qui ont été mis en classe

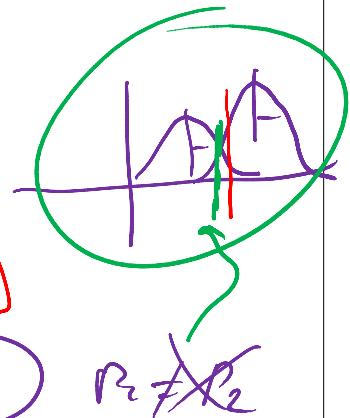
## BINARISATION SEUILAGE OPTIMAL (3)

Après simplification, nous obtenons une expression de la forme

$$AT^2 + BT + C = 0$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ B &= 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2) \\ C &= \mu_2^2 \sigma_1^2 - \mu_1^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_2 P_1}{\sigma_1 P_2}\right) \end{aligned}$$



- Lorsque les variances sont égales

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma^2 \\ T &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \end{aligned}$$

$$P_1 = P_2$$

- Lorsque les variances et les proportions sont égales

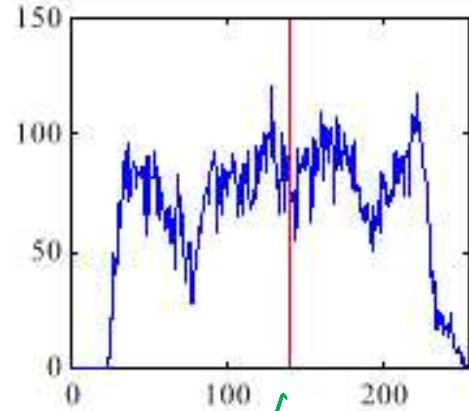
$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ T &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \\ T &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \end{aligned}$$

**BINARISATION**  
SEUILAGE LOCALE (1)

Original

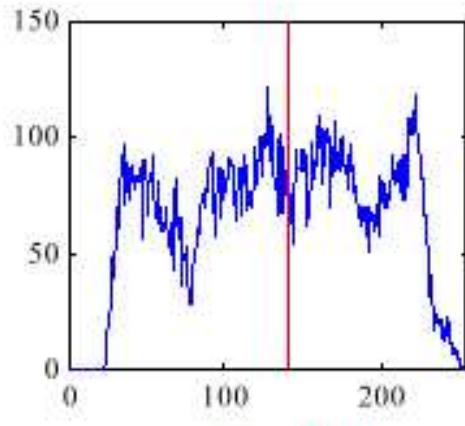
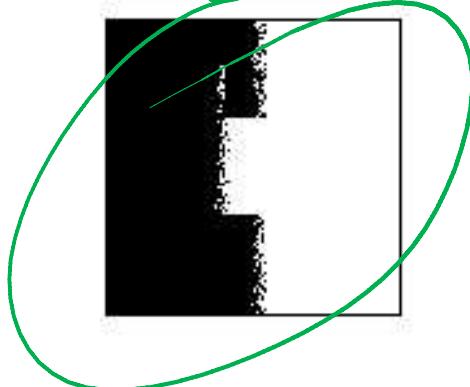


Histogram



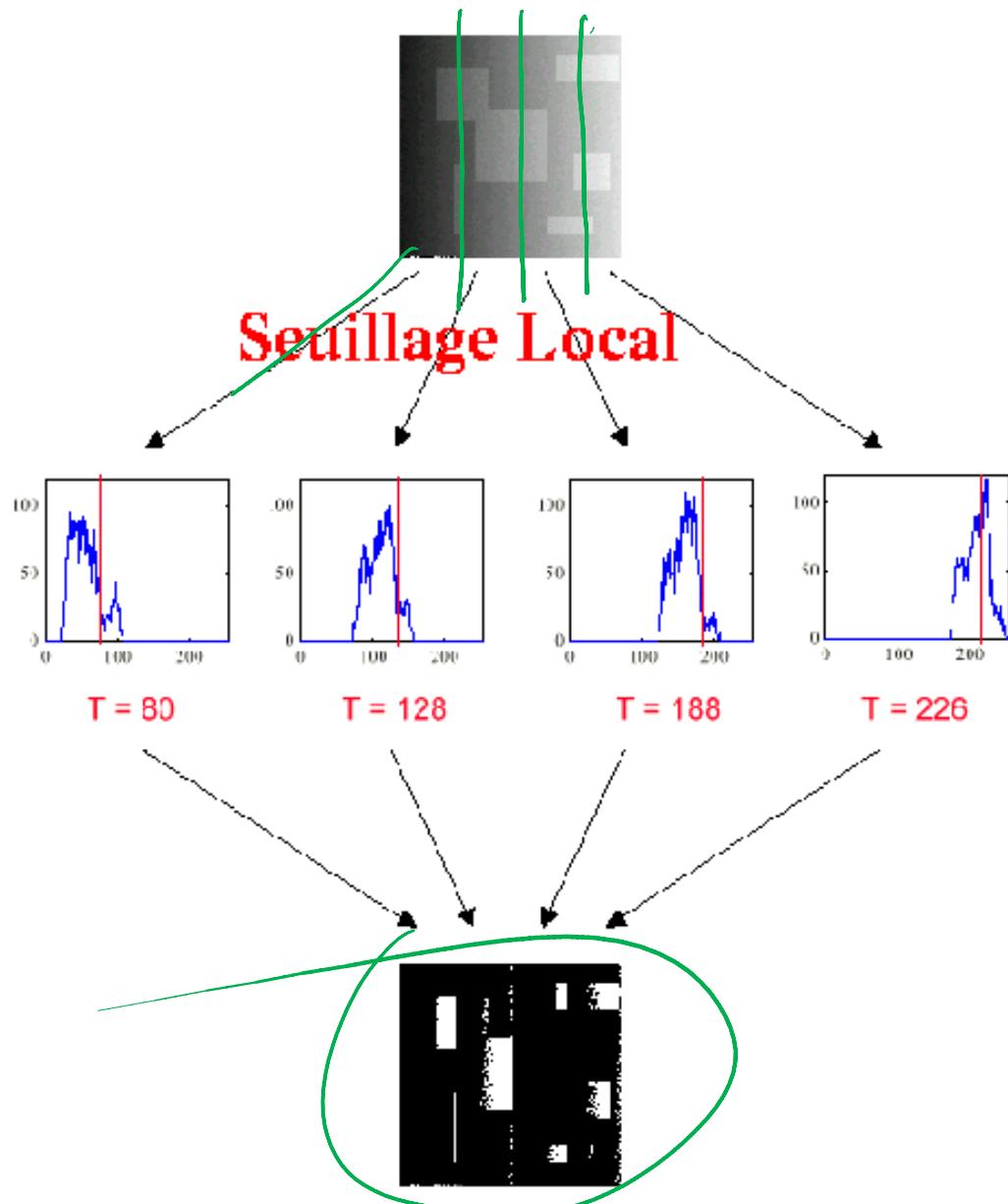
**Single Global Threshold**

$T$

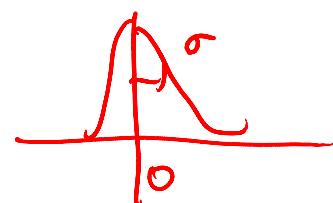


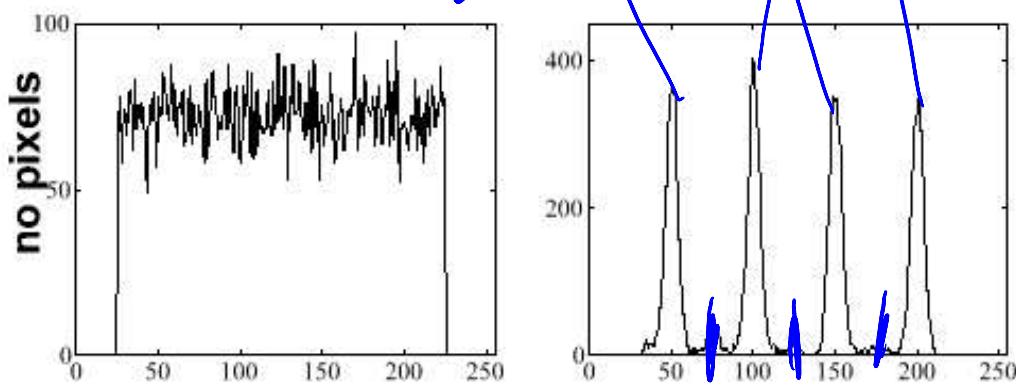
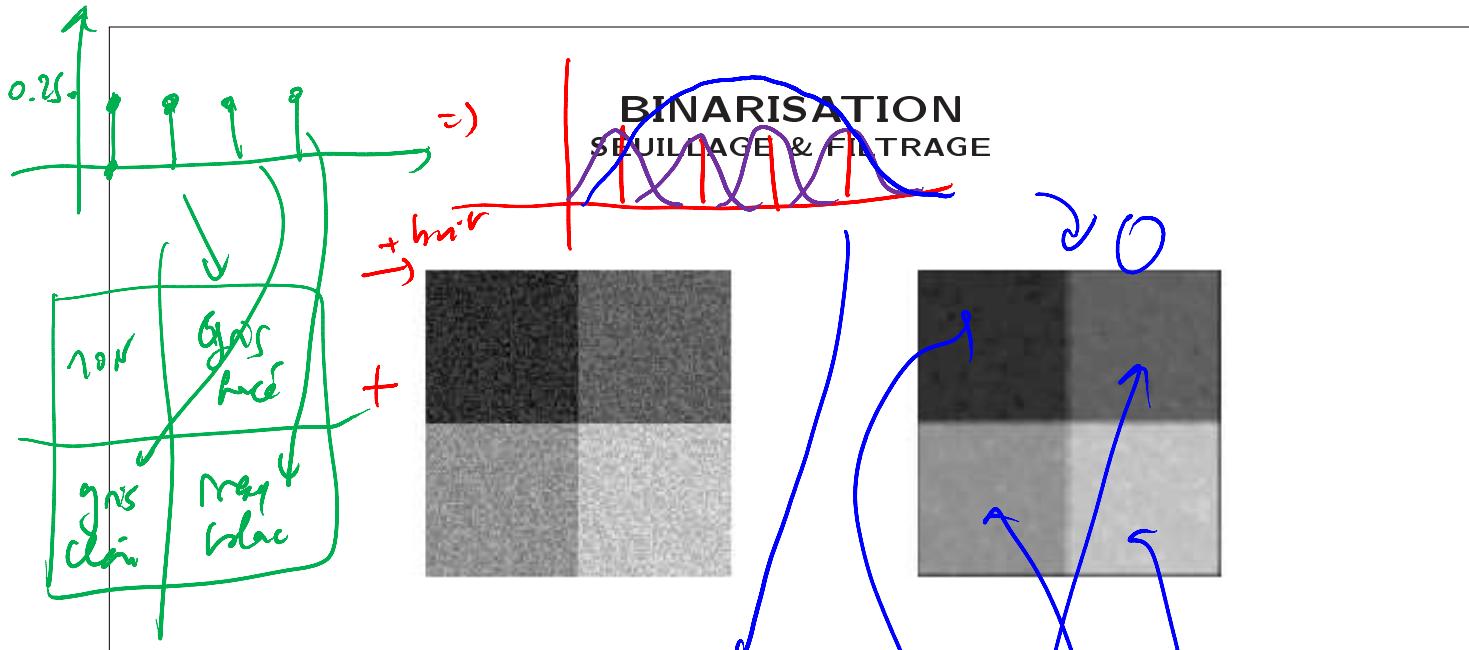
$T = 128$

## BINARISATION SEUILAGE LOCALE (2)



8





stabiliser

Le bruit complique la sélection d'un seuil

Filtrage passe-bas

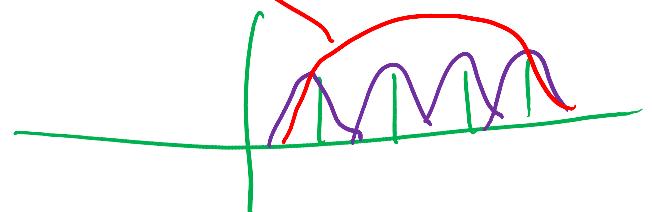
$\nabla_x$

$\nabla_x$

$$\begin{aligned} Z &= X + Y \\ P_Z &= P_X * P_Y \end{aligned}$$

$$\text{Filtre} + \text{Bruit} = \text{Image Bruitée}$$

histogramme \* h-fonction



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## THÉORIE DES ENSEMBLES

- Traitement d'image basé sur la théorie des ensembles



Quelques images binaires

$A, B$  = Ens. des pixels = Ens. des coordonnées

$A \cup B$  =  $\{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$  Union

$A \cap B$  =  $\{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$  Intersection

$A^C$  =  $\{ x \mid x \notin A \}$  Complément

$A - B$  =  $\{ x \mid x \in A, x \notin B \}$  Différence

$(A)_C$  =  $\{ x \mid x = a + c, a \in A \}$  Translation

$\hat{A}$  =  $\{ x \mid -x \in A \}$  Inversion

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

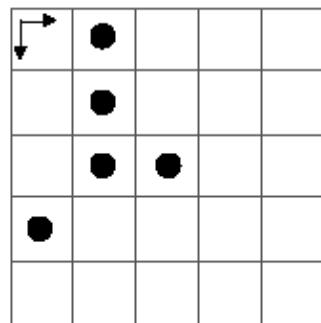
## TRANSLATION

### Translation

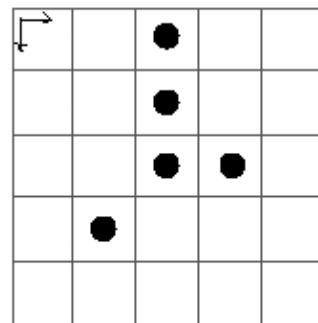
$$A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (0,3)\}$$

$$x = (1,0)$$

$$(A)_x = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (1,3)\}$$



A



(A)<sub>x</sub>

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## DILATATION (1)

### Dilatation

$$A \oplus B = \{ x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$$

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$

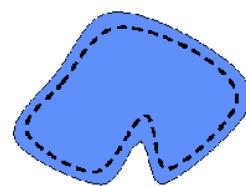
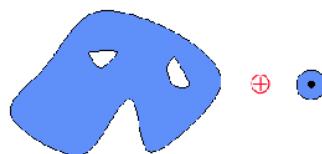
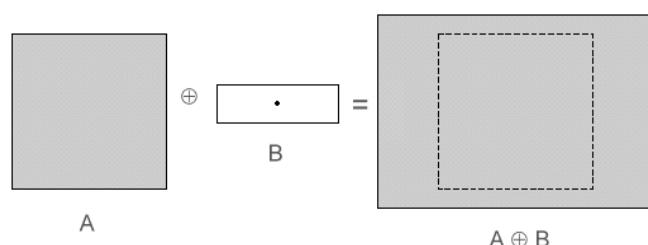
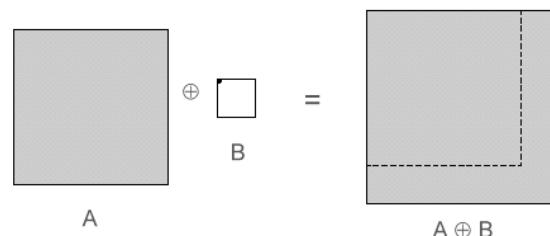
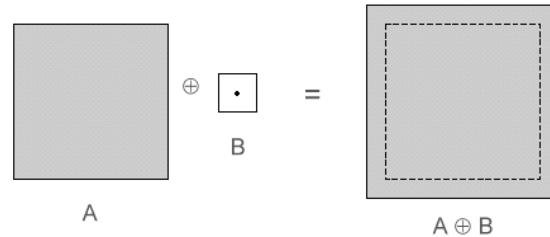
A  $\oplus$  B = A  $\bigcup_{b \in B} (A)_b$  = A  $\oplus$  B

$(A)_{(0,0)} \cup (A)_{(1,0)}$

B : Élément structurant

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### DILATATION (2)



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## DILATATION (3)

### Propriétés de la dilatation

$$A \oplus B = B \oplus A \quad \text{Commutative}$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C \quad \text{Associative}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow C \oplus A \subseteq C \oplus B \quad \text{Monotone}$$

$$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C) \quad \text{Distributive}$$

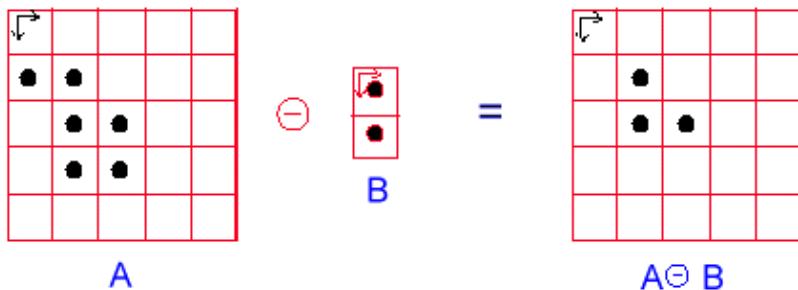
$$(A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$$

### Érosion

$$A \ominus B = \{ x \mid x + b \in A, \forall b \in B \}$$

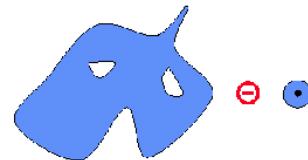
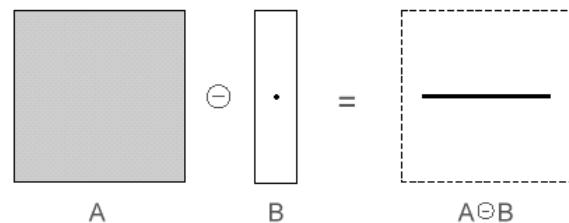
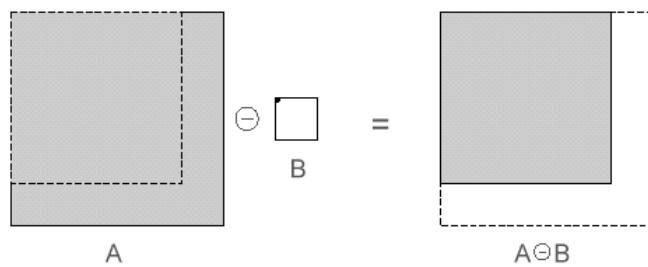
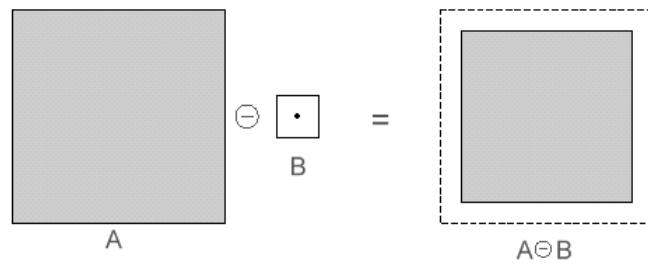
$$A \ominus B = \{ x \mid (B)_x \subseteq A \}$$

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$



## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### ÉROSION (2)



## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### ÉROSION (3)

#### Propriétés de l'érosion

$$A \subseteq B \Rightarrow A \ominus C \subseteq B \ominus C \quad \text{Monotone}$$

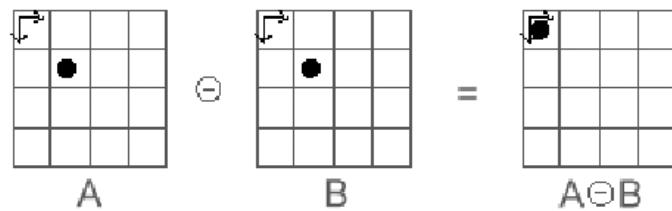
$$A \supseteq B \Rightarrow C \ominus A \subseteq C \ominus B$$

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \overline{B} \quad \text{Erosion vs Dilation}$$

Note:

$$(A \ominus B) \subseteq A \quad ?$$

Non! Exemple:


$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \text{A} & \ominus & \text{B} & = & A \ominus B \\ \hline \text{.} & & \text{.} & & \text{.} \\ \text{.} & & \text{.} & & \text{.} \\ \text{.} & & \text{.} & & \text{.} \\ \text{.} & & \text{.} & & \text{.} \end{array}$$

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### DÉTECTION DE CONTOURS



Original



Eroded



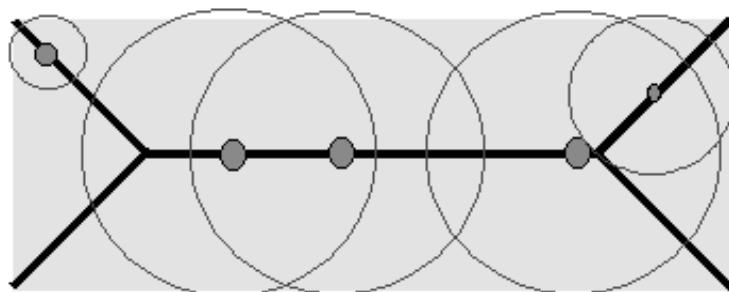
Edges = Original - Eroded

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## ESTIMATION DE SQUELETTE

### Squelette d'un objet

- Estimation de l'axe intermédiaire d'un objet  
(Méthode des feux de prairies ou des disques circulaires)



Original

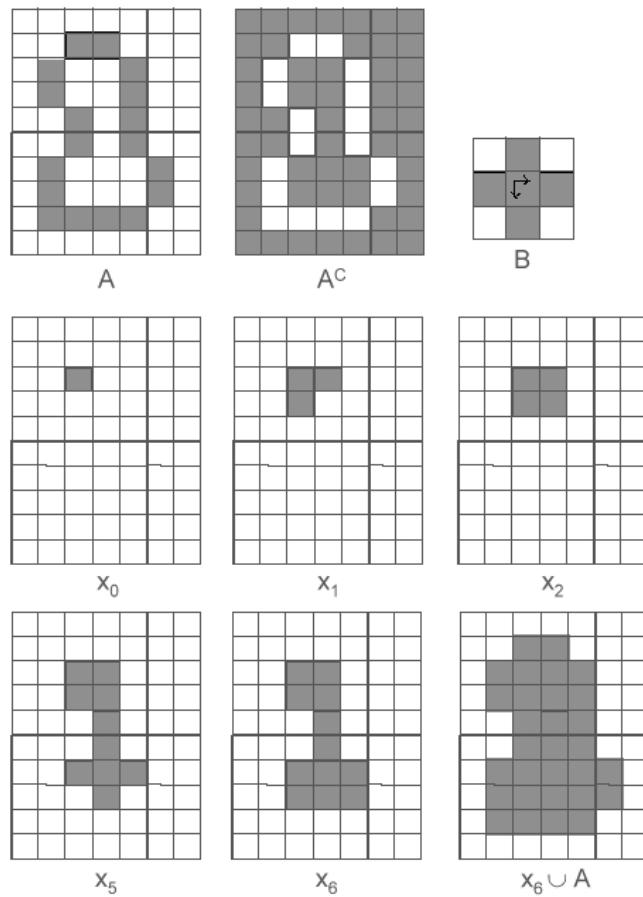
Erosion

Multiple Erosion =  
Skeleton

Si on conserve les derniers résultats juste avant  
la disparition du point ou du segment

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## REMPLISSAGE

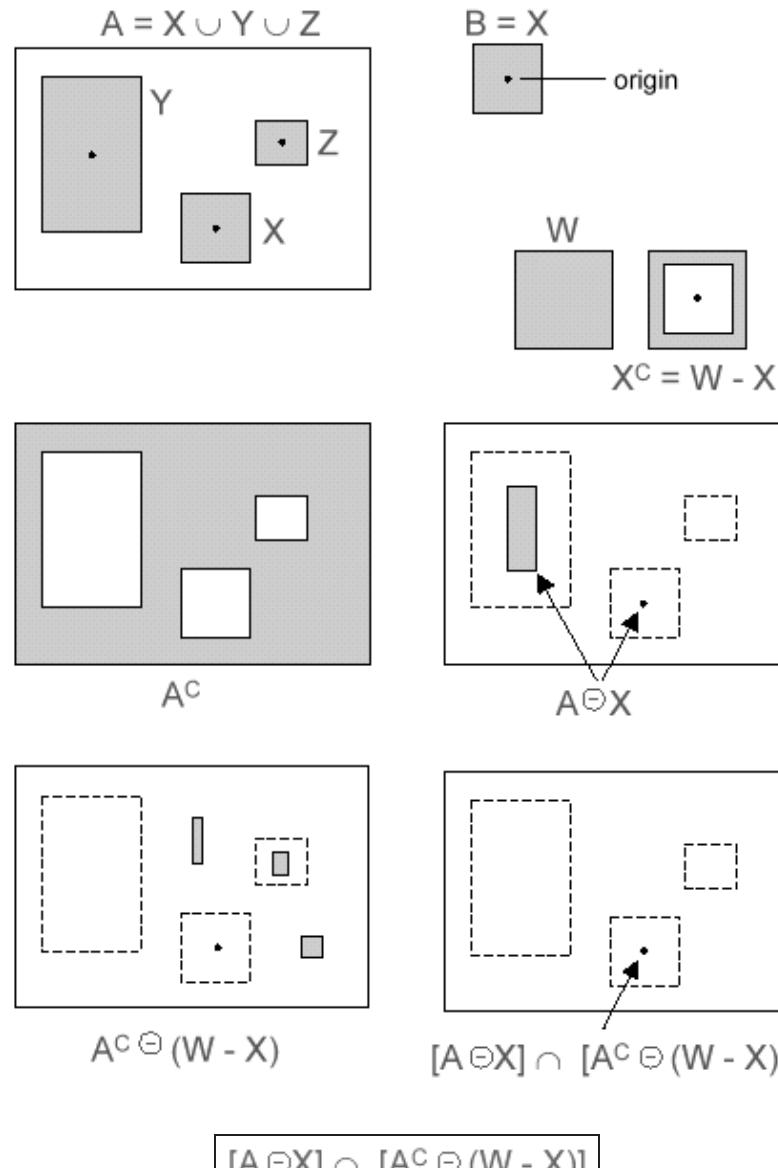


$$x_k = (x_{k-1} \oplus B) \cap A^c$$

- Répéter jusqu'à  $x_k = x_{k-1}$
- Contour rempli :  $x_k \cup A$
- Germe  $x_0$  : point à l'intérieur

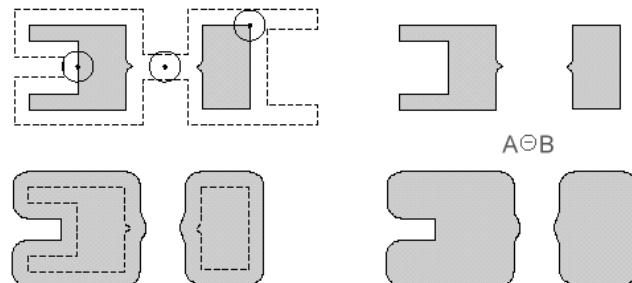
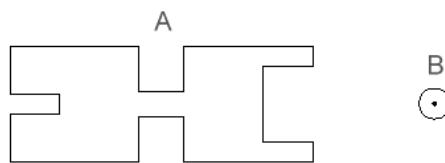
# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## DÉTECTION (HIT OR MISS)



$W$  : fenêtre englobant l'objet  $X$  à détecter

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE OUVERTURE

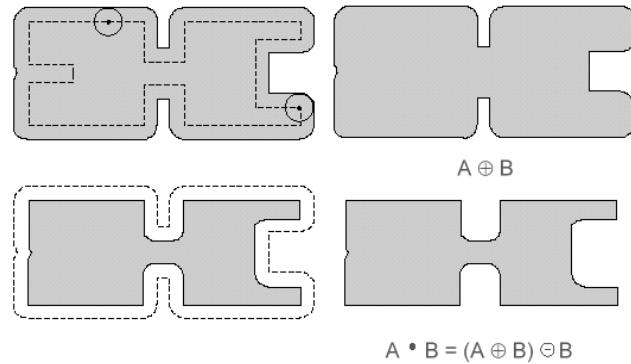
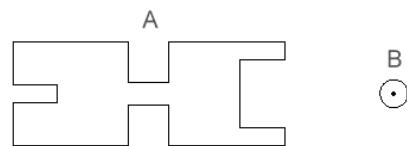


$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

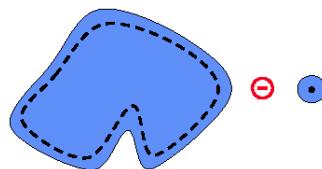


# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## FERMETURE



$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### PROPRIÉTÉS DE L'OUVERTURE ET FERMETURE

$$(A * B)^c = (A^c \circ \overline{B})$$

$$A \circ B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \circ C \subseteq B \circ C$$

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

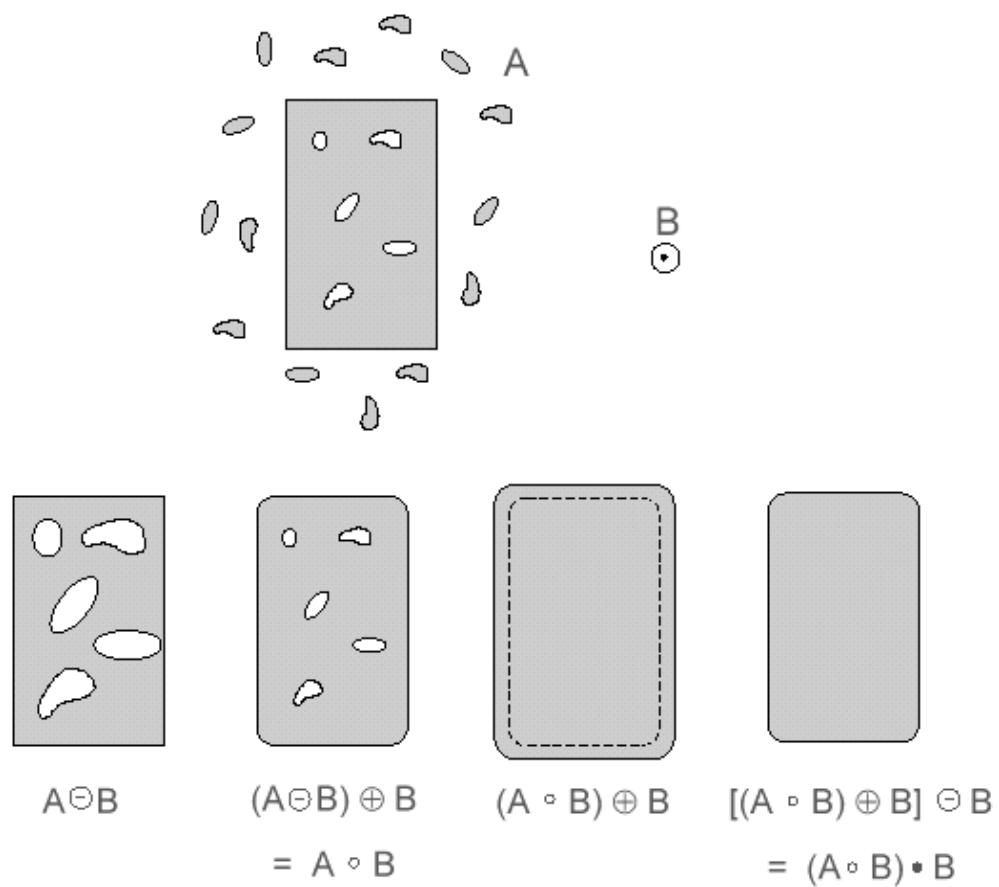
$$A * B \supseteq A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A * C \subseteq B * C$$

$$(A * B) * B = A * B$$

## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

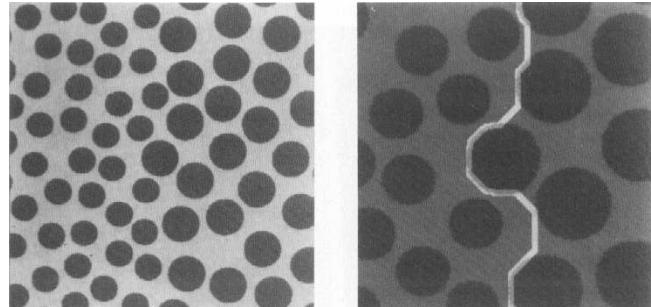
### FILTRAGE MORPHOLOGIQUE (BRUIT)



# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

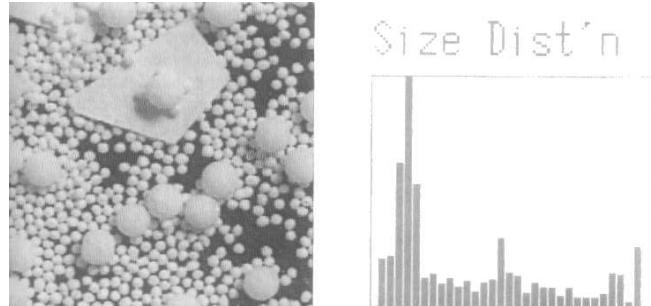
## AUTRES APPLICATIONS

### Segmentation



- Ouverture avec un élément structurant qui fait disparaître les petits disques noirs
- Fermeture qui fusionne les gros disques
- Détection du contour

### Granulométrie



- Ouverture avec des éléments structurant de taille croissante pour faire disparaître les granules blancs successivement en fonction de leur taille
- Moyenne de la différence avec l'image précédente pour obtenir le nombre d'occurrence

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## MORPHOLOGIE EN NIVEAUX DE GRIS

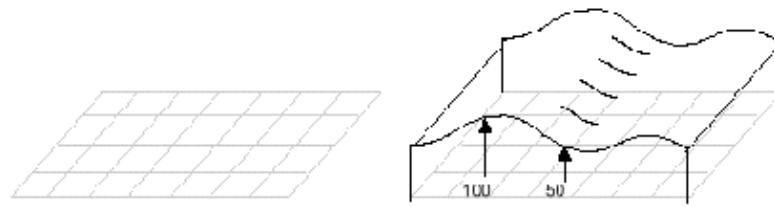
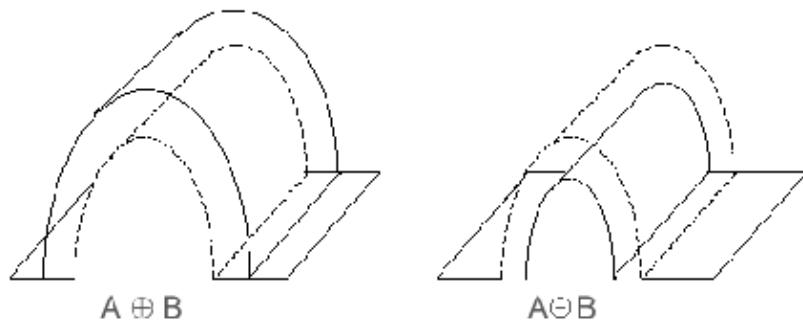
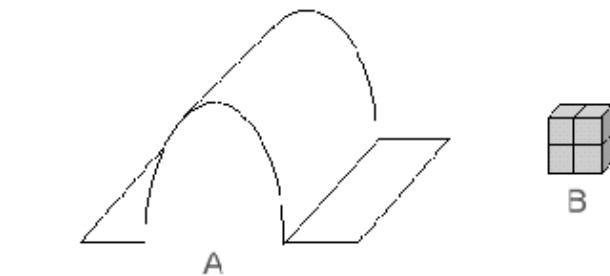


Image  
NdeG



## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### EXEMPLES (1)



Original



Dilation



Erosion



Opening

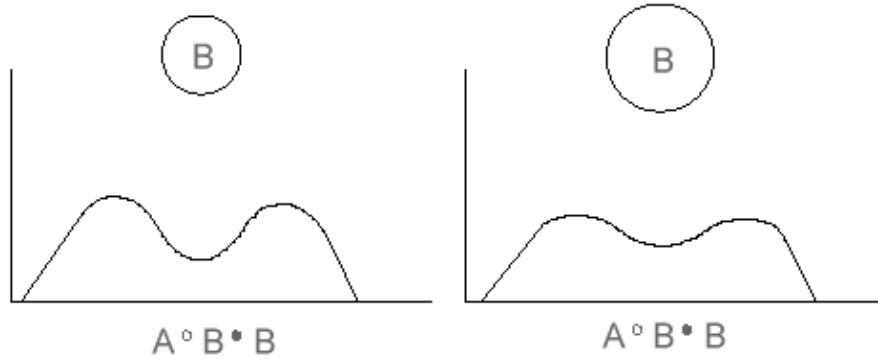
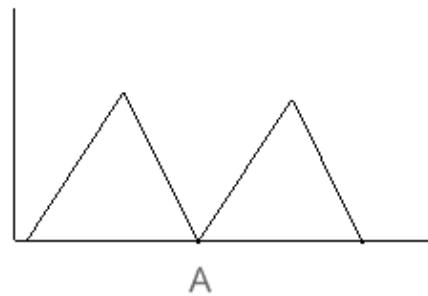
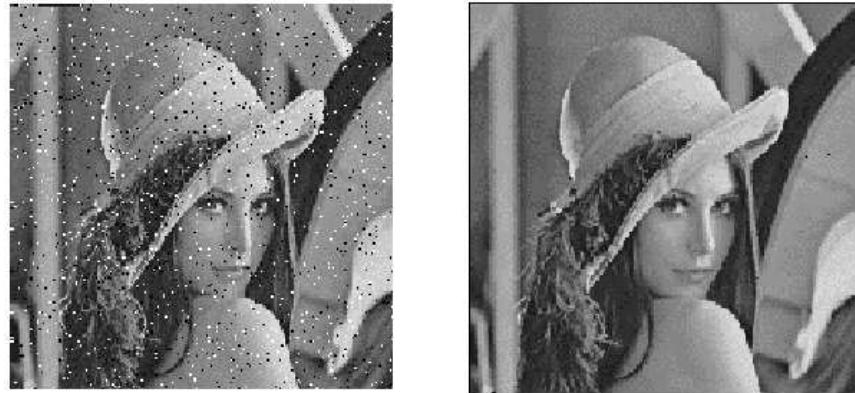


Closing

# MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

## EXEMPLES (2- FILTRAGE PASSE-BAS)

Bruit Poivre & Sel



## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### EXEMPLES (3)

Restauration de documents imprimés

ponent is :  
ilar in thei  
ction 2 thi  
s system fo

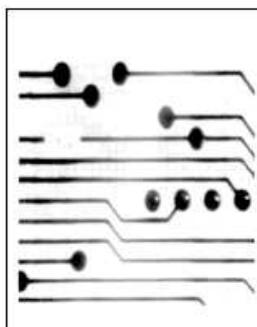
Noisy text image.

ponent is :  
ilar in thei  
ction 2 thi  
s system fo

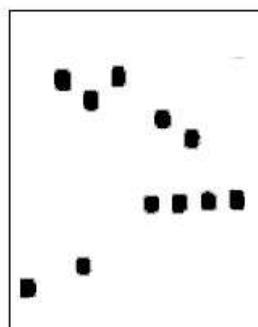
Restored text image.

$$A \circ B \bullet B$$

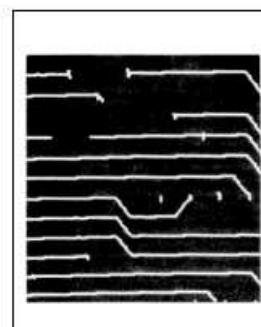
Segmentation de Circuit imprimés



Circuit Imprimé



$A \circ B$

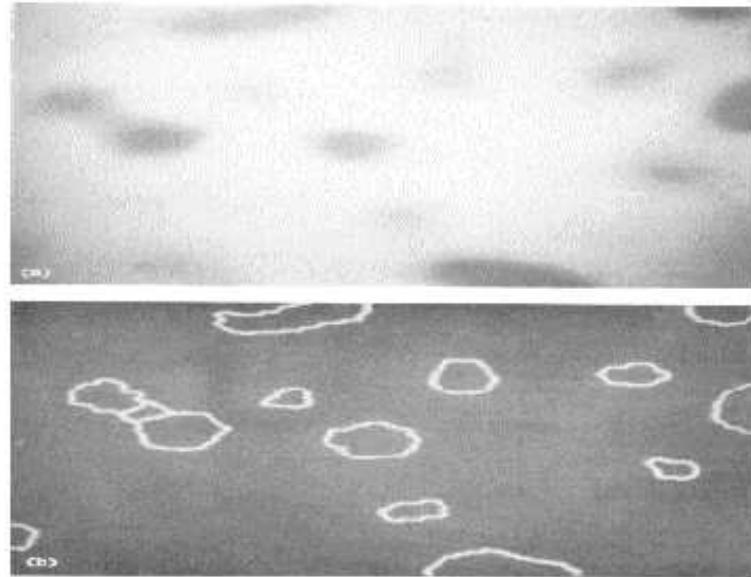


Squelette

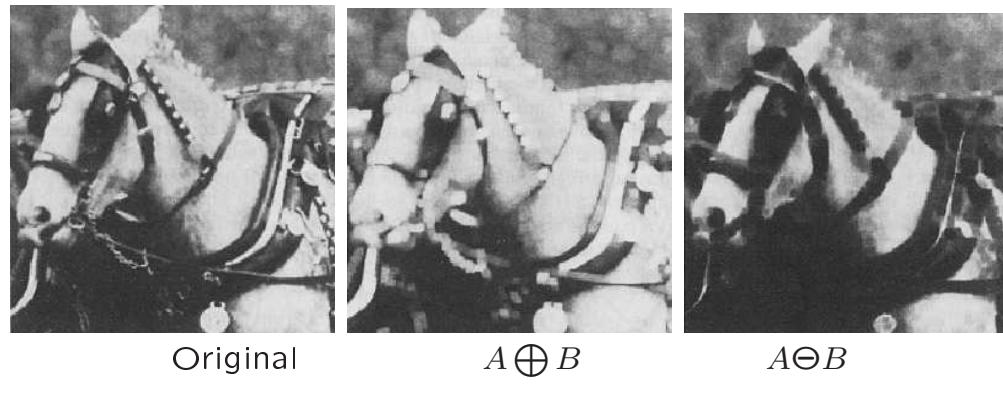
## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

### EXEMPLES (4)

#### Segmentation



$$A \oplus B - A \ominus B$$



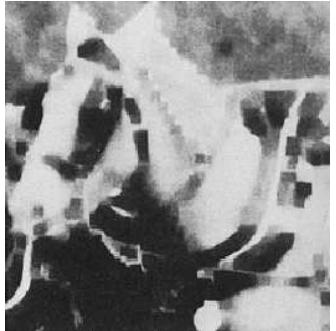
## MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE EXEMPLES (5)



Original



$A \circ B$



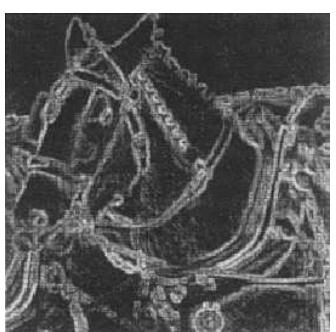
$A \bullet B$



Original



$A \circ B \bullet B$



$A \oplus B - A \ominus B$