



DIRO
IFT 6150

TRAITEMENT D'IMAGES BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

Max Mignotte

Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

Http : [//www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150)

E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

BINARISATION ET MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

SOMMAIRE

Seuillage

Seuillage par Inspection	2
Seuillage Optimale	4
Seuillage Locale	7
Seuillage & Filtrage	9

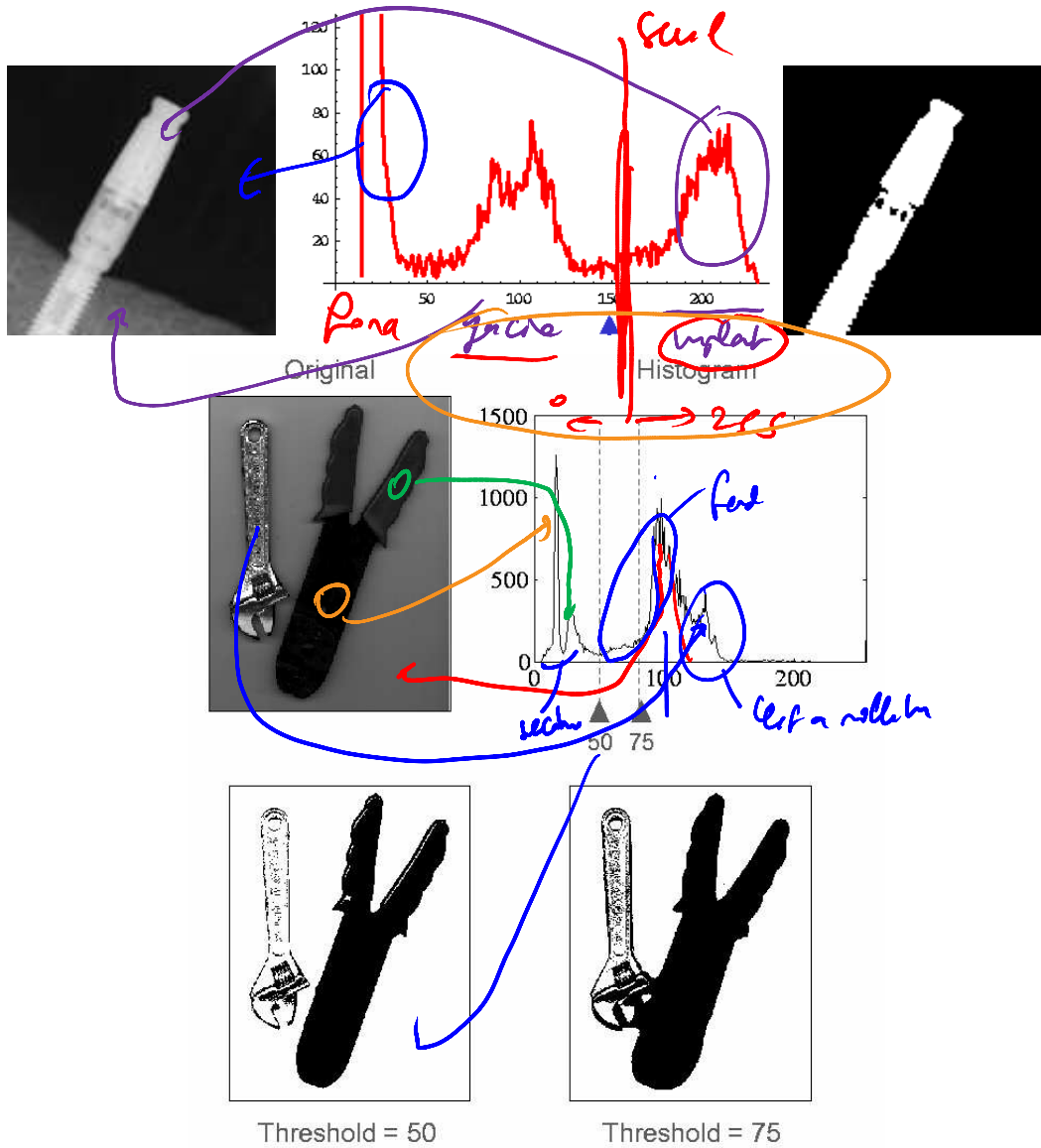
Morphologie Mathématique

Théorie des Ensembles	10
Translation	11
Dilatation	12
Érosion	15
Détection des Contours	17
Estimation de Squelette	18
Remplissage	19
Détection	20
Ouverture	21
Fermeture	22
Propriétés de l'Ouverture/Fermeture	23
Filtrage Morphologique	24
Autres Applications	25
Morphologie en Niveaux de Gris	26
Exemples	27

BINARISATION

SEUILLAGE PAR INSPECTION (1)

Seuillage par inspection de l'histogramme



BINARISATION

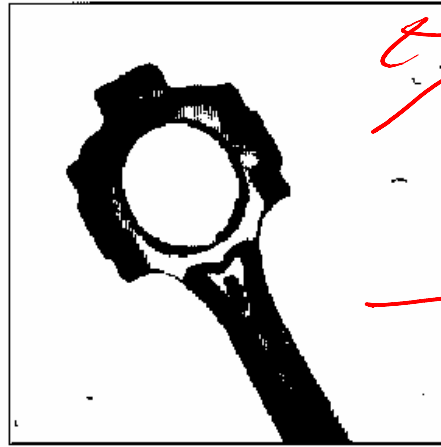
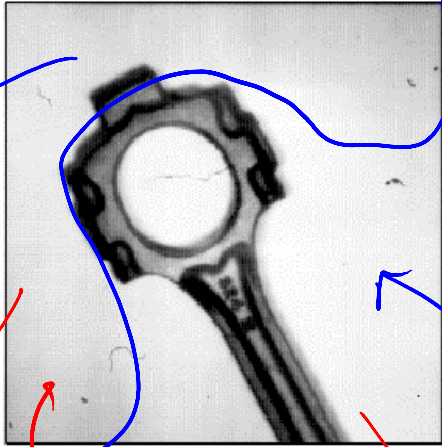
SEUILLAGE PAR INSPECTION (2)

Seuillage par inspection de l'histogramme



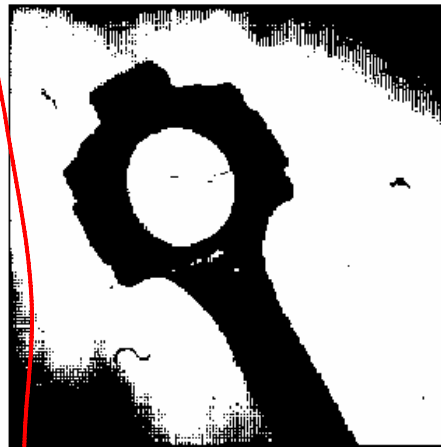
Original Image

Binary Image



Threshold too low

Threshold too high



de bar
d'illumina

Restaurer

R. l'age hors couple

de bar
d'illumina
com

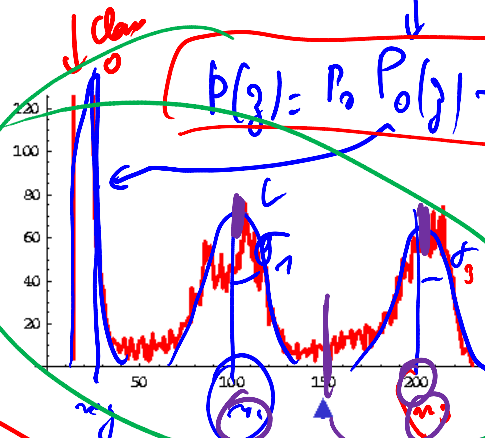
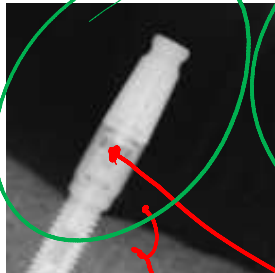
3

objet

fine

BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (1)

Seuillage optimal



$$p(z) = P_0 P_0(z) + P_1 P_1(z) + P_2 P_2(z)$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1$$

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

Soit deux régions (arrière-plan et objet)
présent dans une image

La probabilité $P(z)$ d'avoir une valeur de niveau de gris z ($z \in [0, 255]$ par ex.) dans l'image est donnée par

$$p(z) = P_1 p_1(z) + P_2 p_2(z)$$

P_i : prop. de pixels appartenant à la région i ($P_1 + P_2 = 1$)

$p(z)$: Histogramme de l'image

$p_i(z)$: proba. d'un pixel \in région i d'avoir un $ng = z$

Si nous supposons que $p_1(z)$ et $p_2(z)$ sont distribués selon une loi normale, nous obtenons

$$p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

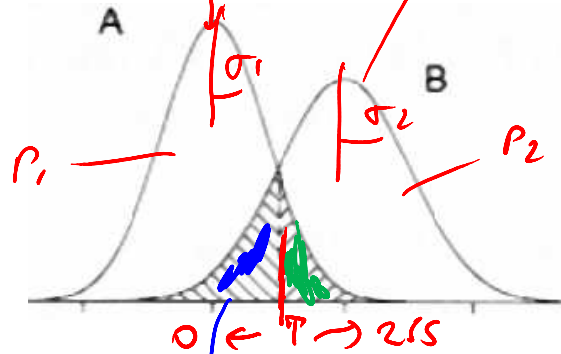
BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (2)

$p(z)$ devient alors $P_1 p_1(z)$

$$p(z) = P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(z-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + P_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(z-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$P_1 > P_2$$

$$\sigma_2 > \sigma_1$$



Soit E_1 , la probabilité de classer un pixel dans la classe 1 lorsqu'il appartient à la classe 2 et E_2 , la proba. de classer un pixel dans la classe 2 lorsque celui-ci appartient à la classe 1.

Les probabilités d'erreur sont données par

$$E_1(T) = \int_{-\infty}^T p_2(z) dz \quad \text{et} \quad E_2(T) = \int_T^{\infty} p_1(z) dz$$

La probabilité d'erreur totale est alors donnée par

$$E(T) = P_2 E_1(T) + P_1 E_2(T)$$

Cherchons une valeur de T qui minimise $E(T)$

$$E'(T) = -P_1 p_1(T) + P_2 p_2(T) = 0$$

$$P_1 p_1(T) = P_2 p_2(T)$$

5

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_1 p_1(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} P_2 p_2(z) dz = 1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_1 p_1(z) dz = 1$$

nb de pixels
non
dans

0,2 de
pi
appartenant
à classe
de classe
qui ont
été non
dans

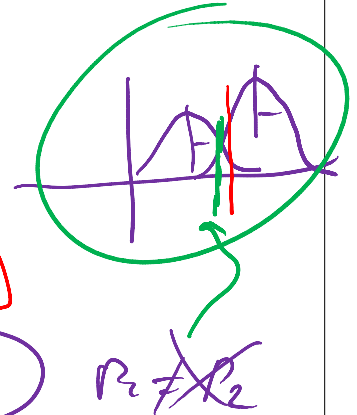
BINARISATION SEUILLAGE OPTIMAL (3)

Après simplification, nous obtenons une expression de la forme

$$AT^2 + BT + C = 0$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \\ B &= 2(\mu_1 \sigma_2^2 - \mu_2 \sigma_1^2) \\ C &= \mu_2^2 \sigma_1^2 - \mu_1^2 \sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_2 P_1}{\sigma_1 P_2}\right) \end{aligned}$$



- Lorsque les variances sont égales

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

$$P_1 \neq P_2$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma^2 \\ T &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \end{aligned}$$

- Lorsque les variances et les proportions sont égales

$$P_1 = P_2$$

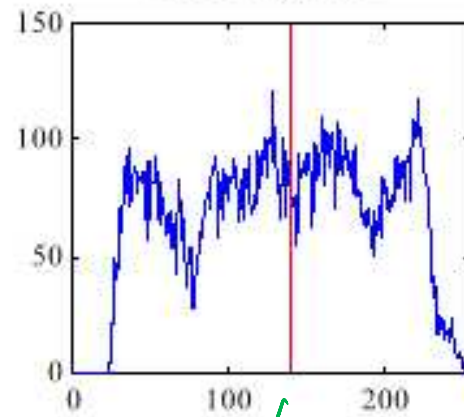
$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ T &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \end{aligned}$$

BINARISATION SEUILLAGE LOCALE (1)

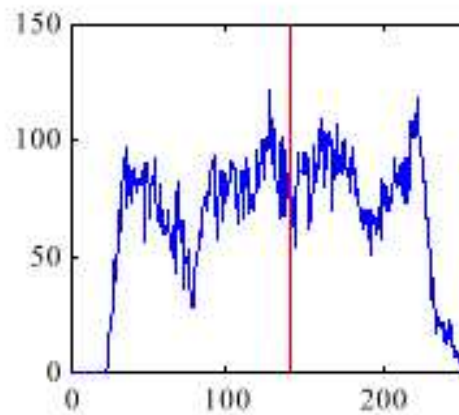
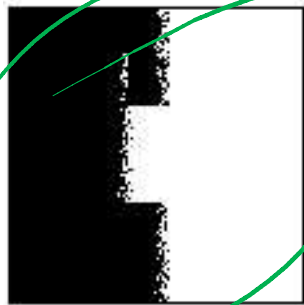
Original



Histogram



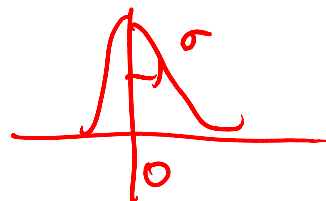
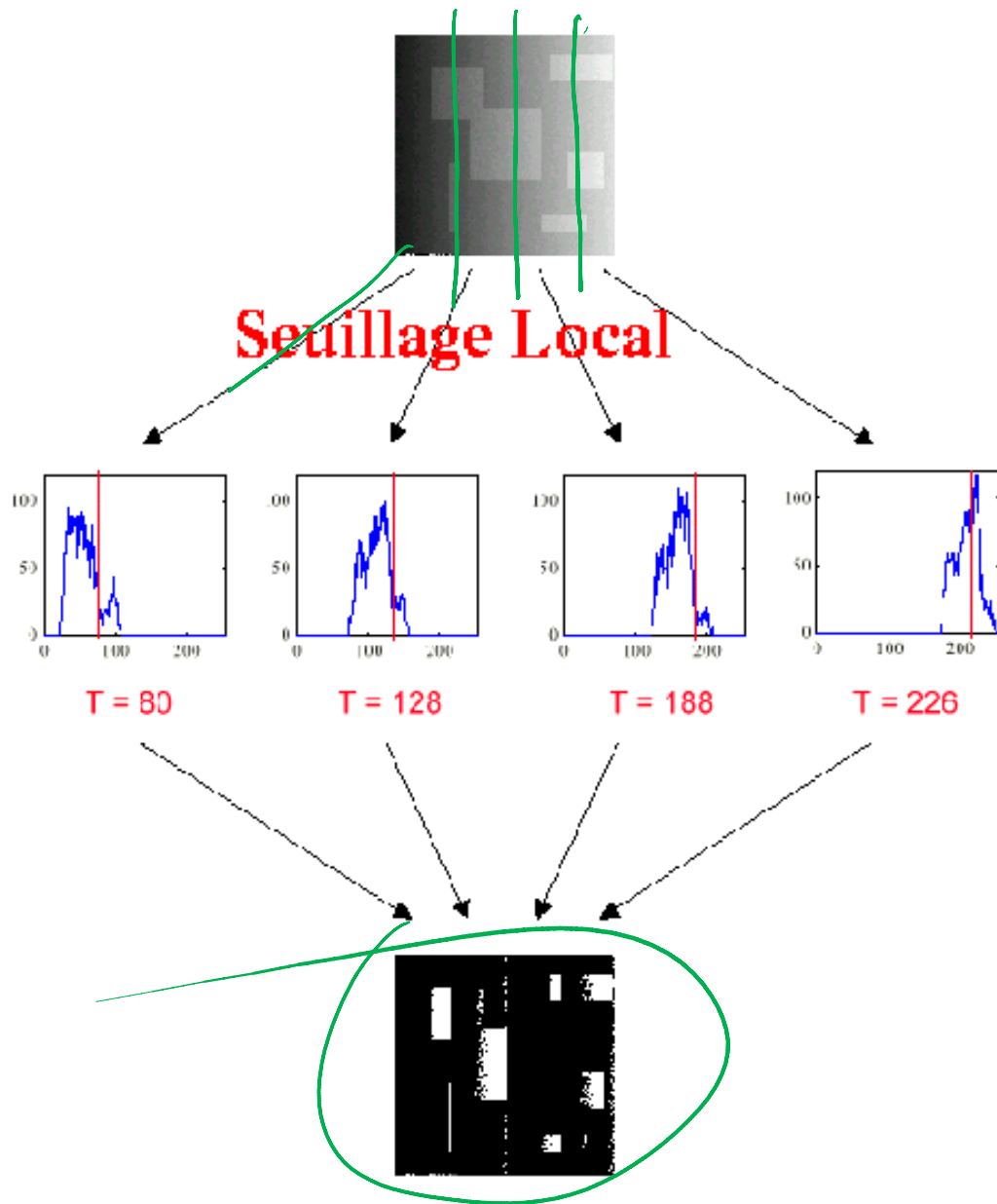
Single Global Threshold

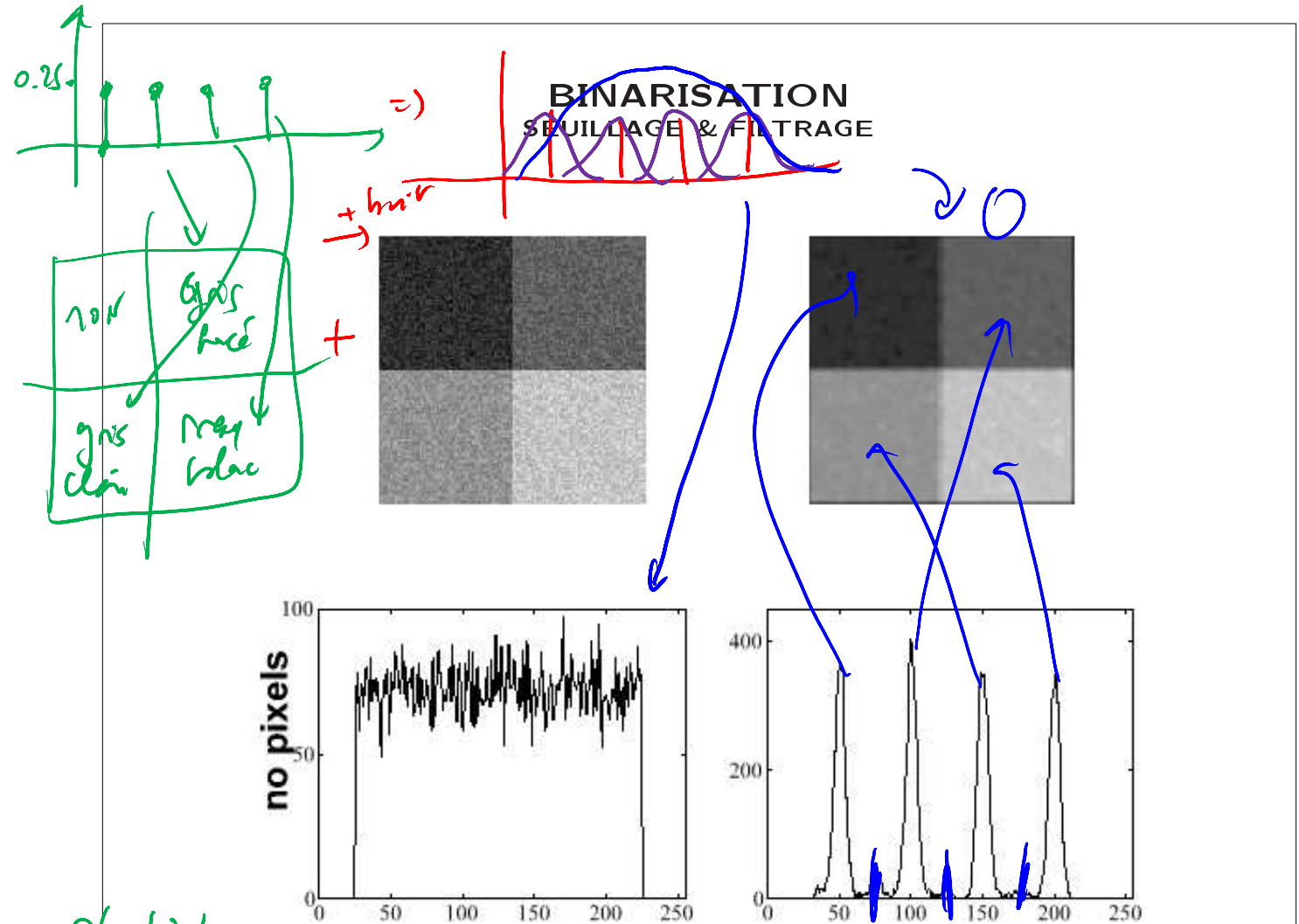


T = 128

BINARISATION

SEUILLAGE LOCALE (2)





stabilité

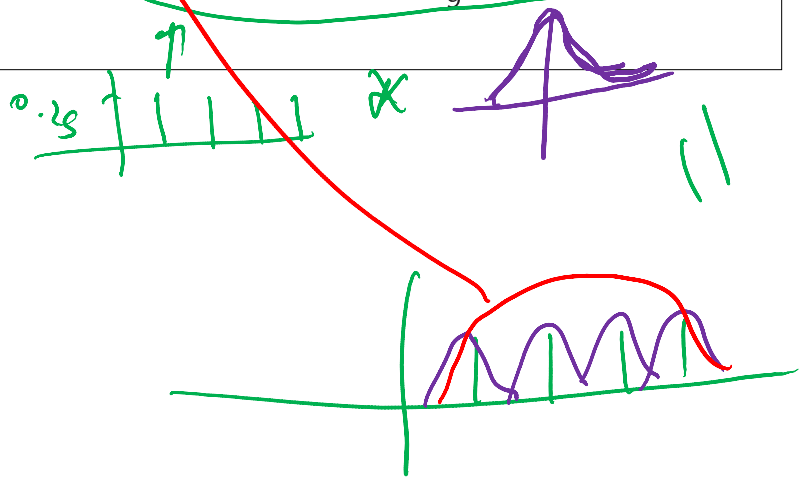
Le bruit complique la sélection d'un seuil
Filtrage passe-bas

$$Z = X + Y$$

$$P_Z = P_X * P_Y$$

$$I_{img} + \text{Bruit} = I_{img} + \text{Bruit}$$

$$P_{histo\ img} * h_{sigma}$$



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

THÉORIE DES ENSEMBLES

► Traitement d'image basé sur la théorie des ensembles



Quelques images binaires

$A, B =$ Ens. des pixels = Ens. des coordonnées

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$ Union

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ et } x \in B \}$ Intersection

$A^C = \{ x \mid x \notin A \}$ Complément

$A - B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$ Différence

$(A)_C = \{ x \mid x = a + c, a \in A \}$ Translation

$\hat{A} = \{ x \mid -x \in A \}$ Inversion

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

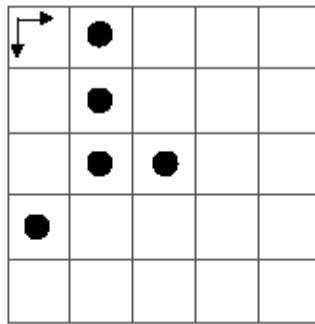
TRANSLATION

Translation

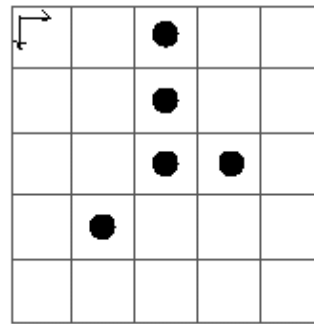
$$A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,2), (0,3)\}$$

$$x = (1,0)$$

$$(A)_x = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,2), (1,3)\}$$



A



$(A)_x$

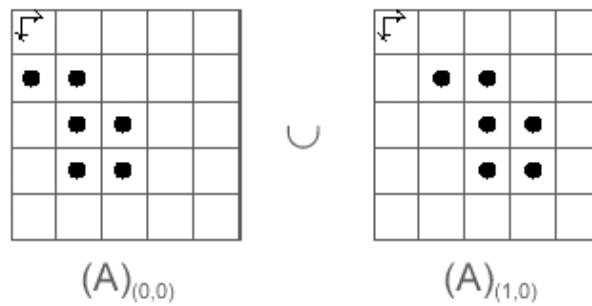
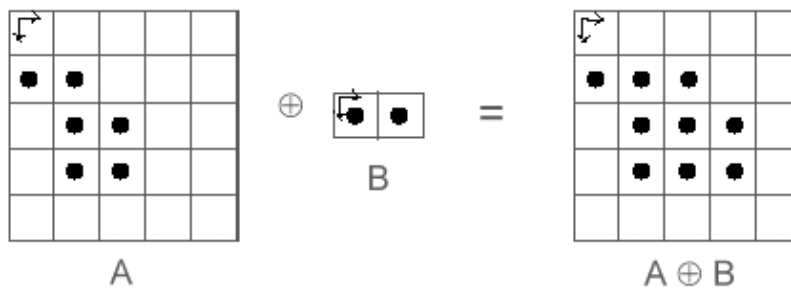
MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DILATATION (1)

Dilatation

$$A \oplus B = \{x \mid x=a+b, a \in A, b \in B\}$$

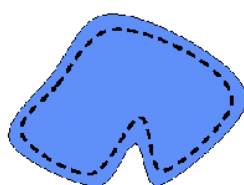
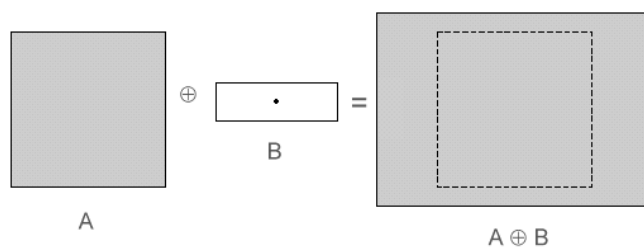
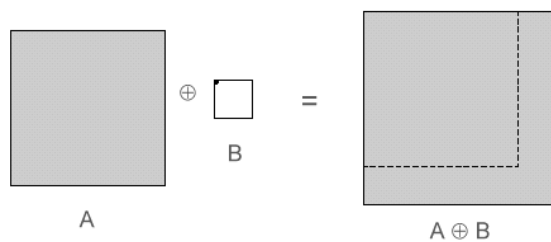
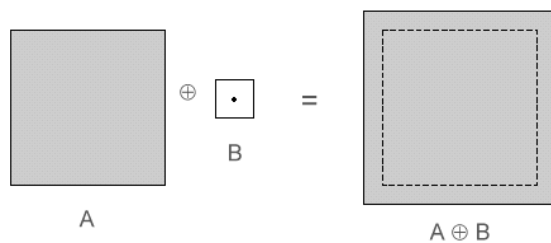
$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} (A)_b$$



B : Élément structurant

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DILATATION (2)



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DILATATION (3)

Propriétés de la dilatation

$$A \oplus B = B \oplus A$$

Commutative

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

Associative

$$A \subseteq B \Rightarrow C \oplus A \subseteq C \oplus B$$

Monotone

$$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$

Distributive

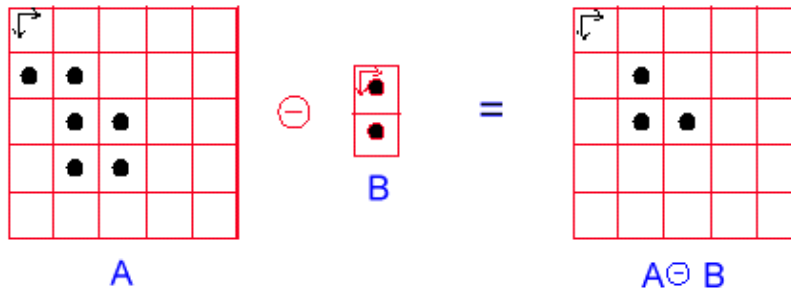
$$(A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$$

Érosion

$$A \ominus B = \{x \mid x+b \in A, \forall b \in B\}$$

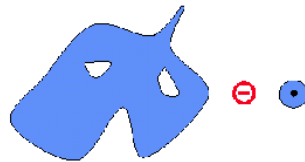
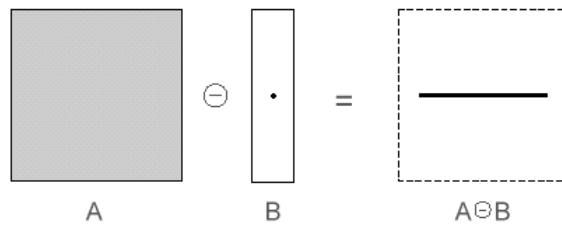
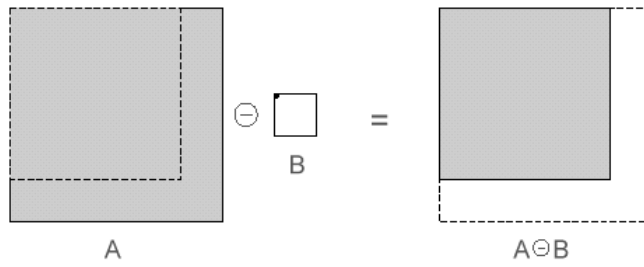
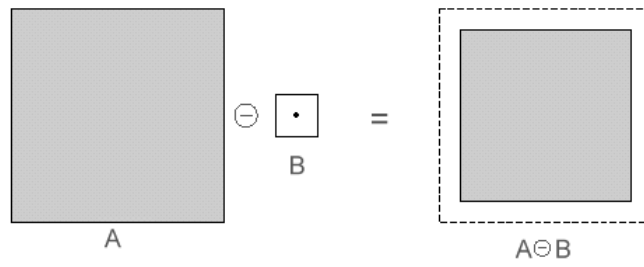
$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_{-b}$$



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

ÉROSION (2)



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

ÉROSION (3)

Propriétés de l'érosion

$$A \subseteq B \Rightarrow A \ominus C \subseteq B \ominus C \quad \text{Monotone}$$

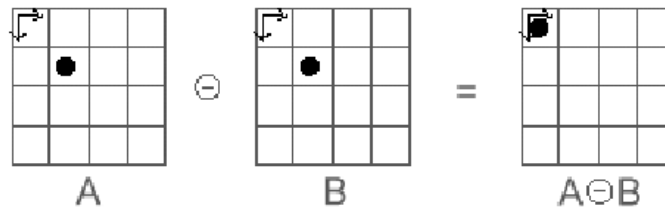
$$A \supseteq B \Rightarrow C \ominus A \subseteq C \ominus B$$

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B} \quad \text{Erosion vs Dilation}$$

Note:

$$(A \ominus B) \subseteq A \quad ?$$

Non! Exemple:



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

DÉTECTION DE CONTOURS



Original



Eroded



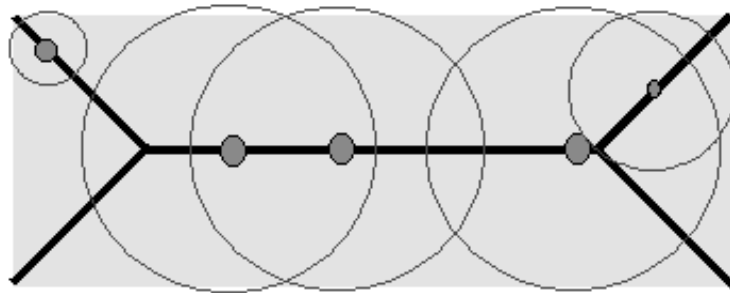
Edges = Original - Eroded

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

ESTIMATION DE SQUELETTE

Squelette d'un objet

- Estimation de l'axe intermédiaire d'un objet
(Méthode des feux de prairies ou des disques circulaires)



Original



Erosion

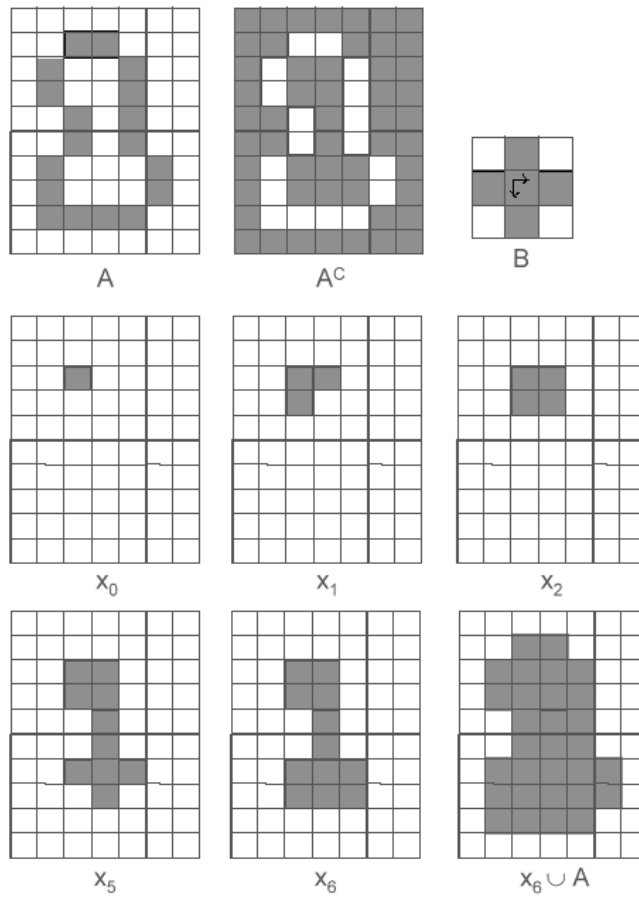


Multiple Erosion =
Skeleton

Si on conserve les derniers résultats juste avant
la disparition du point ou du segment

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

REPLISSAGE

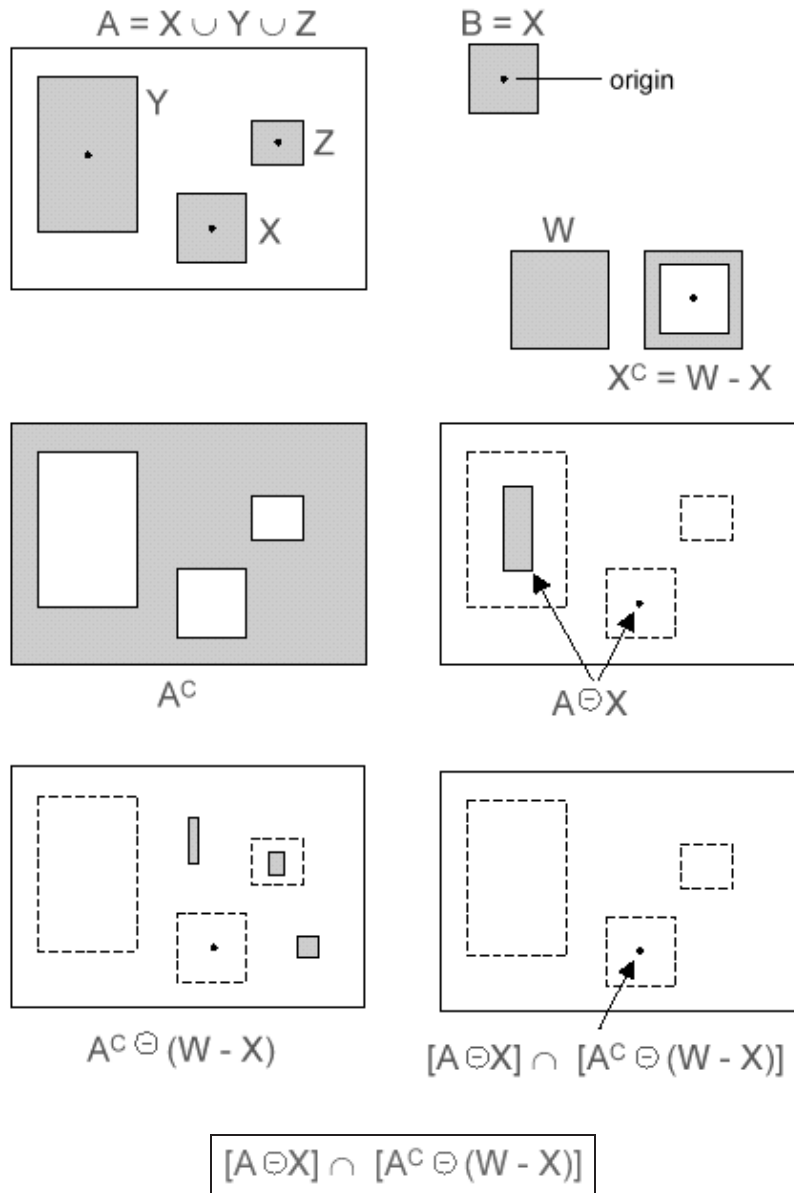


$$x_k = (x_{k-1} \oplus B) \cap A^c$$

- Répéter jusqu'à $x_k = x_{k-1}$
- Contour rempli : $x_k \cup A$
- Germe x_0 : point à l'intérieur

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

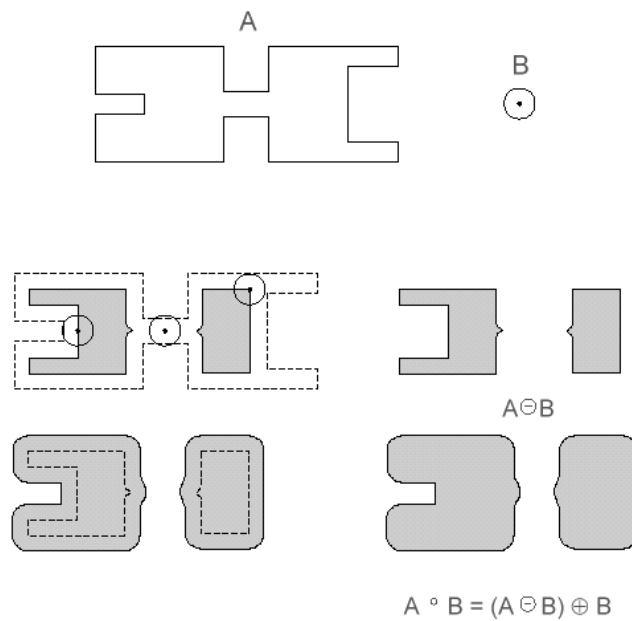
DÉTECTION (HIT OR MISS)



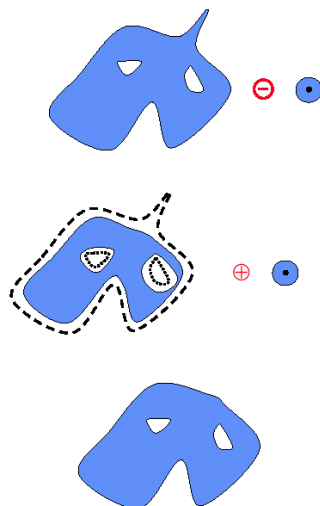
W : fenêtre englobant l'objet X à détecter

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

OUVERTURE

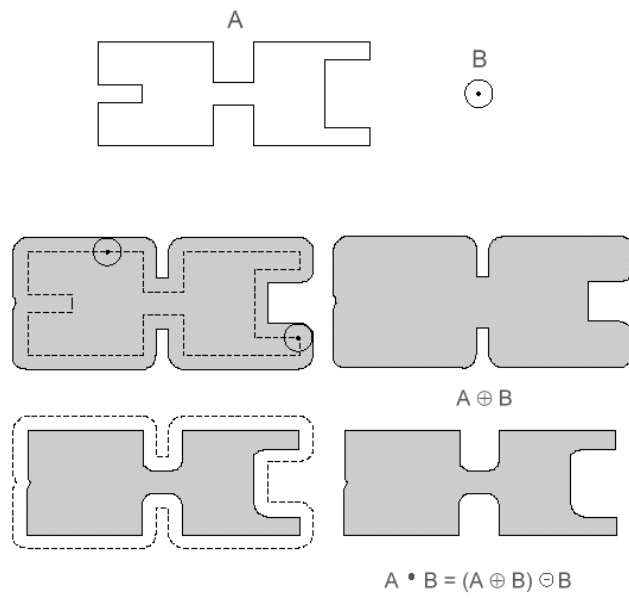


$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

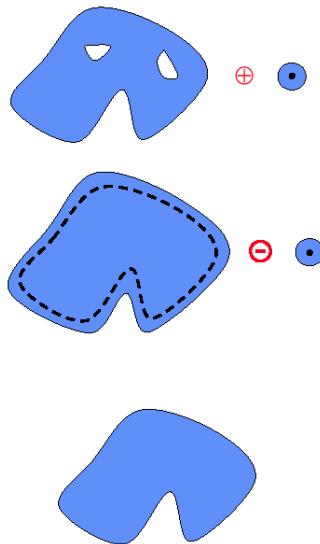


MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

FERMETURE



$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

PROPRIÉTÉS DE L'OUVERTURE ET FERMETURE

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$$

$$A \circ B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \circ C \subseteq B \circ C$$

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

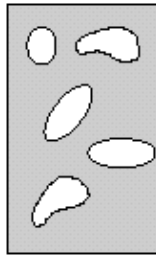
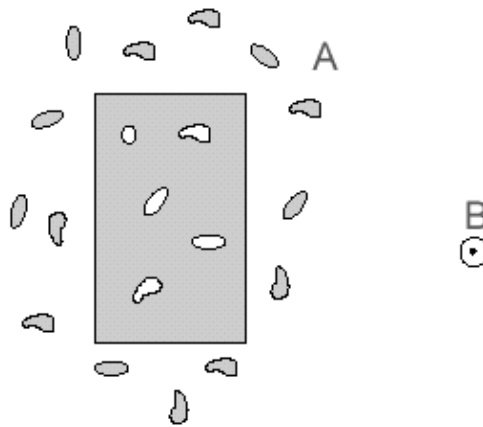
$$A \bullet B \supseteq A$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \bullet C \subseteq B \bullet C$$

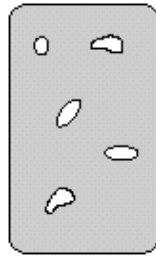
$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

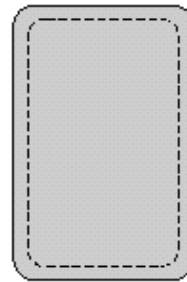
FILTRAGE MORPHOLOGIQUE (BRUIT)



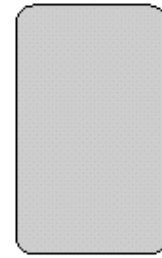
$$A \ominus B$$



$$(A \ominus B) \oplus B \\ = A \circ B$$



$$(A \circ B) \oplus B$$

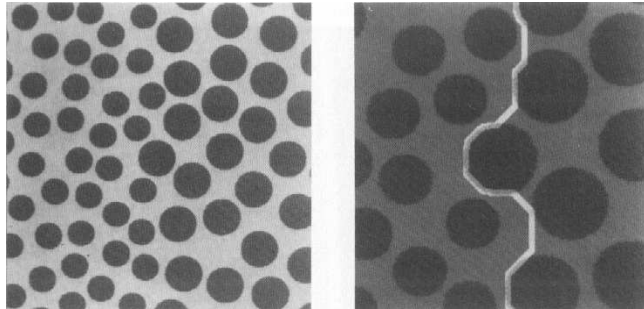


$$[(A \circ B) \oplus B] \ominus B \\ = (A \circ B) \bullet B$$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

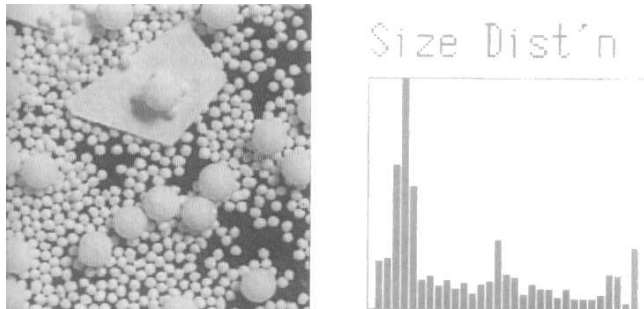
AUTRES APPLICATIONS

Segmentation



- Ouverture avec un élément structurant qui fait disparaître les petits disques noirs
- Fermeture qui fusionne les gros disques
- Détection du contour

Granulométrie



- Ouverture avec des éléments structurant de taille croissante pour faire disparaître les granules blancs successivement en fonction de leur taille
- Moyenne de la différence avec l'image précédente pour obtenir le nombre d'occurrence

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

MORPHOLOGIE EN NIVEAUX DE GRIS

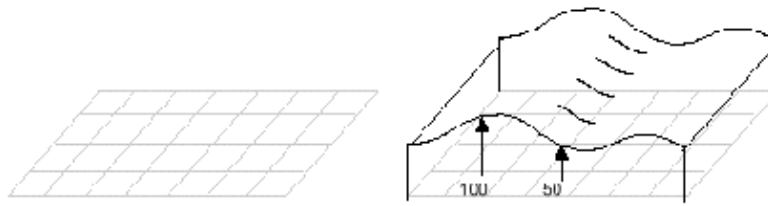
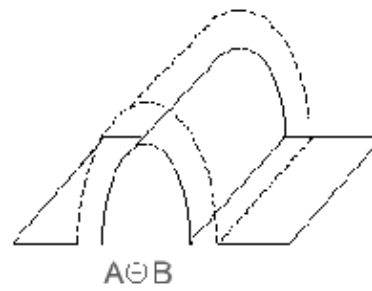
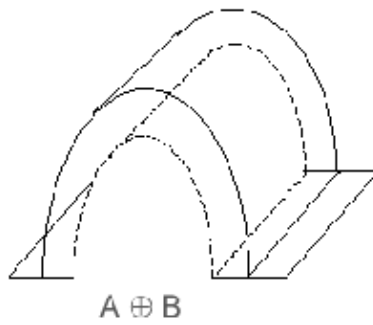
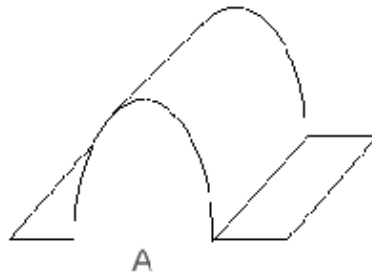


Image
NdeG



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

EXEMPLES (1)



Original



Dilation



Erosion



Opening

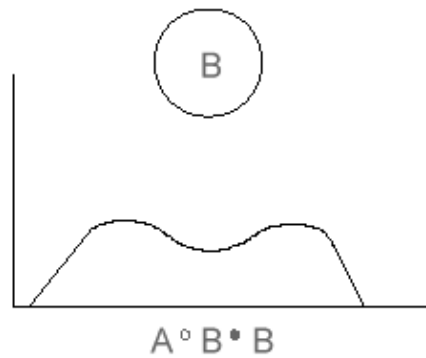
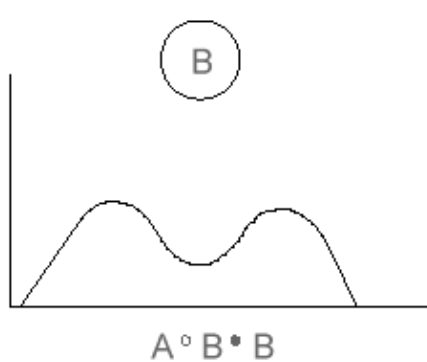
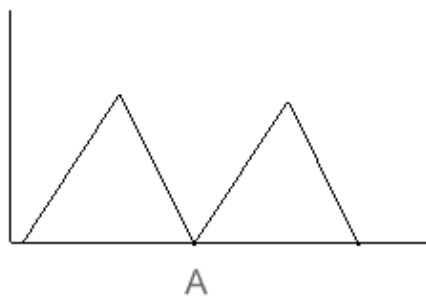


Closing

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

EXEMPLES (2- FILTRAGE PASSE-BAS)

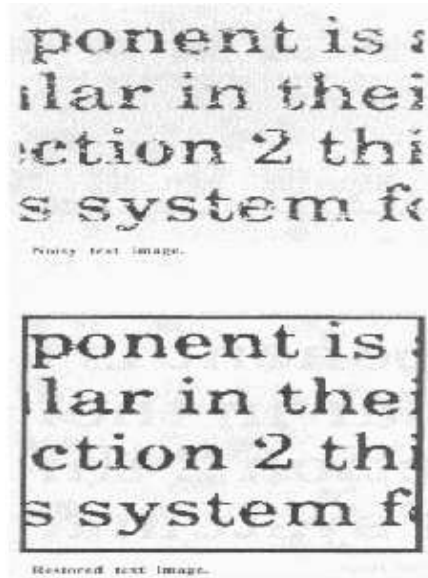
Bruit Poivre & Sel



MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

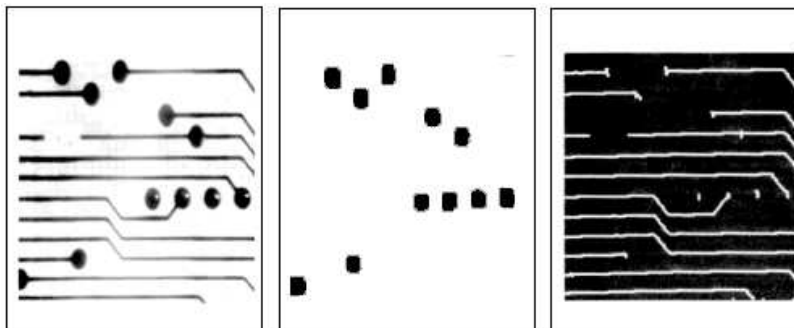
EXEMPLES (3)

Restauration de documents imprimés



$$A \circ B \bullet B$$

Segmentation de Circuit imprimés



Circuit Imprimé

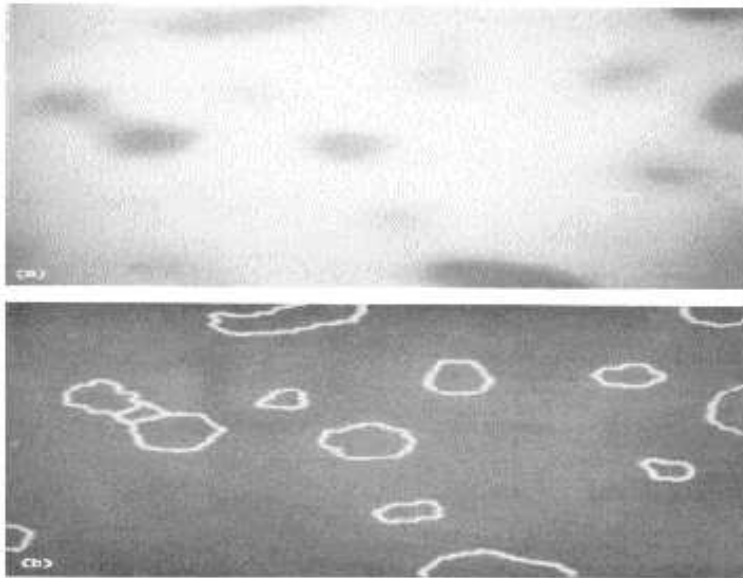
$$A \circ B$$

Squelette

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

EXEMPLES (4)

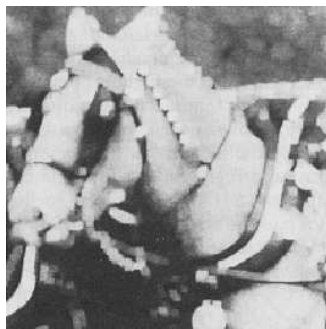
Segmentation



$$A \oplus B - A \ominus B$$



Original



$A \oplus B$



$A \ominus B$

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE

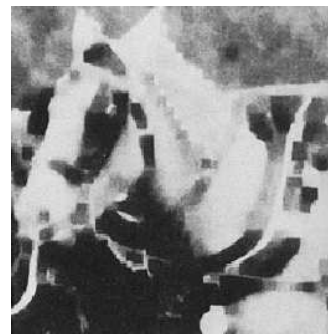
EXEMPLES (5)



Original



$A \circ B$



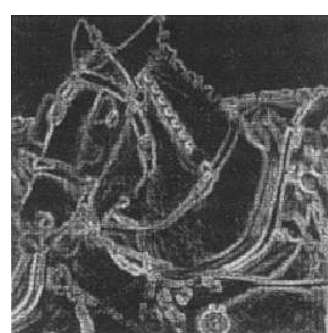
$A \bullet B$



Original



$A \circ B \bullet B$



$A \oplus B - A \ominus B$