DIRO
IFT 6150

TRAVAIL PRATIQUE N° 1

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Max Mignotte & Pierre-Marc Jodoin

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

A. PROPRIÉTÉ DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

(**a**) Lire l'image **D1r.pgm**. Il s'agit d'une image de taille 128×128 pixels de format PGM. Calculer ensuite le spectre d'amplitude de cette image (i.e., le module de la Transformée de Fourier)[1].

(**b**) Remarquer que le spectre d'amplitude calculé par la FFT se retrouve aux quatre coin de l'image. Proposer et implanter une solution pour ramener l'harmonique $(0, 0)$ au centre de l'image (cf. Figure 2).

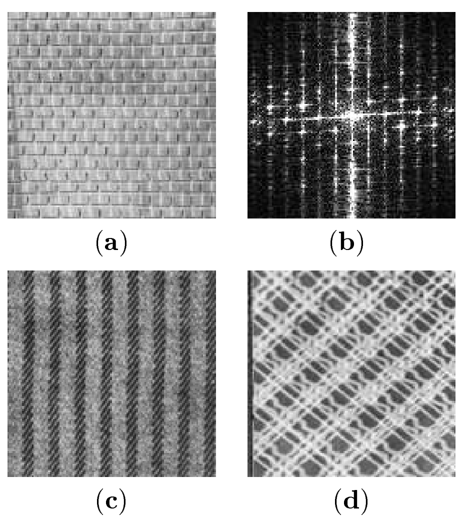


FIG. 1 – *(**a**) Image **D1r.pgm**. (**b**) Module de la TF de cette image après application d'une fonction logarithmique (question A.(c)) (**c**) Image **D11r.pgm**. (**d**) Image **D46r.pgm**.*

(**c**) Appliquer une fonction logarithmique du style $\log(1 + I(x, y))$ sur l'image du module de la TF (ou spectre) pour *renforcer* les composantes "haute-fréquences" (cf. Figure 1).

(**d**) Calculer le spectre d'amplitude des images **D11r.pgm** et **D46r.pgm** et appliquer une fonction logarithmique pour mieux visualiser leurs composantes "haute-fréquences". Maintenant oublier pour chacune

[1] Après avoir calculé le module de cette TF, utiliser la fonction RECAL pour re-calibrer les niveaux de gris de cette image entre 0 et 255 et utiliser ensuite la fonction MULT (avec un facteur de 100 par exemple) pour mieux visualiser cette TF.

des trois images **D1r.pgm**, **D11r.pgm**, **D46r.pgm** quelle est leur spectre respectif et associer à chacune des images leur spectre correspondant en expliquant et en justifiant qualitativement pourquoi vous avez fait ce choix.

(**e**) Générer une image contenant un fond noir et un carré blanc au centre. Décrire les changements au niveau du spectre lorsque le carré change de taille[2].

(**f**) Qu'arrive t-il au spectre lorsqu'il y a une translation du carré ? Dans ce dernier cas, calculer numériquement la phase de la TF pour un point (harmonique) de la TF et expliquer les changements en relation avec la translation.

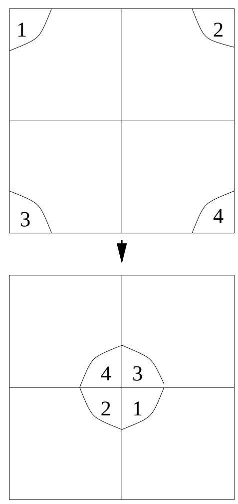


FIG. 2 – *Spectre d'amplitude calculée par la FFT (à gauche) et solution pour ramener l'harmonique* $(0,0)$ *au centre de l'image.*

B. DÉCOMPOSITION D'UNE IMAGE EN FRÉQUENCES ÉLÉMENTAIRES

L'objet de cette question est de reconstruire l'image du fichier **D1r.pgm** à partir de sa transformée de Fourier mais petit à petit en commençant par les harmoniques de basses fréquences jusqu'aux hautes fréquences.

(**a**) Après avoir obtenu la TF de l'image **D1r.pgm**, mettez toute les valeurs à zéro sauf celles dans les régions suivantes centrées à l'origine, i.e., centrées autour de l'harmonique $(0,0)$ (cf. Figure 3). Calculer la TF inverse à partir de l'image complexe ainsi tronquée et afficher l'image obtenue[3]. Par exemple, expérimenter les valeurs suivantes.

Distance de l'origine	Zone de conservation des pixels de la FFT
0 à 1	Zone conservant les harmoniques "basse-fréquences".
2 à 5	Zone conservant les harmoniques "moyenne-fréquences".
6 à 15	Zone conservant les harmoniques "haute-fréquences".
16 à 63	Zone conservant les harmoniques "trés-haute-fréquences".

[2]Utiliser toujours la fonction logarithmique déjà utilisé pour renforcer les hautes fréquences ainsi que les fonctions RECAL et MULT si nécessaire.

[3]Utiliser la fonction RECAL pour visualiser ces différentes images car cette opération crée des valeurs de niveaux de gris négatifs.

(**b**) Additionner les images ainsi obtenues (par TF inverse) et observer la reconstruction de l'image originale par l'ajout de fréquences de plus en plus élevées.

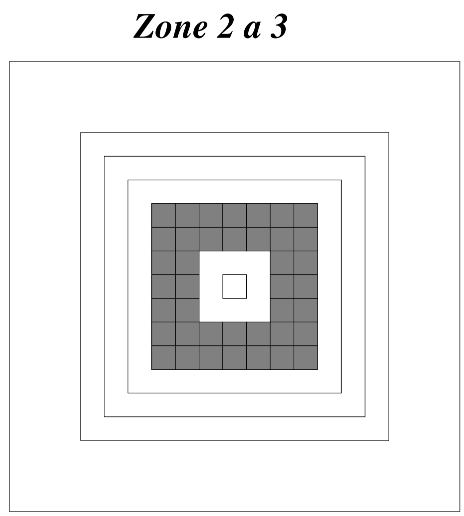


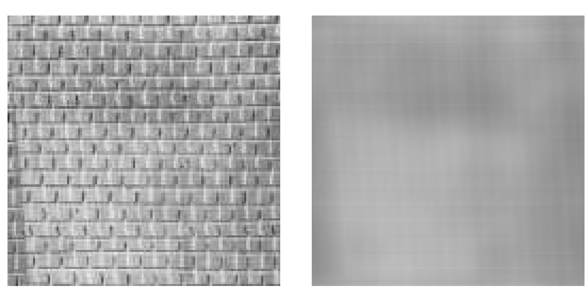
FIG. 3 – *Exemple de zone* 2 *à* 3 *sélectionnée.*

C. LA CONVOLUTION

(**a**) Calculer, en travaillant dans le domaine fréquence, l'auto-convolution spatiale d'une image de taille 128×128 pixels contenant un carré blanc sur fond noir.

1. Choisir un carré de taille respectant les conditions nécessaire pour éviter un recouvrement spatial. Justifier votre choix.
2. Choisir un carré de taille ne respectant pas ses conditions. Justifier votre choix et expliquez ce qui se passe.

(**b**) Calculer la convolution spatiale, en travaillant toujours dans le domaine fréquence, entre une image contenant un petit carré de taille 3×3 (fonction ouverture) et l'image contenue dans le fichier **D1r.pgm**. Cette opération s'appelle un filtrage passe-bas. Répéter l'expérience avec un carré de dimension 15×15 pixels. Qu'observez-vous ? Expliquez ce qui se passe dans le domaine fréquence.



(**a**) (**b**)

FIG. 4 – *(***a***) Image originale* **D1r.pgm**. *(***b***) Image* **D1r.pgm** *convoluée avec la fonction ouverture de dimension* 15×15 *pixels.*

D. RECOUVREMENT SPECTRAL OU ALIASING

(**a**) Construire une image de taille 128×128 pixels définie par la fonction d'intensité suivante,

$$I(x,y) = 128 + 127 * \cos(2\pi(25x + 31y)/128).$$

où on définit x comme étant l'axe vertical (ligne) et y, l'axe horizontal (colonne) (cf. Figure 5).

(**b**) Sous-échantillonner $I(x,y)$ en ne retenant plus qu'un point sur quatre en x comme en y. Ceci vous donnera alors une image de taille 32×32 pixels et répondez aux questions suivantes ;

(**1**) Observez-vous toujours la même image du cosinus (fréquence et orientation) au cours de ce sous-échantillonnage ? Expliquez ce qui se passe.

(**2**) Retrouver par le calcul la nouvelle fréquence verticale et horizontale de cette image résultant du sous échantillonnage en utilisant la théorie de l'échantillonnage.

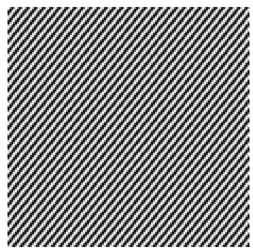


FIG. 5 – (**a**) *Image d'intensité* $I(x,y)$.

(**c**) Essayer de retrouver mathématiquement qu'elle serait la valeur du nombre d'onde k_y qui annulerait la fréquence f_y du signal $I_2(x,y) = 128 + 127 * \cos(2\pi((25/128)x + k_y y))$ une fois le signal sous-échantillonné. On rappelle que y désigne l'axe horizontal.

REMISE & RAPPORT

A. DATE DE REMISE ET CONDITIONS

Vous devez rendre physiquement au démonstrateur le rapport et électroniquement le(s) programme(s) fait en C (voir le barême) avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours dans la rubrique *Introduction & Program*. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *TpIFT6150– <Numéro du Tp>-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux tel qu'indiqué dans le barême.

B. RAPPORT

Le rapport doit être concis, clair et devra contenir (en plus des éléments et des discussions que vous jugerez importants) :

- La description brève du problème et de la technique utilisée.
- Les réponses aux questions posées, les images résultats et les commentaires que vous jugerez utile.
- Les références si besoin est.