DIRO
IFT 6150

# TRAVAIL PRATIQUE N° 4

## SIMULATION ET RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE
## -TRANSFORMÉE DE RADON-

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
*e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

### A. INTRODUCTION

L'objet de ce TP est de réaliser dans un premier temps la simulation d'un tomographe axiale (cf. Figure 1) puis dans un deuxième temps de retrouver l'image originale par reconstruction tomographique. La tomographie se rencontre en particulier en médecine où on doit retrouver une tranche (i.e., une image) d'un organe (le cerveau par exemple) à partir de ses projections obtenues par Rayons-X. On utilise une approche semblable en mécanique et métallurgie pour effectuer des essais non-destructifs (i.e., sans aucun contact avec la pièce à étudier) ou encore en géologie et géophysique pour étudier les différentes couches géologiques d'un terrain etc.

FIG. 1 – *Image d'un tomographe.*

### B. SIMULATION D'UN TOMOGRAPHE AXIAL (TF DE RADON)

On se propose dans cette partie de simuler un tomographe axiale. Cette simulation revient en faite à calculer la Transformée de Radon (TR) d'une image. On utilisera, pour ce TP, l'image de taille 128 ×

128 pixels **lenna.pgm** (cf. Figure 2a). A cette fin, cette Transformée nécessite d'évaluer l'ensemble des projections circulaires $p_\theta(t)$ de cette image pour des angles $\theta$ compris entre $0^o$ et $179^o$ (avec un pas de $1^o$ par exemple). Pour obtenir ces projections, faites tourner l'image autour de son centre (grâce à une transformation géométrique appropriée) avec un pas de $1^o$ et utiliser une interpolation bilinéaire (cf. Figure 2b), puis projeter le résultat sur l'axe des x. C'est l'ensemble de ces projections qui correspond à la Transformée de Radon. On obtient pour une image originale de taille $128 \times 128$ pixels, une image transformée de taille $180 \times 128$ pixels (cf. Figure 2c)[2].

(**a**) (**b**) (**c**)

FIG. 2 – (**a**) *Image originale* **lenna.pgm**. (**b**) *Image précédente tournée d'un angle de* $45^o$ *(en utilisant une interpolation bilinéaire).* (**c**) *Transformée de Radon de l'image* **lenna.pgm**. *La* $45^{ième}$ *ligne horizontale de cette image correspond à la projection de l'image précédente sur l'axe des x. (i.e., le niveau de gris associé à la* $x^{ième}$ *colonne de cette ligne est obtenu en sommant les niveaux de gris de tous les pixels de l'image* **b** *situés sur la* $x^{ième}$ *colonne).*

### C. RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE (TF$^{-1}$ DE RADON)

On se propose maintenant de reconstruire l'image originale **lenna.pgm** à partir de sa transformée de Radon. Il existe essentiellement trois stratégies pour arriver à retrouver l'image originale à partir de ses projections,

1. L'approche directe de Fourier qui utilise le théorème de la tranche centrale de Fourier.
2. La rétroprojection filtrée qui permet d'éviter l'interpolation $2D$ de la première méthode.
3. La méthode algébrique.

Utiliser la première méthode (décrite dans le cours) afin de reconstruire l'image originale. Cette méthode utilise le théorème de la tranche centrale de Fourier qui s'enonce comme suit : "à une ligne du spectre de Fourier d'orientation $\theta$ correspond la TF de la projection de l'image selon cet angle" (cf. Table 1). De ce fait, le processus de reconstruction tomographique ou la Transformée de Radon inverse comprend les trois étapes suivantes,

[1]Noter bien que l'on va "perdre" les coins lorsqu'on projettera à $45^o$ par exemple puisque la diagonale d'une image $128 \times 128$ est $128\sqrt{2}$.

1. Effectuer la TF (1D) de chaque ligne (projection) de la Transformée de Radon pour obtenir une matrice $F(\theta, r)$ qui contient la Transformée de Fourier de l'image mais en coordonnés polaires.
2. Interpoler bilinéairement les valeurs du spectre $F(u, v)$ (grille rectangulaire) à partir des valeurs de $F(\theta, r)$ qui sont en coordonnées polaires.
3. Faire la TF inverse.

**(1)** Faire une reconstruction de l'image originale **lenna.pgm** à partir de sa transformée de Radon en utilisant l'approche directe de Fourier, l'interpolation bilinéaire (pour calculer la TF de lenna à partir de sa TR), et 180 projections.

**(2)** Comparer le résultat de reconstruction obtenu en utilisant l'interpolation au plus proche voisin (ou interpolation directe).

**(3)** Comparer le résultat de reconstruction obtenu en utilisant 90 projections pour l'obtention de la TR (projection de l'image en $0^o$, $2^o$, $4^o \ldots 178^o$), puis en utilisant seulement 45 projections (projection de l'image en $0^o$, $4^o \ldots 176^o$). Conclure.

## REMISE & RAPPORT & CRITÈRE D'ÉVALUATION

### A. DATE DE REMISE ET CONDITIONS

Vous devez rendre physiquement au démonstrateur le rapport et électroniquement le(s) programme(s) fait en C (fichier .c et exécutable ainsi que la ligne de compilation ou le makefile) avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours dans la rubrique *Introduction & Program.* Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *TpIFT6150– <Numéro du Tp>-<Numéro de la question>.c.* Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux.

### B. RAPPORT

Le rapport doit être concis (5-6 pages sans compter le code), clair et devra contenir (en plus des éléments et des discussions que vous jugerez importants) :

- La description brève du problème et de la technique utilisée.
- Les réponses aux questions posées, les images résultats et les commentaires que vous jugerez utile.

**THEOREME DE LA TRANCHE CENTRALE DE FOURIER**

La TF de f(x,y) s'écrit,

$$F(u,v) = \int\int f(x,y)\exp\big(-2\pi i(ux+vy)\big)dxdy.$$

Pour $v=0$, qui représente la ligne $v=0$ du spectre de Fourier, on a,

$$\begin{aligned} F(u,0) &= \int\Big[\int f(x,y)dy\Big]\exp\big(-2\pi i(ux)\big)dx \\ &= \mathcal{F}\big(p_{\theta=0}(t)\big), \end{aligned}$$

où $p_\theta(t)$ représente une projection de l'image suivant un angle $\theta$. Et pour une ligne passant par l'origine du spectre de Fourier avec un angle $\theta$, on a,

$$\begin{aligned} F(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \int\int f(x,y)\exp\big(-2\pi i(xr\cos\theta + yr\sin\theta)\big)dxdy, \\ &= \int\Big[\int f(t\cos\theta - s\sin\theta, s\cos\theta + t\sin\theta)ds\Big]exp\big(-2\pi irt\big)dt, \\ &= \mathcal{F}\big(p_\theta(t)\big), \end{aligned}$$

où le changement de variable suivant (rotation) a été utilisé,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}.$$

En conclusion, à une ligne du spectre de Fourier d'orientation $\theta$ correspond la TF de la projection de l'image selon cet angle.

TAB. 1 – Théorème de la tranche centrale de Fourier.