DIRO
IFT 6150

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

A. INTÉGRALE DE FOURIER

1. Définition

Soit une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce) et absolument intégrable (i.e., l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est finie). On appelle transformée de Fourier de $f(x)$, la fonction $F : \mathbb{R} \to C$, (C désigne le corps des complexes), telle que,

$$\boxed{F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-2\pi j \nu x\right) dx, \qquad \nu \in \mathbb{R}.} \tag{1}$$

L'application $\mathcal{F} : f \to F$ est appelée transformation de Fourier. On notera : $F : \mathcal{F}(f)$. La fonction F est bornée. En effet,

$$|F(\nu)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-2\pi j \nu x\right) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\; dx,$$

car $|\exp\left(-2\pi j \nu x\right)| = 1$. De plus, on démontre que F est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{|\nu|\to\infty} |F(\nu)| = 0$[1].

— Cas particuliers —

a) f est paire

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos 2\pi\nu x - j \sin 2\pi\nu x)\, dx.$$

Or les fonctions $x \to f(x)\cos 2\pi\nu x$ et $x \to f(x)\sin 2\pi\nu x$ sont respectivement paire et impaire. Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x\, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x\, dx,$$

[1] La courbe d'équation $y = |F(\nu)|$ est appelée spectre de f. Quelle que soit f, le spectre possède donc l'axe Ox pour asymptote.

$$\text{et,} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x \, dx = 0.$$

Si f est paire, l'intégrale de Fourier s'écrit donc,

$$\boxed{F(\nu) = 2 \int_{0}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x \, dx.} \tag{2}$$

Dans ce cas, $F(\nu)$ est réel.

b) f est impaire

$$\text{Cette fois, on a,} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos 2\pi\nu x \, dx = 0,$$

$$\text{donc} \qquad \boxed{F(\nu) = -2j \int_{0}^{+\infty} f(x) \sin 2\pi\nu x \, dx.} \tag{3}$$

Et dans ce cas, $F(\nu)$ est imaginaire pure.

b) f est réel

Dans ce cas, on démontre que la partie réelle de la transformée de Fourier de $f(x)$, i.e., $\mathcal{R}[F(\nu)]$ est paire et sa partie imaginaire, i.e., $\mathcal{I}[F(\nu)]$ est impaire (symétrie hermitienne).

2. Exemple de transformées

1) Fonction "porte"

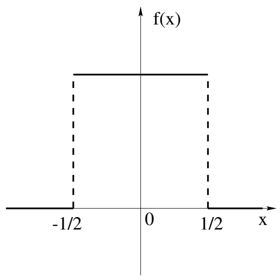

FIG. 1 – Fonction "porte" notée $\Pi(x)$.

La fonction "porte" (cf. Figure 1), notée $\Pi(x)$, est définie par,

$$\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si} \quad |x| \leq \frac{1}{2}, \\ \Pi(x) = 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La fonction étant paire, on a,

$$\begin{aligned} F(\nu) &= 2 \int_{0}^{+\infty} \Pi(x) \cos 2\pi\nu x \, dx, \\ F(\nu) &= 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi\nu x \, dx, \\ F(\nu) &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}. \end{aligned}$$

$$\text{donc,} \qquad \boxed{\mathcal{F}[\Pi(x)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}.} \tag{4}$$

On vérifie que F est bornée, continue et que $\lim\limits_{|\nu|\to\infty} |F(\nu)| = 0$ (cf. Figure 2).

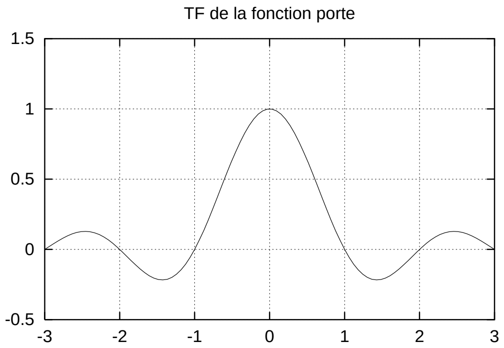

FIG. 2 – TF de la fonction "porte".

2) Fonctions impulsions

Soit la fonction $\Pi_T(x)$, définie par,

$$\begin{cases} \Pi_T(x) = A & \text{si} \quad |x| \leq \frac{T}{2}, \\ \Pi_T(x) = 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(x)\, dx = AT$. Comme précédemment, on a,

$$F_T(\nu) = 2\int_0^{\frac{T}{2}} A\cos 2\pi\nu x\, dx = A\,\frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu} = AT\,\frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}.$$

— CAS PARTICULIER —

Si $AT = 1$, les fonctions précédentes sont appelées fonctions impulsion-unité. Elles peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction porte,

$$\Pi_T(x) = \frac{1}{T}\Pi\Big(\frac{x}{T}\Big) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si} \quad |x| \leq \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > T. \end{cases}$$

$$\text{donc,} \qquad \mathcal{F}\Big(\frac{1}{T}\,\Pi\Big(\frac{x}{T}\Big)\Big) = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}.$$

Lorsque $T \to 0$, la limite obtenue, qui n'est pas une fonction, est appelée *distribution de Dirac* et noté δ. Il sera commode de considérer par la suite que,

$$\delta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\,\Pi\Big(\frac{x}{T}\Big).$$

La propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\Pi\Big(\frac{x}{T}\Big)\, dx = 1$ entraîne la notation abusive $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$ qui justifie la représentation graphique de δ (cf. Figure 3). En tenant compte de $\lim\limits_{T\to 0} \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T} = 1$, on obtient donc,

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta) = 1.} \tag{5}$$

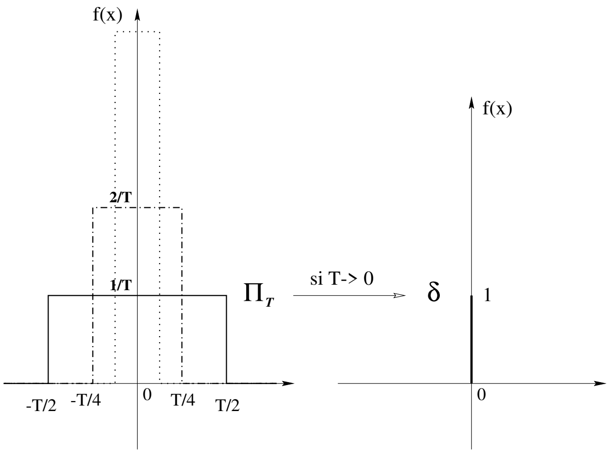

FIG. 3 – Distribution de Dirac (ou limite de la fonction porte de largeur T quand $T \to 0$).

3) Fonction exponentielle

Soit $f : f(x) = \exp^{-a|x|} \quad (a \in IR^{*+})$, la fonction étant paire, on a,

$$F(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-ax\right) \cos 2\pi\nu x \, dx.$$

Une double intégration [1] par parties conduit à,

$$F(\nu) = 2 \, \frac{a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.$$

Donc, on a,

$$\boxed{\mathcal{F}[\exp^{-a|x|}] = 2 \, \frac{a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.} \qquad (6)$$

3. Formule d'inversion

On admettra que la transformation de Fourier peut être inversée, c'est-à-dire qu'il existe une transformation, notée $\mathcal{F}^{-1}$, telle que $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$. Si $F(\nu) =$

[1] La double intégration par parte se déroule comme suit,

$$\begin{aligned}
I &= \mathcal{F}\big[\exp\left(-a|x|\right)\big] = 2\int_0^{\infty} \exp\left(-ax\right)\cos(2\pi\nu x)\,dx \\
&= 2\left[-\frac{1}{a}\exp\left(-ax\right)\cdot\cos(2\pi\nu x)\right]_0^{\infty} - \frac{4\pi\nu}{a}\int_0^{\infty}\exp\left(-ax\right)\sin(2\pi\nu x)\,dx \\
&= \frac{2}{a} - \frac{4\pi\nu}{a}\Big(\big[-\frac{1}{a}\exp\left(-ax\right)\cdot\sin(2\pi\nu x)\big]_0^{\infty} + \frac{2\pi\nu}{a}\,I\Big) \\
&= \frac{2}{a} - \frac{4\pi\nu}{a}\left(0 + \frac{\pi\nu}{a}\,I\right) \\
&= \frac{2}{a} - \frac{4\pi^2\nu^2}{a^2}\,I \\
&= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}.
\end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x)\, dx$, on démontre que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x)\; dx = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \tag{7}$$

où $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent la limite à droite et la limite à gauche en x. En un point où f est continue, on a donc l'équivalence [2].

$$\boxed{F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x)\; dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x)\; d\nu.} \tag{8}$$

-EXEMPLE- APPLICATION POUR LE CALCUL D'INTÉGRALE.

On a vu que $\mathcal{F}(\Pi(x)) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$, donc, (cf. Equation (7)),

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big) = \begin{cases} \Pi(x) & \text{si} \quad |x| \neq \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad |x| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

C'est-à-dire, en détaillant,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \exp(2\pi j\nu x)\, d\nu = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par exemple, pour $x = 0$, on a,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\; d\nu = 1,$$

d'où, en posant $\pi\nu = t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

B. PROPRETÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

L'équivalence admise précédemment, i.e.,

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2\pi j\nu x)\; dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi j\nu x)\; d\nu,$$

valable en tout point où f est continue, fait apparaître une symétrie parfaite dans les formules. On passe de la transformation de Fourier directe $\mathcal{F}$ à la transformation inverse $\mathcal{F}^{-1}$ en échangeant,

$$\begin{array}{ccc} f & \text{en} & F, \\ x & \text{en} & \nu, \\ j & \text{en} & -j. \end{array}$$

[2]Si F est paire, $f(x) = 2\int_0^{+\infty} F(\nu) \cos 2\pi\nu x\, d\nu$. $f(x) = 2j\int_0^{+\infty} F(\nu) \sin 2\pi\nu x\, d\nu$, si F est impaire.

Toute propriété de $\mathcal{F}$ est donc vraie pour $\mathcal{F}^{-1}$ en tenant compte de cette transposition.

1. Linéarité

Si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$, d'après la linéarité de l'intégration,

$$\boxed{\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda F + \mu G,} \tag{9}$$

quels que soient λ et μ complexes. De même,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda f + \mu g.} \tag{10}$$

2. Transformée de f(ax)

Soit la fonction $g : g(x) = f(ax)$, $a \in IR^*$,

$$\mathcal{F}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax) \exp\left(-2\pi j \nu x\right) dx.$$

En posant $ax = t$ et en remarquant que les bornes sont conservées si $a > 0$, échangées si $a < 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g) &= \operatorname{sgn}(a) \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp\left(-2\pi j \nu \frac{t}{a}\right) \frac{dt}{a}, \\ \mathcal{F}(g) &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{\nu}{a}\right) t\right) dt, \end{aligned}$$

$$\text{d'où,} \qquad \boxed{\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right),} \tag{11}$$

-EXEMPLE- TRANSFORMÉE D'UNE FONCTION “PORTE” DE LARGEUR $2x_0$

Soit $f(x) = \Pi\left(\frac{x}{2x_0}\right)$, la fonction “porte” centrée en 0 et de largeur $2x_0$ (cf. Figure 4), on a,

$$\mathcal{F}[\Pi(x)] = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu},$$

$$\text{d'où,} \qquad \mathcal{F}[f(x)] = 2x_0 \frac{\sin 2\pi\nu x_0}{2\pi\nu x_0}.$$

3. Transformée de f(x-xo)

Soit la fonction $g : g(x) = f(x - x_0)$,

$$\mathcal{F}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0) \exp\left(-2\pi j \nu x_0\right) dx,$$

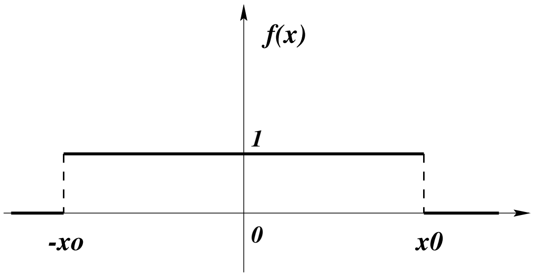

FIG. 4 – fonction “porte” centrée en 0 et de largeur $2x_0$ notée $\Pi\Big(\frac{x}{2x_0}\Big)$.

En posant $x - x_0 = t,\ t \in \mathbb{R}$, on obtient,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left(-2j\pi\nu(x_0+t)\right)dt,\\ \mathcal{F}(g) &= \exp\left(-2j\pi\nu x_0\right)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\left(-2j\pi\nu t\right)dt,\end{aligned}$$

$$\text{donc} \qquad \boxed{\mathcal{F}[f(x-x_0)] = \exp\left(-2j\pi\nu x_0\right)\ F(\nu).} \tag{12}$$

On en déduit, selon la transposition indiquée précédemment, la propriété analogue pour $\mathcal{F}^{-1}$,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F(\nu-\nu_0)] = \exp\left(2\pi j\nu_0 x\right)\ f(x).} \tag{13}$$

1) -EXEMPLE- TRANSFORMÉE D'UNE “PORTE” DÉCALÉE

La transformée d'une porte décalée (cf. Figure 5) est,

$$\mathcal{F}[\Pi(x-x_0)] = \exp\left(-2j\pi\nu x_0\right) \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}.$$

Plus généralement, on a,

$$\mathcal{F}\Big[\frac{1}{T}\Pi\Big(\frac{x-x_0}{T}\Big)\Big] = \exp\left(-2\pi j\nu x_0\right) \times \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}.$$

Si $T \to 0$, on en déduit, en posant,

$$\delta_{x_0} = \delta(x-x_0) = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\Pi\Big(\frac{x-x_0}{T}\Big),$$

i.e., la distribution de Dirac translatée en x_0. On obtient,

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = \exp\left(-2\pi j\nu x_0\right).$$

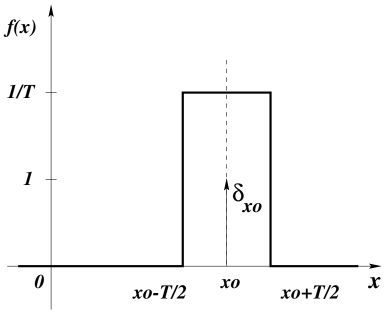

FIG. 5 – Fonction "porte" centrée en x_0 et de largeur T.

2) -EXEMPLE- TRANSFORMÉE DE $f(x)\cos wx$

On peut écrire,

$$f(x)\cos wx = \frac{1}{2}\Big(\exp(jwx) + \exp(-jwx)\Big)\; f(x).$$

Si $\mathcal{F}(f) = F$, on en déduit, en posant $\nu_0 = \frac{w}{2\pi}$,

$$\mathcal{F}\Big(f(x)\cos wx\Big) = \frac{1}{2}\Big(F(\nu - \nu_0) + F(\nu + \nu_0)\Big).$$

4. Transformée de Fourier de fonction cosinus et sinus

En utilisant les propriétés précédentes, on obtient facilement la transformée de Fourier de la fonction cosinus et sinus,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big(\cos(2\pi\nu_0 x)\big) &= \frac{1}{2}\big(\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\big), \\ \mathcal{F}\big(\sin(2\pi\nu_0 x)\big) &= \frac{j}{2}\Big(\delta(\nu-\nu_0) - \delta(\nu+\nu_0)\big), \\ \text{car,} \qquad \mathcal{F}(\exp(2\pi j\nu x_0)) &= \delta(x - x_0). \end{aligned}$$

5. Transformée de $\mathbf{f'(x)}$

On suppose que f et f' ont des transformées de Fourier,

$$\mathcal{F}(f') = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\exp(-2\pi j\nu x)\; dx.$$

En procédant à une intégration par parties, on obtient,

$$\mathcal{F}(f') = [f(x)\exp(-2j\pi\nu x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[-2j\pi\nu\exp(-2j\pi\nu x)]\; dx.$$

Or $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)\exp(-2\pi j\nu x)| = \lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0$ puisque f est absolument intégrable sur $I\!R$. D'où,

$$\mathcal{F}(f') = 2j\pi\nu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-2j\pi\nu x)\; dx,$$

c'est-à-dire, $$\boxed{\mathcal{F}[f'(x)] = 2j\pi\nu\, F(\nu).} \tag{14}$$

De même, pour $\mathcal{F}^{-1}$, $$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2j\pi x\, f(x)} \tag{15}$$

Plus généralement, si $f^{(n)}(x)$ existe et possède une transformée, on a,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (2j\pi\nu)^n F(\nu), \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\nu)] = (-2j\pi x)^n f(x).$$

-EXEMPLE- TRANSFORMÉE DE LA FONCTION TRIANGLE.

Soit la fonction triangle (cf. Figure 6), noté $\Lambda(x)$. La fonction est dérivable par morceaux sur $I\!R$, la fonction dérivée pouvant s'exprimer à l'aide de fonction portes,

$$\Lambda'(x) = \Pi\Big(x + \frac{1}{2}\Big) - \Pi\Big(x - \frac{1}{2}\Big).$$

En appliquant la transformation de Fourier à la relation précédente, on obtient,

$$\begin{aligned} 2j\pi\nu\, F(\nu) &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big[\exp\Big(-2\pi j\nu(-\frac{1}{2})\Big) - \exp\Big(-2\pi j\nu(\frac{1}{2})\Big)\Big] \\ 2j\pi\nu\, F(\nu) &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times 2j\ \sin \pi\nu, \\ \text{donc,} \qquad F(\nu) &= \Big(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big)^2. \end{aligned}$$

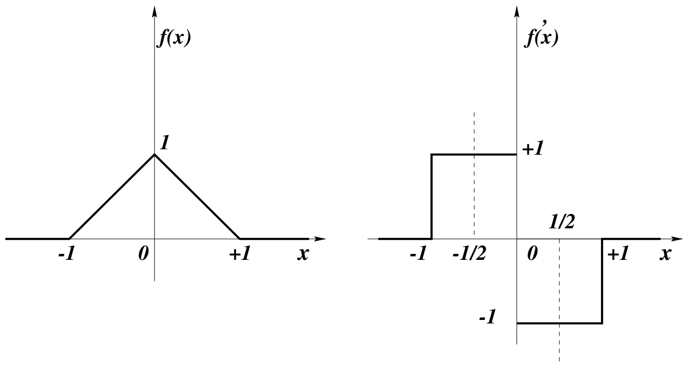

FIG. 6 – fonction "triangle" et sa fonction dérivé exprimée à partir de fonctions "porte" décalées.

6. Transformée du produit de convolution

On appelle produit de convolution de deux fonctions f et g supposées absolument intégrables sur $I\!R$, la fonction notée $f * g$ définie par,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t)\, dt.$$

On démontre que si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$ alors,

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = F \times G.} \tag{16}$$

De la même façon pour $\mathcal{F}^{-1}$, on a,

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(F * G) = f \times g.} \tag{17}$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier échange le produit algébrique et le produit de convolution,

$$\begin{array}{c} * \xrightarrow{\mathcal{F}} \times \\ \times \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} * \end{array}$$

-EXEMPLE- CONVOLUTION DE DEUX FONCTIONS "PORTE"

On a vu que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Lambda(x)] &= \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2, \\ \text{c'est-à-dire,} \qquad \mathcal{F}[\Lambda(x)] &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \times \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}, \\ \text{or,} \qquad \mathcal{F}[\Pi(x)] &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}, \\ \text{donc,} \qquad \Lambda = \Pi * \Pi. \end{aligned}$$

7. Formule de Parseval

Si $\mathcal{F}(f) = F$ et $\mathcal{F}(g) = G$, on démontre que, sous réserve de convergence des intégrales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\overline{G(\nu)}d\nu.$$

En particulier, si $f = g$, on obtient la formule de Parseval[3],

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 \, d\nu.$$

-EXEMPLE- APPLICATION POUR LE CALCUL D'INTÉGRALE.

En considérant la fonction porte,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Pi^2(x)dx = 1, \\ \text{d'où,} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 = 1, \\ \text{soit encore, en posant } \pi\nu = t, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \pi. \end{aligned}$$

[3]En physique, si $f(t)$ représente par exemple une onde fonction du temps, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt$ est l'énergie totale. La formule de Parseval traduit donc la conservation de l'énergie dans la transformée de Fourier.

C. NOTE SUR LA DISTRIBUTION DE DIRAC

1. Définition

La distribution de Dirac a été définie comme limite de fonctions “portes” dont la largeur tend vers 0 et l’amplitude tend vers l’infini (cf. Figure 3) :

$$\delta = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\, \Pi\Big(\frac{x}{T}\Big) = \lim_{T \to 0} \Pi_T(x).$$

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la formule de la moyenne permet d’écrire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(x)\; f(x)\, dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = f(\xi), \quad \xi \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}],$$

$$\text{d'où,} \qquad \lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_T(x)\; f(x) dx = f(0),$$

$$\text{Soit,} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

que l’on convient de noter,

$$\boxed{< \delta,\; f >= f(0).} \tag{18}$$

La distribution de Dirac apparaît donc comme l’opérateur linéaire défini par,

$$f \xrightarrow{\delta} f(0).$$

On obtient de la même façon pour $\delta(x - x_0) = \delta_{x_0} = \lim_{T \to 0} \Pi\Big(\frac{x - x_0}{T}\Big)$,

$$< \delta_{x_0},\; f >= f(x_0)$$

Plus généralement, si g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on vérifie que, quelle que soit f,

$$< \delta_{x_0} g(x),\; f(x) > = < \delta_{x_0},\; g(x) f(x) > = \; g(x_0) f(x).$$

c’est-à-dire,

$$\boxed{\delta_{x_0} g(x) = \delta_{x_0} g(x_0).} \tag{19}$$

On a démontré précédemment que,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\delta) &= 1, \\ \mathcal{F}(\delta_{x_0}) &= \exp(-2j\pi\nu x_0), \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{F}(\exp(2j\pi\nu_0 x) = \delta_{\nu_0}.} \tag{20}$$

On en déduit, en appliquant les propriétés de la transformée de Fourier, et en rappelant que $\mathcal{F}(f) = F$,

$$\begin{aligned} f(x) * \delta &= f(x), & (21) \\ f(x) * \delta_{x_0} &= f(x - x_0), & (22) \\ \mathcal{F}[(f(x) \exp(2j\pi\nu_0 x)] &= F(\nu - \nu_0). & (23) \end{aligned}$$

2. Peigne de Dirac

On appelle "peigne de Dirac" (cf. Figure 7) ou distribution de Poisson, la distribution noté $\text{III}\,(x)$, définie par,

$$\text{III}\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-n).$$

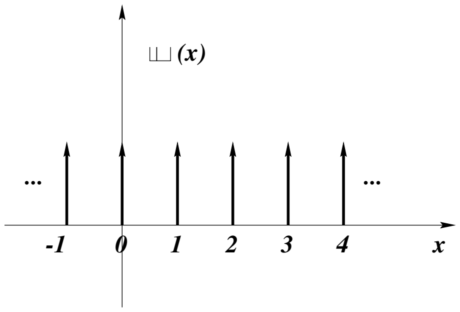

FIG. 7 – Fonction "peigne de Dirac" notée $\text{III}\,(x)$.

On démontre que le peigne de Dirac est invariant dans la transformation de Fourier,

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-n)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu-n).$$

Ou, plus généralement, dans le cas d'un peigne de période T,

$$\boxed{\mathcal{F}\Big(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x-nT)\Big) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(\nu-\frac{n}{T}).} \qquad (24)$$

Ce qu'illustre la Figure 8. Le peigne de Dirac est un outil mathématique commode pour l'écriture de la transformée de Fourier d'une fonction périodique et d'une fonction échantillonnée comme on peut le voir dans la suite.

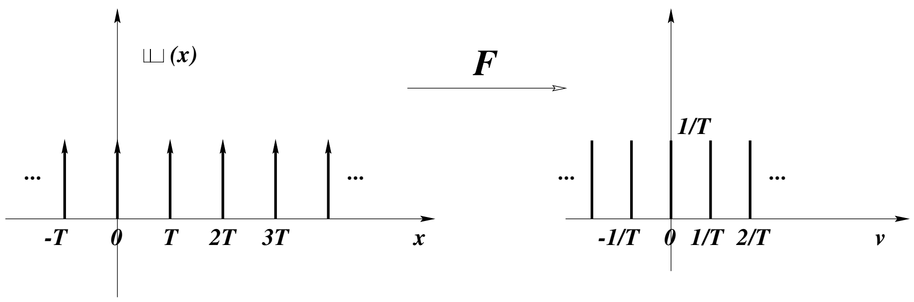

FIG. 8 – Fonction "peigne de Dirac" de période T et sa TF.

3. Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Soit $f(x)$ une fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{w}$, définie par la fonction "motif" $f_0(x)$ (cf. Figure 9) telle que,

$$\begin{cases} f_0(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in \Delta, \\ f_0(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin \Delta. \end{cases}$$

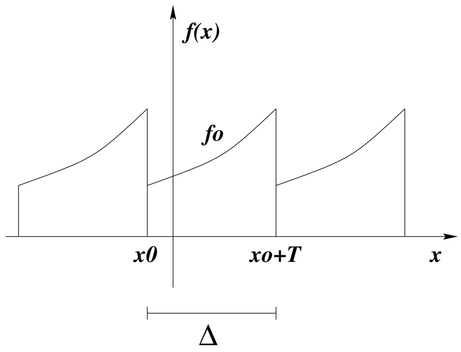

FIG. 9 – Fonction périodique, de période $T = \frac{2\pi}{w}$, définie par la fonction "motif" f_0.

On peut écrire f comme somme de fonctions décalés de la fonction motif,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_0(x - nT), \\ f(x) &= f_0(x) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - nT). \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Fourier $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} F(\nu) &= F_0(\nu) \times \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\Big(\nu - \frac{n}{T}\Big), \\ F(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{T}\, F_0\Big(\frac{n}{T}\Big)\, \delta\Big(\nu - \frac{n}{T}\Big), \\ \text{soit,} \qquad F(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n\, \delta\Big(\nu - \frac{n}{T}\Big), \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T}\, F_0\Big(\frac{n}{T}\Big). \end{aligned}$$

Toute fonction périodique de période T, a pour transformée de Fourier une somme d'impulsion de Dirac aux point $\frac{n}{T}$, d'amplitudes $|c_n| = \frac{1}{T}\Big|F_0\Big(\frac{n}{T}\Big)\Big|$. En appliquant $\mathcal{F}^{-1}$ à l'équation précédente, on retrouve le développement en série de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n+\infty} c_n \exp\,(2\pi j \frac{n}{T} x) = \sum_{n=-\infty}^{n+\infty} c_n \exp jnwx,$$

avec,

$$c_n = \frac{1}{T} F_0\Big(\frac{n}{T}\Big) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) \exp(-jnwx)\; dx = \frac{1}{T} \int_{\Delta} f(x) \exp(-jnwx)\; dx.$$

3. Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $I\!R$ et soit la suite de valeurs $(f(nT_e))_{n \in Z}$ échantillonnant la fonction f avec la période d'échantillonnage T_e (cf. Figure 10). On peut représenter la fonction ainsi échantillonnée par une somme d'impulsions de Dirac centrées aux valeurs nT_e, et pondérées par $Tf(nT_e)$,

$$f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e f(nT_e)\, \delta(x - nT_e)$$

En appliquant la transformation de Fourier, on obtient,

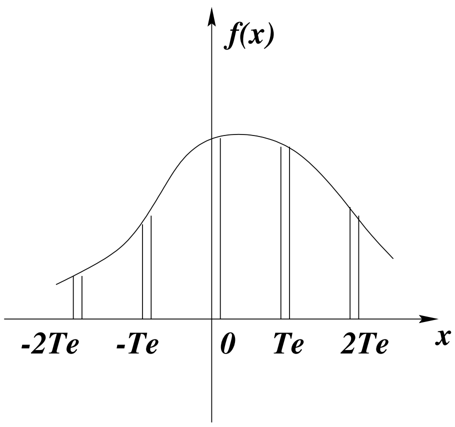

FIG. 10 – Fonction échantillonnée par une somme d' impulsions de Dirac centrées aux valeurs nT_e.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(f(x) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e \delta(x - nT_e)\Big) &= F(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\Big(\nu - \frac{n}{T_e}\Big), \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\Big(\nu - \frac{n}{T_e}\Big), \\
&= G(\nu).
\end{aligned}$$

Soit $[-\nu_0, +\nu_0]$, le support de $F(\nu)$ (c'est-à-dire $F(\nu) = 0$ si $\nu \notin [-\nu_0, +\nu_0]$). Le graphe de $G(\nu)$ est donc constitué d'arcs translatés de $\frac{n}{T_e}$ $(n \in Z)$ du graphe de F (cf. Figure 11).

Les différents arcs sont à supports disjoints si (cf. Figure 11),

$$\frac{1}{T} \geq 2\nu_0.$$

On peut "isoler" $F(\nu)$ en multipliant par une porte de largeur $2\nu_0$,

$$F(\nu) = G(\nu) \times \Pi\Big(\frac{\nu}{2\nu_0}\Big).$$

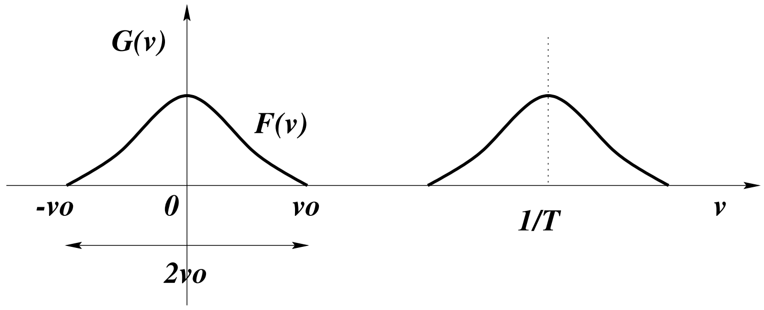

FIG. 11 – graphe de $G(\nu)$ (constitué d'arcs translatés de $\frac{n}{T_e}$ $(n \in Z)$ du graphe de F).

d'où, en appliquant $\mathcal{F}^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e\, f(nT_e)\, \delta(x - nT_e) * \frac{\sin 2\pi\nu_0 x}{\pi x}, \\
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_e\, f(nT_e)\, \frac{\sin 2\pi\nu_0 (x - nT_e)}{\pi (x - nT_e)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi la fonction f dont la transformée de Fourier a pour support $[-\nu_0, \nu_0]$ est parfaitement déterminée par la suite d'échantillons $\{f(nT_e)\}_{n \in Z}$ dès que $T_e \leq \frac{1}{2\nu_0}$ (théorème de Shannon).