DIRO
IFT 6150

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *11/12/2000*

I	Transformée de Fourier (15 pts).
II	Filtrage spatial (15 pts).
III	Filtrage spatial (10 pts).
IV	Gradient et détection par seuil (10 pts).
V	Érosion & Dilatation (10 pts).
VI	Filtrage fréquentiel (5 pts).
VII	Segmentation et comptage (5 pts).
VIII	Restauration d'image (5 pts).
IX	Histogramme (5 pts).
X	Phénomène particulier (5 pts).
XI	Spectre (7 pts).
XII	Transformée de Hadamard (8 pts).
XIII	Recouvrement spectral ou aliasing (5 pts).

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (15 pts)

A. Si $\mathcal{F}(f) = F$, on démontre que, sous réserve de convergence des intégrales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 \, d\nu.$$

Cette formule est la formule de Parseval qui traduit la conservation de l'énergie dans la Transformée de Fourier. En utilisant cette propriété, calculer l'intégrale suivante,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \, dx.$$

B. Utiliser la Transformée de Fourier de la fonction $\Pi(x)$ pour trouver les transformées de,

$$\Pi\Big(\frac{x-1}{2}\Big) \quad \text{et} \quad x\Pi(x).$$

Réponse

A. En considérant la fonction porte $\Pi(x)$, nous avons,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi^2(x) \, dx = \int_{-1/2}^{+1/2} \Pi^2(x) \, dx = 1,$$

$$\text{d'où,} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big)^2 \, d\nu = 1,$$

$$\text{soit encore, en posant } \pi\nu = x, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \, dx = \pi.$$

B. On obtient, en utilisant les propriétés de la Transformée de Fourier,

$$\mathcal{F}\Big(\Pi\Big(\frac{x-1}{2}\Big)\Big) = 2\ \exp\left(-2j\pi\nu\right)\ \frac{\sin(2\pi\nu)}{2\pi\nu}.$$

$$\mathcal{F}\Big(x\Pi(x)\Big) = -\frac{1}{2\pi j}\Big(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\Big)' = \frac{j}{2}\Big(\frac{\cos \pi\nu}{\pi\nu} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi^2\nu^2}\Big).$$

II. Filtrage spatial (15 pts)

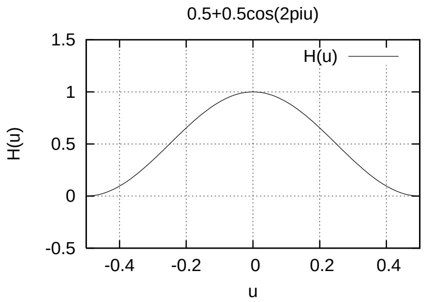
Trouver l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous. Tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentiel (en une dimension). De quel type de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc.) s'agit t-il ? Pouvait-on prévoir le résultat juste en regardant les coefficient de ce filtre ? Justifier votre réponse. De quel type de fonction continue ce filtre est censé provenir ? Théoriquement qu'aurait du t'on obtenir dans le domaine fréquentiel ? Est-ce le cas ? Pourquoi ?

$$h(x,y) = \frac{1}{16}\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Réponse

Filtre séparable ▶ $\frac{1}{4}\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 1\\ \hline\end{array}\ \frac{1}{4}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 1\\ \hline\end{array}$

$$
\begin{aligned}
H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x)\exp\left(-2\pi jux\right) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x)\exp\left(-2\pi jux\right), \\
&= \frac{1}{4}[\exp\left(2\pi ju\right) + 2 + \exp\left(-2\pi ju\right)] = \frac{1}{4}[2 + 2\cos(2\pi u)] = \frac{1+\cos(2\pi u)}{2}.
\end{aligned}
$$



C'est un filtre passe-bas ; ce que l'on pouvait prévoir en constatant que tous les coefficients de ce filtre sont positifs. Ce filtre est un filtre Gaussien, censé provenir de la discrétisation de la fonction Gaussienne bien connue. Théoriquement, si c'était parfaitement le cas, on aurait du obtenir dans le domaine fréquentiel une Gaussienne, ce qui n'est pas le cas ici. On obtient seulement la reconstruction de la Gaussienne par les deux premiers termes de la série de Fourier complexe (reconstruction par les deux premières exponentiels complexes).

III. Filtrage spatial (10 pts)

Rappelez l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous et tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentiel (en une dimension). Quel transformation mathématique faut-il faire dans le domaine fréquentiel pour que ce masque de convolution soit un vrais filtre passe-haut [1] ? Dans le domaine spatial, quelle opération cela implique t-il sur le masque de convolution 1D pour que cela soit un vrais filtre passe-haut ? Trouver le masque de convolution 2D correspondant.

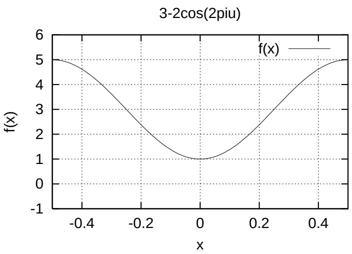
$$
h(x, y) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -3 & 1\\ \hline -3 & 9 & -3\\ \hline 1 & -3 & 1\\ \hline\end{array}
$$

Réponse

Filtre séparable ▶ $\begin{array}{|c|}\hline -1\\ \hline 3\\ \hline -1\\ \hline\end{array}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 3 & -1\\ \hline\end{array}$

[1] Quel fonction faut-il retrancher ou ajouter, multiplier, etc. ?

$$
\begin{aligned}
H(u) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x)\exp\left(-2\pi jux\right) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x)\exp\left(-2\pi jux\right), \\
&= -\exp\left(2\pi ju\right) + 3 - \exp\left(-2\pi ju\right) = 3 - 2\cos(2\pi u).
\end{aligned}
$$



C'est un rehausseur de contour, ce n'est donc pas un réel filtre passe-haut. Pour que cela en soit un, il faudrait retrancher dans le domaine fréquentiel la fonction constante $f(\nu) = -1$, i.e., retrancher dans le domaine spatial la fonction $\mathcal{F}^{-1}(f(\nu)) = -\delta(x)$. Dans ce cas, on obtiendrait le masque de convolution $[-1\ 3\ -1] - [0\ 1\ \ 0] = [-1\ 2\ -1]$, qui est bien un vrais filtre passe haut. En 2D cela correspond au masque de convolution ci dessous,

1	-2	1
-2	4	-2
1	-2	1

IV. Gradient et détection par seuil (10 pts)

Calculer la convolution numérique de l'image $I(x, y)$ ci-dessous avec le masque de convolution en x et en y dont l'origine a été indiqué par une flèche. Indiquer les résultats ci dessous, respectivement la convolution avec le gradient en x, celui en y, et le résultat de l'approximation du module du gradient par la formule suivante $|G| = |G_x * I(x, y)| + |G_y * I(x, y)|$ et le résultat de la détection du contour si ce module de gradient est supérieur ou égale à trois.

0	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
0	*0*	*0*	*2*	*3*	*2*
0	*0*	*2*	*3*	*4*	*3*
0	*0*	*5*	*4*	*4*	*3*
0	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

−1	*1*

Gx

−1
1

Gy

Réponse

Gx

	0	0	0	−1	1
	0	0	−2	−1	1
	0	−2	−1	−1	1
	0	−5	1	0	1
	0	−1	1	0	0
	0	0	0	0	0

Gy

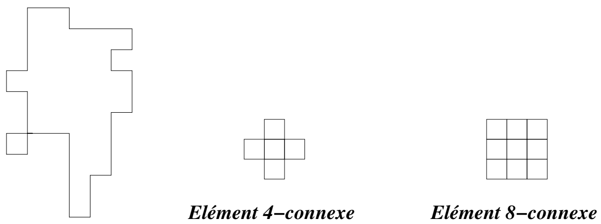
0	0	0	−2	−2	−2
0	0	−2	−1	−1	−1
0	0	−3	−1	0	0
0	0	4	4	4	3
0	0	1	0	0	0

|Gx| + |Gy| et Resultat

	0	0	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$
	0	$\cancel{4}$	2	2	2
	0	$\cancel{8}$	2	0	1
	0	$\cancel{3}$	$\cancel{5}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$
	0	1	0	0	0

V. Érosion & Dilatation (10 pts)

Calculer l'érosion et la dilatation de la forme F par les éléments 4-connexe et 8-connexe donnés ci-dessous (cf. Figure 1).



(a) (b)

FIG. 1 – (**a**) *Forme F* (**b**) *Élément 4-connexe et 8-connexe.*

Réponse

VI. Filtrage fréquentiel (5 pts)

Décrivez le processus mis en oeuvre sur l'exemple de la Figure 3 et commentez son résultat.

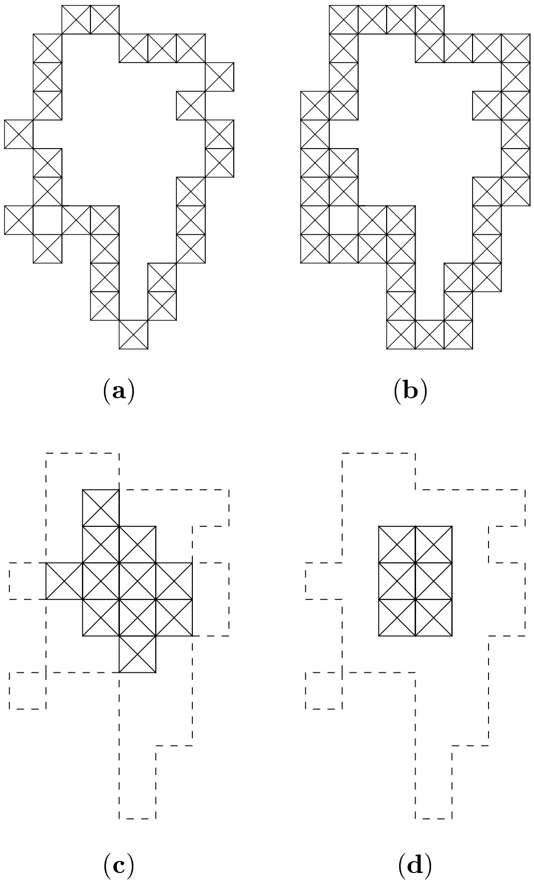


FIG. 2 – (**a**) *Forme dilatée par l'élément 4-connexe.* (**b**) *Forme dilatée par l'élément 8-connexe.* (**c**) *Forme érodée par l'élément 4-connexe.* (**d**) *Forme érodée par l'élément 8-connexe.*

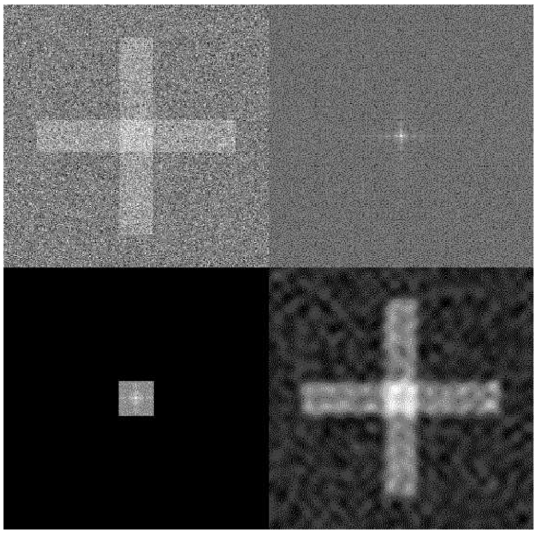


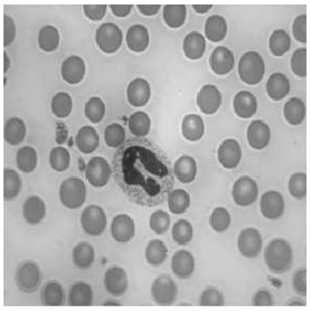
FIG. 3 – *Successivement, l'image initiale, son spectre de Fourier, le spectre modifié et l'image résultat.*

Réponse

Ce processus est un filtre passe-bas. Il consiste a calculer la TF de l'image et à multiplier cette TF par une fonction porte bidimensionnelle. Cela a pour effet de *filtrer* le bruit mais aussi d'éliminer les détails de l'image et d'introduire un flou sur l'image. De plus ce filtrage passe-bas a pour effet d'introduire sur l'image résultat une certaine ondulation (causé par le fait que la TF inverse d'une fonction porte est un sinus cardinal ; les lobes secondaires de la sinc produisant cet effet).

VII. Segmentation et comptage (5 pts)

Sur l'exemple de la Figure 4, sachant que l'on a beaucoup d'images de ce type, qu'elles sont toutes très similaires, et que l'objectif final est du comptage, que proposez-vous comme méthode de seuillage permettant d'extraire et compter les noyaux circulaires gris ?



a

b

FIG. 4 – *Image et son Histogramme.*

Réponse

Le plus simple est d'abord de faire un seuillage (à un niveau de gris se situant entre les deux Gaussiennes) pour binariser l'image de départ et pour extraire les différentes formes présentes sur cette image du fond. Ensuite un filtre passe-haut permettrait d'obtenir les contours des différentes régions précédemment détectées. On pourrait ensuite utilisé la transformée de Hough en prenant comme forme paramétrique que l'on désire détecter celle d'un cercle. Une recherche des *maxima* dans la matrice d'accumulation de la Transformée de Hough permettrait de compter automatiquement le nombre de noyaux circulaires gris.

VIII. Restauration d'image (5 pts)

Quelle est la nature du bruit présent sur cette image (cf. Figure 5) ? Que proposez-vous comme algorithme pour restaurer cette image ?

FIG. 5 – *Image de Lenna.*

Réponse

C'est du bruit Poivre et Sel qui provient d'une saturation de la quantification ou d'une dégradation de la pellicule photographique. Pour restaurer cette image, le filtrage médian (avec ici une fenêtre 3×3) permettrait de contrer et d'atténer l'effet de ce bruit. On pourrait utiliser aussi la morpho-math.

IX. Histogramme (5 pts)

Que proposez-vous pour améliorer la qualité de l'image associée à cet Histogramme (cf. Figure 6) ?

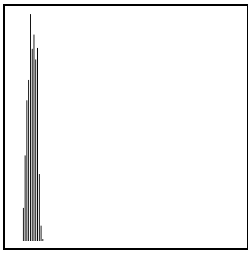


FIG. 6 –

Réponse

Égalisation ou recalage afin d'exploiter toute la dynamique des niveaux de gris.

X. Phénomène particulier (5 pts)

Pouvez vous expliquez brièvement quel est le phénomène qui se passe pour cette image (cf. Figure 7) ?. L'image *non bruitée* est composée de cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus.

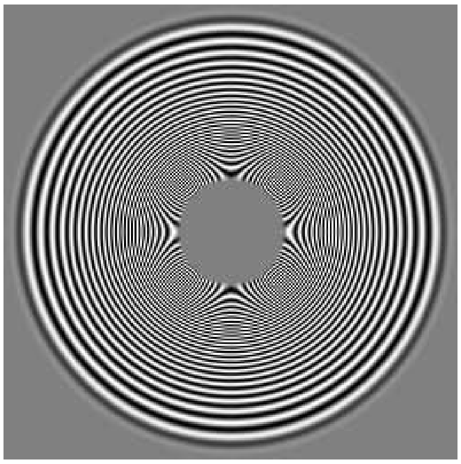


FIG. 7 –

Réponse

C'est l'effet moiré, d'aliasing, de sous-échantillonnage ou encore l'effet du au repliement de spectre. De par sa nature (des cercles concentriques dont les rayons se rapprochent de plus en plus), il est impossible de trouver une période d'échantillonnage assez petite pour éviter le repliement de spectre de cette image.

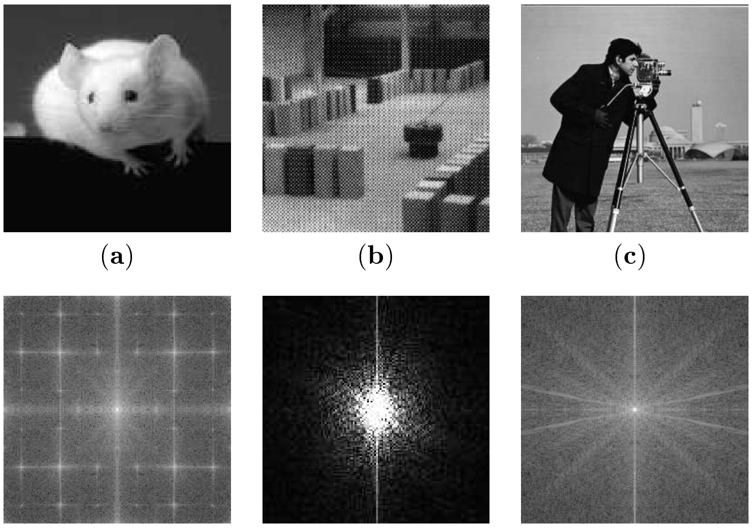
XI. Spectre (7 pts)

Associer à chacune des images le spectre (module de la TF) correspondant et expliquez pourquoi vous avez fait ce choix (cf. Figure 8) ?.

Réponse

Image (**a**) avec spectre (**e**) : l'image de la souris présente une discontinuité ou transition brutale suivant l'axe des x qui se traduit par une TF présentant de nombreuses fréquences spatiales suivant l'axe des ν (associé à l'axe des y).

Image (**c**) avec spectre (**f**) : l'image du caméra-man présente spatialement de nombreuses discontinuités suivant différents axes que l'on retrouve dans le domaine fréquentiel (de nombreuses et importantes fréquences spatiales associées à différents axes).



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

FIG. 8 – *Trois Images et trois spectres ...*

Image (**b**) avec spectre (**d**) : l'image est discrétisée par une sorte de peigne de Dirac bidimensionnel pondéré. Dans le domaine fréquentiel, cela se traduit par une convolution du motif spectral de base par un peigne de Dirac bidimensionnel pondéré.

XII. Transformée de Hadamard (8 pts)

Calculer la Transformée de Hadamard de l'image 2×2 suivante $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Réponse

Projection de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ sur la base de Hadamard 2×2 :

- $< \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > /4 = 2,$
- $< \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} > /4 = -1/2,$
- $< \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > /4 = 1/2,$
- $< \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} > /4 = 0.$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1/2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 1/2 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

XIII. Recouvrement spectral ou aliasing (5 pts)

Soit la fonction d'intensité suivante,

$$I(x, y) = 128 + 127 * \cos(2\pi(26x + 30y)/128).$$

que l'on peut écrire comme suit en utilisant les nombres d'ondes,

$$I(x, y) = 128 + 127 * \cos(2\pi(k_x x + k_y y)).$$

avec $k_x = 26/128$ (26 sommets verticalements (axe des x)) et $k_y = 30/128$ (30 sommets horizontalement (axe des y)) où on définit x comme étant l'axe vertical (ligne) et y, l'axe horizontal (colonne) (cf. TP).

Trouver mathématiquement qu'elle serait la valeur du nombre d'onde k_y qui annulerait la fréquence f_y une fois le signal sous-échantillonné par 4 (i.e., en ne retenant plus qu'un point sur quatre en x et en y).

Réponse

Pour annuler la fréquence f_y, il faudrait que la différence entre $k_e = 1/4$ (la nouvelle fréquence d'échantillonnage) et k_y soit nulle. Soit $k_y = 32/128$.