DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *10/12/2001*

I	Transformée de Fourier (15 pts).
II	Filtrage spatial (20 pts).
III	Opération ponctuelle (5 pts).
IV	Segmentation (20 points).
V	Misc. (25 pts).
VI	Compression d'image (10 pts).
VII	Segmentation (25 pts).
Total	120 points.

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (15 pts)

A. Soit une fonction $f(x) = \exp(-\pi x^2)$.
De quelle famille appartient cette fonction ? Vérifier que $f(x)$ est solution de l'équation différentielle suivante,

$$f'(x) + 2\pi x\, f(x) \quad = \quad 0. \tag{1}$$

Que devient l'équation (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$? En déduire $F(\nu)$ à une constante (C^{st}) multiplicative près en résolvant cette équation différentielle. A quelle valeur de ν ($F(\nu = ?)$) correspond l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2)\, dx$? Pour trouver finalement cette constante, C^{st}, utiliser le fait que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x^2)\, dx = 1$. (10 points).

B. En utilisant le fait que $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi \nu^2)$ et que $\exp(-\pi x^2)$ est paire, calculer l'intégrale suivante, (5 points).

$$I = \int_0^{+\infty} (\exp(-\pi x^2))\, \cos(2\pi x)\, dx. \tag{2}$$

II. Filtrage spatial (20 pts)

1. Trouver les expressions mathématiques et l'allure des réponses fréquentielles (module de la TF) du masque de convolution $h(x, y)$ donné ci-dessous respectivement en u (horizontalement) et en ν (verticalement) (10 points).
2. Tracer sommairement l'allure de sa réponse fréquentielle (module) en u et en ν. Expliquer pourquoi une représentation de ces réponses fréquentielles sur $[-0.5, 0.5]$ est satisfaisante (5 points).
3. De quel type de filtre pour chacune des dimensions considérées (passe-bas, passe-haut, Passe-bande, etc.) s'agit t-il ? Pouvait-on prévoir le résultat juste en regardant les coefficients de ce filtre ? Expliquer maintenant qualitativement ce que va faire ce masque de convolution. Donner son nom. (5 points).

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

III. Opération ponctuelle (5 pts)

Trouver la transformation permettant de transformer une image Img_1 possédant une fonction d'histogramme dont le support est compris entre $[\min_1, \max_1]$ ($\min_1$ est le niveau de gris minimum de cette image et $\max_1$ son niveau de gris maximum) en une image dont la fonction d'histogramme a un support compris entre $[\min_2, \max_2]$ (correspondant par exemple au minimum et au maximum de niveau de gris d'une autre image Img_2).

IV. Segmentation (20 pts)

On considère une segmentation deux classes (classe grise e_0 et classe blanche e_1) et plus précisément une segmentation au sens du Maximum de Vraisemblance et une segmentation Markovienne vue en cours et expérimentée en Travaux Pratiques. Pour l'itération en cours d'un de ces deux algorithmes précédents, on a, pour le champ d'étiquettes (i.e., l'image de classe), la configuration donnée par la Figure 1. On cherche à trouver l'étiquette (i.e., la classe) à associer au site x. Répondre aux questions suivantes.

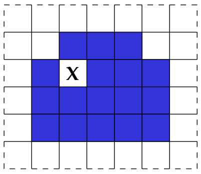

Fig. 1:

1. Pour une segmentation au sens du Maximum de Vraisemblance (MV), quelle est l'étiquette que l'on associera au site x si le niveau de gris en ce site est 160 et que la probabilité conditionnelle (connue ou préalablement estimée) d'avoir un certain niveaux de gris y_s au site s conditionnée au fait que l'on a la classe e_0 en ce même site est une loi normale de moy=100 et de variance $\sigma^2 = 100$ (i.e., $P_{Y_s/X_s}(y_s/e_0) = \mathcal{N}(100, 10)$) et que la probabilité conditionnelle (connue ou préalablement estimé) d'avoir un certain niveaux de gris y_s au site s conditionnée au fait que l'on a la classe e_1 en ce même site est une loi normale de moy=200 et de variance $\sigma^2 = 100$ (i.e., $P_{Y_s/X_s}(y_s/e_1) = \mathcal{N}(200, 10)$) (4 points).
2. On se donne un voisinage du second ordre et des cliques d'ordre deux. Donnez le type de cliques ou sous-ensemble de site que l'on doit considérer (2 points).
3. On considère maintenant une segmentation Markovienne avec ce type de voisinage et de clique (i.e., ce type de modèle a priori). On considère des potentiels de cliques du type $V_c(x) = \beta_c(1 - \delta(x_s, x_t))$ avec $\beta_c = 1$ quelque soit le type de clique. Que cela veut il dire physiquement ? (i.e., quel sont les contraintes modélisées mathématiquement sur les formes que l'on recherche dans l'image ?) (2 points).
4. A une itération donnée de l'algorithme ICM, on se trouve dans la configuration donnée en Figure 1 et on cherche dans un premier temps la probabilité d'avoir l'étiquette e_0 ou e_1 en ne considérant seulement le terme d'énergie a priori (i.e., $\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x_s)$ qui est relié à la probabilité locale d'avoir l'une ou l'autre étiquette par la relation $P_{X_s}(x_s) = (1/Z) \exp\big(-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x_s)\big)$). Calculer cette énergie puis cette probabilité locale d'avoir l'une ou l'autre étiquette (5 points).
5. Maintenant calculer l'énergie locale d'avoir l'une ou l'autre étiquette en considérant le terme d'énergie a priori et le terme d'énergie d'attache aux données en considérant les lois de la question 1. Quelle classe va choisir l'ICM pour ce site ? (7 points).

V. Misc (25 pts)

Répondre brièvement (1 à 2 phrases) aux questions suivantes :

1. Donner le principal avantage du filtrage fréquentiel (lorsqu'on utilise une FFT) comparativement au filtrage spatial (3 points).

2. Donner approximativement le nombre d'opérations nécessaire pour un filtrage fréquentiel (utilisant une FFT) et un filtrage spatial avec un masque de convolution de taille $M \times M$ et une image de taille $N \times N$ (on prendra la convention suivante une addition complexe = 2 ops et une multiplication de 2 complexes = 6 ops, une opération = 1 multiplication = 1 op). A partir de quelle longueur du masque de convolution est il plus avantageux de prendre le filtrage fréquentiel (pour une image de taille 128×128 par exemple) ? (7 points).
3. Quel est le type de convolution spatiale équivalente doit on s'attendre lorsqu'on fait du filtrage fréquentiel ; celui dont les bords de l'image sont remplies de valeurs nulles, celui ou l'image est considéré comme toroïdale ou celui ou les bords de l'image ne sont pas prises en compte ? Justifier votre réponse (3 points).
4. Donner la principale limitation de la Transformée de Hough pour la détection de formes complexes qui pourrait être paramétrisée (3 points).
5. Comment feriez vous une spécification d'histogramme d'une image couleur ? (3 points).
6. Dans le cadre d'une recherche d'ellipse dans une image $N \times N$ grâce à la transformée de Hough, quelle est la taille de la matrice mémoire d'acumulation nécessaire ? (2 points). Dans le cadre d'une recherche de droite dans une image $N \times N$ (comportant 10% de points de contours préalablement détectés) par la Transformée de Hough ; quelle est le nombre de fois que l'on doit évaluer l'équation de l'ellipse ? (3 points).

VI. Compression d'image (10 pts)

Quel est le nombre minimum de bits (Borne supérieure théorique) avec lequel on peut compresser cette image de taille 8×8 pixels (et comportant trois niveaux de gris différents) sans aucune perte ?

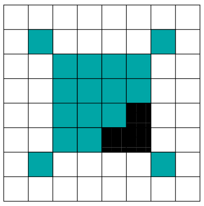

FIG. 2:

VI. Segmentation (25 pts)

Imaginez que vous soyez traiteur d'image pour la météo et que vous disposiez d'une grande banque d'images météorologiques du continent nord américain (par exemple la configuration météorologique heure par heure et pour les vingt dernières années du continent nord-américain) et que ces images soient toutes prises selon la même disposition et le même angle de vue comme celle donnée à la Figure 3a.

1. Comment feriez vous pour obtenir automatiquement, dans un premier temps, l'image donnée à la figure 3b (sachant que parmi la banque d'images que vous disposez vous n'avez aucune image du continent nord-américain dans laquelle il n'y a pas de nuage !) ? Donnez au moins une technique (5 points).

(a) **(b)** **(c)**

FIG. 3: *Images météo*

2. Supposons que vous ayez obtenu l'image donnée à la Figure 3b, comment feriez vous pour obtenir à partir des images 3a et 3b, l'image 3c qui représente seulement les nuages ? (i.e., une image segmentée de nuage) (5 points).
3. Imaginons maintenant que vous ayez obtenu, pour chacune des images de votre banque d'images, une image segmentée ou seule les nuages sont représentés. Vous disposez donc de la configuration météorologique des nuages, heure par heure, et pour les vingt dernières années du continent nord-américain. Imaginez maintenant que l'on vous donne l'image météo de la journée et de l'heure en cours et que vous deviez réfléchir à une procédure qui permettent automatiquement de trouver l'image de configuration météorologique qui ressemble le plus à celle ci dans votre base de donnée. Quelle serait une technique simple ? Justifier votre réponse (5 points).
4. On considère maintenant une technique locale qui consiste à diviser chacune des images segmentée de nuage en petites imagettes comme celle donnée à la figure 4d et de calculer des attributs sur chacune des petites fenêtres. l'ensemble de ces attributs peuvent être utilisés dans une approche de classification pour mesurer la ressemblance d'une configuration de nuage entre deux nuages. Quel type d'attributs pourriez vous prendre ? (5 points).
5. Imaginez un système simple et automatique de prédiction météo basé sur ces prétraitements et cette mesure de ressemblance (5 points) [1].

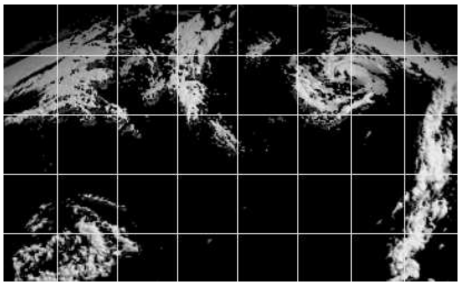

FIG. 4:

---

[1]**Remarque :** Ces idées de prétraitements et cette application est inspirée de l'article *Content-based Video Query and Spatio-temporal pattern Analysis on Fixed-view Motion Imagery, 5th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, SCI 2001, Concepts and Applications of Systemics and Informatics, Orlando, Floride, USA, July 2001.*