DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *09/12/2002*

I	Transformée de Fourier (16 pts).
II	TFD & FFT (15 pts).
III	Filtrage (10 pts).
IV	Segmentation contour (10 pts).
V	Transformée de Hough (15 pts).
VI	Misc. (35 pts).
Total	101 points.

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (16 pts)

1. Trouver la Transformée de Fourier de la fonction Gaussienne, d'écart type σ, $\mathcal{N}_\sigma(x)$:

$$\mathcal{N}_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)$$

en vous servant de l'invariance par Transformée de Fourier de la fonction $\exp(-\pi x^2)$ et des propriétés de cette Transformée (4 points).

2. Trouver la Transformée de Fourier de $\big(\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x)\big)$ où "$*$" désigne l'opérateur de convolution (4 points).
3. Trouver l'expression analytique de la fonction $\big(\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x)\big)$ (dans le domaine spatial). En déduire quelle est le filtrage spatial équivalent à deux filtrage spatial Gaussiens d'écart type $\sigma = 1$ (4 points).
4. Soit la fonction $\mathcal{W}(x)$, telle que $\mathcal{F}(\mathcal{W}(x)) = 1/(2\pi j\nu)$. En passant dans le domaine fréquentielle pour se simplifier la tâche, calculer :

$$\big(\mathcal{N}_\sigma(x) * \mathcal{U}(x)\big)'$$

où "$'$" désigne l'opérateur de dérivation (4 points).

Réponse

1.

Nous avons $\mathcal{F}[\exp(-\pi x^2)] = \exp(-\pi\nu^2)$ (Cf. cours). En utilisant la propriété de dilatation de la TF, i.e., $\mathcal{F}[f(ax)] = (1/|a|)F(\nu/a)$ avec $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ et $a = (1/\sigma\sqrt{2\pi})$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\right] &= \sigma\sqrt{2\pi}\,\exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2) \\ \text{et donc,}\quad \mathcal{F}\left[\mathcal{N}_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\right] &= \exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2) \quad < \mathbf{4}\text{ pts} > \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x)] &= \exp(-2\pi^2\sigma_1^2\nu^2)\,\exp(-2\pi^2\sigma_2^2\nu^2) \\ &= \exp\big(-2\pi^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,\nu^2\big) \quad < \mathbf{4}\text{ pts} > \end{aligned}$$

3.

Par TF inverse de la dernière expression, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma_1}(x) * \mathcal{N}_{\sigma_2}(x) &= \mathcal{F}^{-1}\big[\exp\big(-2\pi^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,\nu^2\big)\big] \\ &= \mathcal{N}_{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}(x) \end{aligned}$$

Le filtrage équivalent à deux filtrage Gaussiens d'écart type $\sigma = 1$ est un filtrage Gaussiens d'écart type $\sigma = \sqrt{2}$. <**4 pts**>

4.

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\big[\big(\mathcal{N}_\sigma(x) * \mathcal{U}(x)\big)'\big] &= 2\pi j\nu\,\big[\exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2)\,\frac{1}{2\pi j\nu}\big] = \exp(-2\pi^2\sigma^2\nu^2) = \mathcal{F}\big[\mathcal{N}_\sigma(x)\big] \quad < \mathbf{2}\text{ pts} > \\ \text{et donc,}\quad \big(\mathcal{N}_\sigma(x) * \mathcal{U}(x)\big)' &= \mathcal{N}_\sigma(x) \quad < \mathbf{2}\text{ pts} > \end{aligned}$$

II. TFD & FFT (15 pts).

1. Pour une image de taille $N \times N$, indiquer le nombre d'opérations nécessaires (complexité) pour (5 points) :
   (a) Faire la Transformée de Fourier Discrète (TFD).
   (b) Faire la TFD en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de TFD 1D).
   (c) Faire une Fast Fourier Transform (FFT) en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de FFT 1D).
   (d) Faire une FFT 2D.
2. Calculer par TFD les quatre coefficients spectrals du vecteur de 4 échantillons suivant :

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

   Indiquer aussi quel interval de fréquence sépare le premier du deuxième échantillon (5 points).
3. Calculer en utilisant le principe de la FFT les deux premiers échantillons spectral de ce même vecteur (5 points).

Réponse

1.

1. TF_{2D} d'une image $N \times N \quad = N^4$. <**1.25 pt**>
2. TF_{2D} d'une image $N \times N \quad = 2N \ \text{TF}_{\text{1D}} = 2N(N^2) = 2N^3$. <**1.25 pt**>
3. FFT_{2D} d'une image $N \times N \quad = 2N \ \text{FFT}_{\text{1D}} \ 2N(N \log N) = 2N^2 \log N$. <**1.25 pt**>
4. FFT_{2D} d'une image $N \times N \quad = N^2 \log N$. <**1.25 pt**>

2.

$$F(0) = 1 \quad < \mathbf{1}\ \text{pt} >$$

$$F(1) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} \exp(-\pi j x/2) = \frac{1}{4}\Big(\exp(0) + \exp(-\pi j/2) + \exp(-\pi j) + \exp(-3\pi j/2)\Big) = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0,$$

< **1** pt >

$$F(2) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} \exp(-\pi j x) = \frac{1}{4}\Big(\exp(0) + \exp(-\pi j) + \exp(-2\pi j) + \exp(-3\pi j)\Big) = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0,$$

< **1** pt >

$$F(3) = \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} \exp(-3\pi j x/3) = \frac{1}{4}\Big(\exp(0) + \exp(-3\pi j/2) + \exp(-3\pi j) + \exp(-9\pi j/2)\Big) = \frac{1}{4}(1 - j - 1 + j) = 0.$$

< **1** pt >

L'interval de fréquence séparant le premier du deuxième échantillon est la resolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/T$ avec T la plus grande période existant dans le signal (i.e., la longueur même du signal, donc $T = 4\Delta T$), avec ΔT, la résolution spatiale ; ($\Delta T = 1$ (1 pixel)) et de ce fait $\Delta\nu = 1/4$. <**1 pt**>

3.

<**1 pt**>

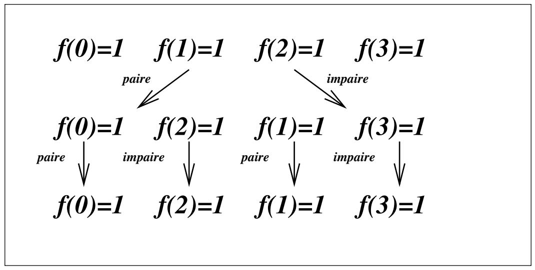


FIG. 1 –

On doit calculer $F_4(0)$ et $F_4(1)$.

$$
\begin{aligned}
F_4(0) &= \frac{1}{2}\Big[F_2^{\text{paire}}(0) + F_2^{\text{impaire}}(0)\Big],\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\big[F_1^{\text{paire}} + F_1^{\text{impaire}}(0)\big] + \frac{1}{2}\big[\Big[F_1^{\text{paire}}(0) + F_1^{\text{impaire}}(0)\big]\Big],\\
&= \frac{1}{4}\Big[1+1+1+1\Big] = 1.
\end{aligned}
$$

$<$ **2**pts $>$

$$
\begin{aligned}
F_4(1) &= \frac{1}{2}\Big[F_2^{\text{paire}}(1) - jF_2^{\text{impaire}}(1)\Big],\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\big[, F_1^{\text{paire}}(1) - F_1^{\text{impaire}}(1)\big] - (j/2)\big[F_1^{\text{paire}}(1) + F_1^{\text{impaire}}(1)\big]\Big],\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\big[1-1\big] - (j/2)\big[1-1\big]\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

$<$ **2**pts $>$

III. Filtrage (10 pts).

On rappelle que le filtrage de Marr d'une image I consiste en deux étapes,

1. Un filtrage Gaussien réalisé sur I.
2. Le calcul du laplacien de l'image filtrée obtenu à l'étape 1.

Donner l'expression analytique de ce filtre dans le domaine spatial (5 points) et dans le domaine spectral[1] (5 points). On ne considerera qu'une seule et unique dimension pour simplifier le problème et on s'aidera pour trouver l'expression analytique de ce filtre dans le domaine fréquentiel de la TF d'une gaussienne et des propriété de dérivation de la TF.

Réponse

1.

Les étapes 1. et 2. reviennent à filtrer l'image I par le laplacien d'une Gaussienne. En ne considérant qu'une seule et unique dimension, cela revient à filtrer l'image I par une PSF qui serait analytiquement la

[1] On rappelle qu'une distribution Gaussienne s'écrit,

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

dérivée seconde d'une Gaussienne. Pour obtenir l' expressions analytique de ce filtre dans l' espace physique, considérons la définition d'une fonction Gaussienne :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

Sa dérivée par rapport à x est :

$$G'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad < \mathbf{2.5}\text{pts} >$$

et sa dérivée seconde (ou son laplacien en x),

$$G''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad < \mathbf{2.5}\text{pts} >$$

ce qui nous donne l'expression analytique de ce filtre dans l'espace spatial suivant la direction x.

Cherchons maintenant son expression analytique dans le domaine de Fourier. Utilisons la propriété de dérivation de la TF pour établir que $\mathcal{F}(G(x)'') = (2\pi j\nu)^2 \mathcal{F}(G(x)) = -4\pi^2\nu^2 \mathcal{F}(G(x))$ et le fait, déjà établi en cours que $\mathcal{F}(G(x)) = \exp(-2\pi^2 u^2 \sigma^2)$. On en déduit l'expression analytique du filtre dans le domaine fréquentiel :

$$\mathcal{F}(G(x)'') = -4\pi^2\nu^2 \exp(-2\pi^2 u^2 \sigma^2). \quad < \mathbf{5pts} >$$

IV. Segmentation contour (10 pts).
Répondre aux questions suivantes

1. Quel est le nombre de seuils dans la méthode de Canny (3 points) ?
2. Quel est le but de la suppression des non-maximums dans la méthode de Canny (3 points) ?
3. Quel est le but du seuillage par hysteresis dans la méthode de Canny (4 points) ?

Réponse

1. En fait, il y en a trois ; le σ du filtrage Gaussien <**1 pt**>, et les deux seuils nécessaires au seuillage par hysteresis. <**2 pts**>

2. Le but de cette méthode est de localiser plus précisement le point de contour en réalisant une sorte d'érosion des artefacts de points de contour dans son voisinage. Idéalement un point de contour est unique. <**3 pts**>

3. Le but de cette méthode est de réduire la probabilité de faux contour et de connecter les points de contour (et les portions de contour) le long d'un contour même si ces derniers sont associés, quelquefois du fait du bruit ou de l'occlusion, à une faible magnitude (ou amplitude de gradient) (mais néanmoins supérieur au seuil bas de l'hysteresis). <**4 pts**>

V. Transformée de Hough (15 pts).
Répondre aux questions suivantes ;

1. Donner l'organigramme de l'algorithme permettant de détecter, par la transformée de Hough, les centres d'objets circulaires (quelque soit le rayon de ces objets circulaires !) dans une image de contour $N \times N$ préalablement détecté (donc une image binaire de contour). Donner dans cet organigramme l'équation qui est évaluée pour toute les cellules de la matrice d'accumulation (10 points).

2. Serait il possible d'utiliser dans la méthode de Hough, non plus l'image de contour binaire mais l'image du module du gradient (donc une image discrétisé de module de gradient) pour remplir la matrice d'accumulation. Expliquer comment. Donner les avantages et les inconvenients de cette technique par rapport à celle qui utilise une image binaire de contour (5 points).

Réponse

1.

Initialisation à zéro d'une matrice 2 D $N \times N$ (matrice d'accumulation avec en abscisse la cordonnée x et en ordonnée la coordonnée y du centre d'un objet circulaire recherché).

1. Pour tout les points (x_i, y_j) de contour de l'image ;
2. Pour tout les points (x_s, y_s) de la matrice d'accumulation ;
3. Pour R variant de 0 à N par pas discret ;
4. Evaluer $(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2 = R^2$ (Eq. (1))
5. Si (1) est vraie, incrémenter de 1 la cellule (x_s, y_s)

Ensuite on doit détecter les maximas de cette matrice d'accumulation, ces maximas nous donne la position du centre des objets circulaires présent dans l'image de contour mais pas le rayon de ces objets circulaires. <**10 pts**>

2.

Il suffit d'incrémenter la cellule (x_s, y_s) si Eq. (1) est vérifié, non plus de 1 mais du module de gradient associé à ce point de contour <**2 pts**>. Les inconvénients de cette méthode est le temps de calcul qui est plus important (l'étape 1. est remplacé par tous les points de l'image). <**1.5 pts**>

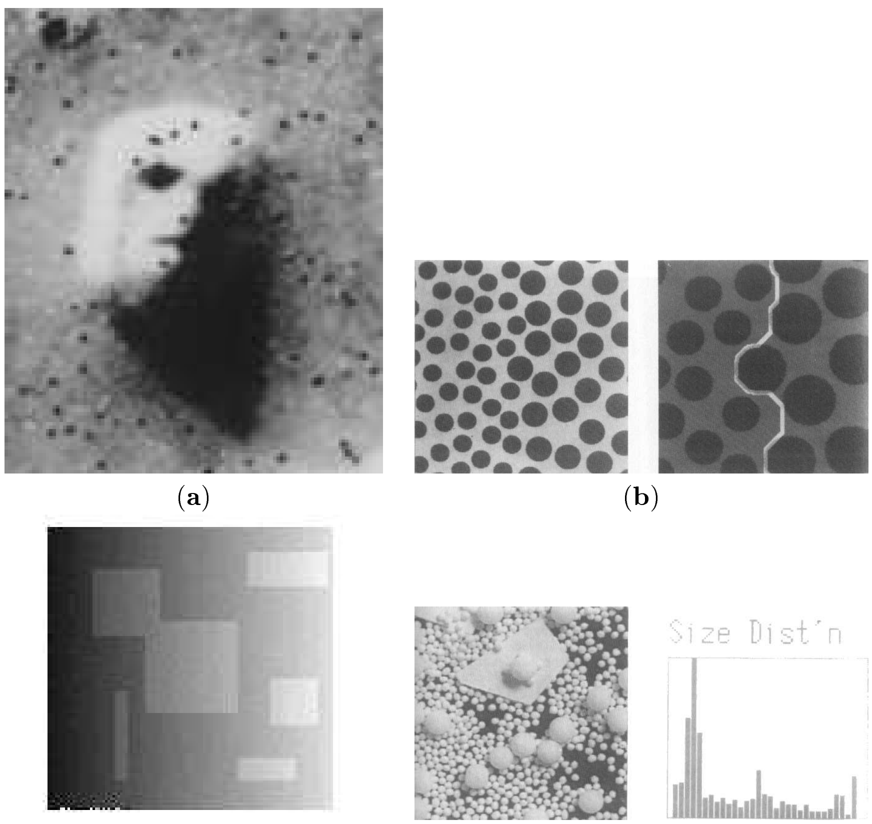
Les avantages de cette méthode est la robustesse. Si une portion de contour d'un objet (que l'on recherche) n'a pas été detectée par l' étape préliminaire de détection de contour (par Canny par exemple) à cause d'un faible gradient, sa contribution par la méthode 2 (pour l'estimation de la fonction d'accumulation) ne sera pas completement nulle. <**1.5 pts**>

VI. Misc (35 pts)

Répondre brièvement (2 à 6 phrases) aux questions suivantes :

1. Que proposez vous, comme traitement simple, pour améliorer la visibilité des détails de l'image (**a**) (image sattelitaire de la planête Mars) dans ce qui semble être l'intérieur des yeux ou les globes occulaires de ce visage ? Justifier votre réponse (4 points).
2. Que proposez vous pour segmenter l'image (**b**) (gauche) suivant deuz zones de région homogène (région associée aux petits cercles et région associée aux grands cercles comme l'image de droite) ? Donnez deux méthodes et justifier votre réponse (6 points).
3. Que proposez vous comme prétraitement pour pouvoir segmenter l' image (**c**) avec un seuillage optimal ? Justifier votre réponse (3 points).
4. Rappeler l'expression d'un rehauseur de contour à partir de l'image original et (1) à partir d'un filtre passe bas ou passe haut, (2) à partir d'opérateurs morphologiques (6 points).
5. Discuter de ce que pourrait donner une classification de texture (Cf. TP no6) si on combinait le vecteur de caractéristique des attributs de textures avec deux attributs supplémentaires correspondant à la position spatiale (x, y) des pixels à classer. Discuter de ce que cela pourrait correspondre comme information à priori donnée implicitement au processus de clustering (5 points).
6. Que proposez vous comme méthode (autre que celle présentez dans les notes de cours) permettant de faire de la granulométrie à partir de l'image (**d**) (3 points) ?

7. Soit x une imagette de dimension 4 lignes, 4 colonnes, prenant deux niveaux de gris possible (blanc et noir) pour chaque pixel, auquelle on associe le vecteur de v.a X. On considere que X est un champ Markovien ($P_X(x) = \frac{1}{Z}\exp\big(-\sum_{c\in C} V_c(x)\big)$) relatif à un voisinage du 2nd ordre en ne considérant que les cliques binaires. On considere pour ce modèle des fonctions potentiels de la forme ; $V_c(x) = \beta_{s,t}\big(1-\delta(x_s - x_t)\big)$.
   (a) Définisser ce que l'on entend par voisinage du second ordre ainsi que les différentes cliques utilisées (2 points).
   (b) Représenter selon ce modèle la configuration (i.e., l'imagette) x la plus probable, et la moins probable (3 points).
   (c) Donner pour ces deux configurations, la probabilité associée (en fonction de Z, la constante de normalisation) de ces deux configurations (3 points).



(a) (b) (c) (d)

FIG. 2 –

Réponse

1. Par exemple un traitement ponctuel comme une transformation linéaire par morceau avec une pente très prononcée dans les zones de niveaux de gris très sombres. Cela permetrait d'améliorer la visibilité des détails dans les zones de niveaux de gris très sombres et de savoir si il existe des détails dans (ce qui semble être) les globes occulaires de ce visage (pour affirmer ou infirmer l'hypothèse de savoir si il s'agit réellement d'un visage). On pourrait utiliser aussi les fausses couleurs <**4 pts**>. (Réponses moins bonnes, (3pts/4) : égalisation d'histogramme ou filtage homomorphique).

2. (a) Morphologie mathématique : ouverture par un élément structurant permettant d'éliminer les petits cercles et fermeture avec un élément structurant permettant de fusionner les gros cercles entre eux. L'image obtenue est de deux niveaux de gris représentant les deux classes de cette segmentation recherchée. $<$**3 pts**$>$

   (b) Utiliser une transformée de Hough sur le résultat d'un détecteur de contour sur cette image et ensuite rechercher dans la matrice d'accumulation de dimension trois ((x, y) centre du cercle et r rayon des cercles) les deux matrices $2D$ où il y a le plus de pics d'accumulation. La position de ces pics dans ces deux matrices nous permettrait de délimitter les deux régions de cette image. $<$**3 pts**$>$ (on pourrait utiliser une segmentation texturale).

3. Un filtrage homomorphique permettrait de corriger ou d'atténuer le défaut d'illumination existant dans cette image et permettrait de pouvoir utiliser efficacement ensuite une technique de seuillage optimal. $<$**3 pts**$>$. (Réponses moins bonnes : utilisation d'une opération ponctuelles inverse utilisant les niveaux de gris de la première ligne de l'image).

4. (a) À partir d'un filtre passe bas ou passe haut :
   Image rehaussée = (K-1) (image originale) - Filtre Passe Bas (image original)

   Image rehaussée = (K-1) (image originale) + Filtre Passe Haut (image original) $<$**3 pts**$>$.

   (b) À partir d'opérateurs morphologiques :
   Un détecteur de contour (filtre passe haut) par opérateur morphologique s'écrit, si on appelle I l'image original, et B l'opérateur morphologique : $(I \boxplus B) - (I \boxminus B)$. Le rehausseur d'image s'écrit donc : Image rehaussée = (K-1) (I) + $(I \boxplus B) - (I \boxminus B)$. $<$**3 pts**$>$

5. Cela serait interessant, permettrait d'améliorer les résulats de la classification en admettant que les formes recherché dans l'image segmentée soient relativement compactes. L'information a priori donnée implicitement au processus de clustering est la suivante : les pixels voisins ont plus de chance d'appartenir à la même classe. $<$**5pts**$>$

6. Par exemple avec l'algorithme HIT or MISS utilisant les opérateurs morphologiques. $<$**3 pts**$>$

7. (a) Les 8 voisins d'un site. Cliques horizontales, verticales, diagonales droites et diagonales gauches. $<$**2pts**$>$

   (b) L'imagette la plus probable selon ce modèle est l'imagette toute blanche ou toute noire. La plus improbable est l'imagette représentant un damier. $<$**3 pts**$>$

   (c) P_X(imagette de couleure uniforme) $= \frac{1}{Z} \exp(0) = \frac{1}{Z}$.
   P_X(imagette en damier) $= \frac{1}{Z} \exp(-(48))$.
   $<$**3 pts**$>$