DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *15/12/2003*

I	Transformée de Fourier (25 pts).
II	TFD-DCT-FFT -Compression (35 pts).
III	Histogramme & opération ponctuelle (5 pts).
IV	Filtrage (20 pts).
V	Restauration (10 pts).
VI	Markov (15 pts).
Total	110 points.

Tous documents, calculatrices et calculateurs personnels autorisés

I. Transformée de Fourier (25 pts)

1. Soit la fonction $f(x)$, définie par,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la transformée de Fourier de f(x) et mettre le résultat de cette transformée de façon à faire apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de $F(\nu)$. <**5 pts**>

2. Trouver le module et la phase (ou l'argument) de $F(\nu)$ (i.e., $|F(\nu)|$ et $\Phi(\nu) = \arg(F(\nu))$ et tracer grossièrement l'allure de $|F(\nu)|$. <**5 pts**>
3. Si on considère que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1 % de sa valeur max, avec quelle période d'échantillonnage T_e maximale (approximatif) peut on échantillonner $f(x)$? <**4 pts**>
4. Que peut on dire des propriété de la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \exp(-a|x|)$ (sans la calculer). Calculer ensuite cette TF. Aurait on obtenu la même chose si on avait calculer $\mathcal{F}^{-1}[f(x)]$ au lieu de $\mathcal{F}[f(x)]$. Expliquer pourquoi. <**7 pts**>
5. En utilisant une propriété de la TF et en utilisant une propriété liée à la symétrie de $\mathcal{F}[f(x)]$ calculé à la question précédente, en déduire la Transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}$. <**4 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$ En utilisant directement la définition de la TF,

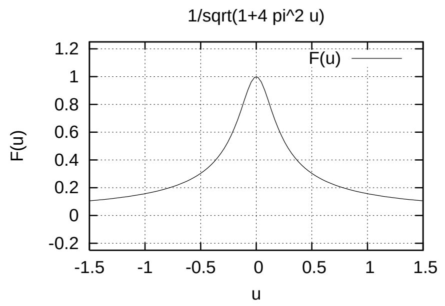
$$\begin{aligned} F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] &= \int_0^\infty f(x) \exp(-2\pi j\nu x)\, dx = \frac{-1}{1+2\pi j\nu} \Big[\exp\big(-x(1+2\pi j\nu)\big)\Big]_0^\infty, \\ &= \frac{1}{1+2\pi j\nu}. \qquad < \mathbf{3}\text{pts} > \end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de cette expression par $(1 - 2\pi j\nu)$, on isole la partie réelle et la partie imaginaire de $F(\nu)$, et on obtient,

$$F(\nu) \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}}_{\mathcal{R}(F(\nu))} + j \underbrace{\frac{-2\pi\nu}{1+4\pi^2\nu^2}}_{\mathcal{I}m(F(\nu))} \qquad < \mathbf{2}\text{pts} >.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ On obtient le module et l'argument à partir du résultat précédent,

$$\begin{aligned} |F(\nu)| &= \sqrt{(\mathcal{R}(F(\nu))^2 + (\mathcal{I}m(F(\nu))^2} = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2\nu^2}}, \qquad < \mathbf{1}\text{pt} > \\ \text{Arg}(F(\nu)) &= \arctan(-2\pi\nu) \quad < \mathbf{2}\text{pts} >. \end{aligned}$$



<**2 pts**>

$\boxed{\textbf{3.}}$ $|F(\nu)| = 0.01$ pour une fréquence de demi-échantillonage de $\nu \approx 16$ ou une période d'échantillonage de $Te = 1/32$ <**4 pts**>.

$\boxed{\textbf{4.}}$ La fonction est réelle et paire, donc sa transformée sera réelle pure et paire. <**2 pts**>

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\exp(-a|x|)] &= \int_{-\infty}^{0} \exp\big(x(a-2\pi j\nu)\big)\,dx + \int_{0}^{\infty} \exp\big(x(a+2\pi j\nu)\big)\,dx = \frac{1}{a-2\pi j\nu} + \frac{1}{a+2\pi j\nu}, \\
&= \frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}. \quad < \mathbf{3}\text{pts} >
\end{aligned}$$

On aurait obtenu la même chose en calculant la TF inverse car lorsqu'une fonction est paire, on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{5.}}$ La fonction est paire donc calculer sa TF est équivalent à calculer sa TF inverse. La question précédente nous a montré que $\mathcal{F}^{-1}(\frac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}) = \exp(-a|x|)$ qui est vrai quelque soit a, même pour $a = 1$ et donc,

$$\mathcal{F}\Big(\frac{2}{1+4\pi^2x^2}\Big) = \exp(-|\nu|). \quad < \mathbf{4}\text{pts} >$$

II. TFD-DCT-FFT -Compression (35 pts).

1. **TFD**
   (a) Pour une image de taille $N \times N$, indiquer le nombre d'opérations nécessaires (complexité) pour Faire la TFD en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée (i.e., en utilisant une série de TFD 1D). <**1.5 pt**>
   (b) Quelquefois en traitement d'image il est nécessaire de faire une transformée de Fourier d'un volume de donnée $N \times N \times N$ (par exemple pour une séquence d'image ou le temps est vu comme une dimension supplémentaire ou pour une image 3D). Indiquer le nombre d'opérations nécessaires (complexité) pour Faire la TFD de ce volume en appliquant directement la formule et ensuite en utilisant la propriété de séparabilité de cette transformée et en utilisant une série de TFD 1D. Même question mais si cette fois on disposait d'une FFT 2D et d'une FFT 1D pour faire cette TFD 3D. <**6 pts**>
2. **TCD versus TFD**
   (a) Soit le signal discret $f(x) = [1, 2, 3, 4]$ (i.e., $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3; f(3) = 4;$). Trouver et représenter sur un graphique $|F(0)|$, $|F(1)|$, $|F(2)|$ et $|F(3)|$ le module des 4 coefficients spectral de $f(x)$ calculé par une TFD. <**6 pts**>
   (b) Comment doit on réellement considérer le signal spatial $f(x)$ si on utilise sur celui-ci l'outil discret de la TF, cad la TFD et non la Transformée de Fourier continue ? Représenter $f(x)$ tel que ce signal est réellement vu par la TFD. <**3 pts**>
   (c) On rappelle maintenant la définition de la Transformée de cosinus discrète (TCD) :

$$C(u) = k(u) \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos\Big(\frac{(2n+1)u\pi}{2N}\Big),$$

   avec $k(u) = \sqrt{1/N}$ si $u = 0$ et $k(u) = \sqrt{2/N}$ sinon. Comment devrait on réellement considérer le signal spatial $f(x)$ si on utilisait sur celui-ci la TCD ? Représenter $f(x)$ tel que ce signal est réellement vu par la TCD. <**3 pts**>

(d) Trouver et représenter sur un graphique $|C(0)|$, $|C(1)|$, $|C(2)|$ et $|C(3)|$ le module des 4 coefficients spectral de $f(x)$ calculé par une TCD. <**6 pts**>

(e) Quelle sont des deux signaux (i.e., $f(x)$ vu par une TFD ou $f(x)$ vu par une TCD) celui qui comporte le moins de hautes fréquences et déduire celui qui est le plus intéressant pour le problème de la compression. <**3 pts**>

(f) Utiliser les résultats précédents pour en déduire un algorithme qui calcule une TCD sur un signal de longueur N échantillons utilisant une TFD sur un signal de longueur 2N échantillons. Dans quel cas pourra on même utiliser une FFT au lieu d'une TCD ? <**2.5 pts**>

3. **FFT**

(a) Indiquez au moins deux raisons qui explique que l'on utilise une FFT plutôt qu'une TCD qu'en on veut connaître le spectre d'une image. <**2 pts**>

(b) Expliquer dans quel cas les problèmes de discontinuité créé par la TCD ou FFT (périodicité de l'image) ne constitue pas un problème comparativement a la méthode de compression JPEG. <**2 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1a}}$

TF_{2D} d'une image $(N \times N)$ $\quad \triangleright\, 2N\ \text{TF}_{\text{1D}} = 2N(N^2) = 2N^3$. <**1.5 pt**>

$\boxed{\textbf{1b}}$

TF_{3D} d'un volume $(N \times N \times N)$ $\quad \triangleright\, N^2 \times N^2 \times N^2 = N^6$. <**1.5 pt**>.

En considérant maintenant la propriété de séparabilité de la TFD et en faisant successivement des séries de TFD_{1D} sur la longueur, largeur et hauteur de ce volume, on obtient,

$$\text{TFD}_{\text{3D}} \text{ d'un volume } (N \times N \times N) \quad = \underbrace{N^2\text{TFD}_{\text{1D}}}_{\text{en x}} + \underbrace{N^2\text{TFD}_{\text{1D}}}_{\text{en y}} + \underbrace{N^2\text{TFD}_{\text{1D}}}_{\text{en z}} = 3N^4. \quad <\textbf{3 pts}>$$

Si on disposait d'une FFT 2D et d'une FFT 1D, on aurait besoin de $N^3 \log N^2 + N^3 \log N$ opérations. <**1.5 pts**>

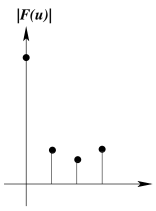
$\boxed{\textbf{2a}}$

Les 4 composantes fréquentiel obtenu par la TFD de $f(x)$ sont,

$$\begin{aligned}
F(0) &= (1/4)(1+2+3+4) = 5/2, \\
F(1) &= (1/4)(1+\exp(-j\pi/2)+3\exp(-j\pi)+4\exp(-3j\pi/2)) = (1/4)(-2+2j), \\
F(2) &= (1/4)(1+2\exp(-j\pi)+3\exp(-j2\pi)+4\exp(-3j\pi)) = -1/2, \\
F(3) &= (1/4)(1+2\exp(-j3\pi/2)+3\exp(-j3\pi)+4\exp(-j9\pi/2)) = (1/4)(-2-2j).
\end{aligned}$$

< **4pts** >

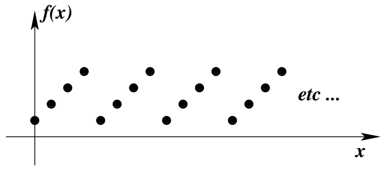
En module on a $|F(0)| = 5/2$, $|F(1)| = \sqrt{8}/4$, $|F(2)| = 1/2$, $|F(3)| = \sqrt{8}/4$. <**1 pt**> et on obtient le graphique suivant,



<**1 pt**>

$\boxed{\textbf{2b}}$

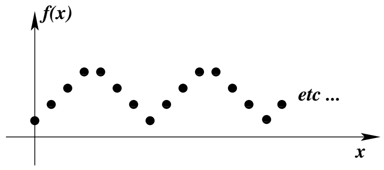
Le signal aura forcement un spectre discret dans le domaine fréquentiel puisqu'on utilise la TFD. Donc dans le domaine spatial, ce signal sera vu comme une séquence périodique (cf. Figure).



<**3 pts**>

2c

Le signal $f(x)$ serait vu avec une symétrie miroir (cf. Figure).



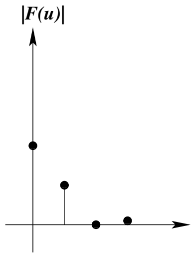
<**3 pts**>

2d

Les 4 composantes fréquentielles obtenues par la TCD de $f(x)$ sont,

$$\begin{aligned}
C(0) &= (1/2)(1+2+3+4) = 5, \\
C(1) &= (1/\sqrt{(2)})\big]\cos(\pi/8) + 2\cos(3\pi/8) + 3\cos(5\pi/8) + 4\cos(7\pi/8)\big] \approx -2.23, \\
C(2) &= (1/\sqrt{(2)})\big]\cos(\pi/4) + 2\cos(3\pi/4) + 3\cos(5\pi/4) + 4\cos(7\pi/4)\big] = 0, \\
C(3) &= (1/\sqrt{(2)})\big]\cos(3\pi/8) + 2\cos(9\pi/8) + 3\cos(15\pi/8) + 4\cos(21\pi/8)\big] \approx -0.16,
\end{aligned}$$

< **4pts** >



<**2 pts**>

2e

C'est le signal vu par la TCD qui comporte le moins de hautes fréquences (la discontinuité créé par la périodicité du signal $f(x)$ crée des hautes fréquences). C'est donc la TCD qui est le plus utile pour le problème de la compression des signaux et des images ; Le nombre d'échantillons spectraux envoyés pour représenter le signal sera donc moins important avec la TCD et le taux de compression sera ainsi plus élevé. <**3 pts**>

2f

L'astuce pour calculer une TCD sur un signal de longueur N consiste donc à le rendre symétrique miroir puis a calculer sur le signal résultant (de longueur 2N) une TFD classique. Si la longueur de l'image rendue symétrique miroir est une puissance de 2 on pourra même utiliser une FFT. <**2.5 pts**>

3a La FFT nous permet de calculer rapidement le spectre (plus rapidement qu'une TCD) et nous permet d'avoir l'information de la phase du spectre. <**2 pts**>

3b 2 reponses possibles :

1- ans le cas ou le bord de l'imagette sont identiques ou l'imagette est pair
ou
2- Le problème de discontinuité créé par la TFD ou FFT est d'autant plus visible que l'image est petite. Pour une image de taille 8×8, la moitié des pixels sont concernés par ces discontinuités $((8 \times 4)/8 \times 8$, dans le cas d'une image de tailles 128×128, seulement 3 % $((128 \times 4)/(128 \times 128))$ des pixels sont affectés donc problème relativement négligeable. <**2 pts**>

III. Histogramme & opération ponctuelle (5 pts).

1. Donner une façon de calculer la moyenne, μ, et la variance σ^2 (i.e., le carré de l'écart type)) des variations des niveau de gris dans une image en utilisant seulement $h(1), h(2), \ldots, h(255)$, les valeurs de l'histogramme normalisé de cette image. <**5 pts**>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

L'histogramme peut être vu comme une densité de probabilité d'occurrence des niveaux de gris dans l'image. Le calcul de la moyenne et de la variance est donc immédiat et s'apparente à un moment d'ordre 1 et 2 et s'écrit,

$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum_{i=0}^{255} i h(i), \\
\sigma^2 &= \sum_{i=0}^{255} (i-\mu)^2 h(i). \quad < \mathbf{5pts} >
\end{aligned}
$$

IV. Filtrage (20 pts).

1. Trouver le but du filtre $g(x, y)$ qui consiste, sur une image que l'on notera I, en l'opération suivante ;

   FILTRE G = PASSE HAUT(I) + I

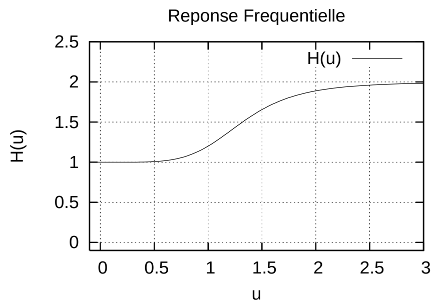
   Détailler les calculs qui vous ont amené a votre réponse et trouver grossièrement la réponse fréquentielle de ce filtre. Donner aussi le nom d'un tel filtre. <**13 pts**>
2. Trouver le masque de convolution 1 dimension suivant x (4 colonne, 1 ligne) qui réalise une dérivée troisième (i.e., si f(x,y) correspond au niveau de gris de l'image en (x, y), le masque de convolution réalisant $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}$). <**7 pts**>

$\boxed{\mathbf{1}}$ **Réponse**

Appelons $h(x, y$, le filtre passe haut, l'opération FILTRE G = PASSE HAUT(I) + I s'écrit mathématiquement,

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y) * h(x,y) + f(x,y), \\
&= f(x,y) * h(x,y) + f(x,y) * \delta(x,y), \\
&= f(x,y) * \big[h(x,y) + \delta(x,y)\big], \\
&\upharpoonleft\downharpoonright \mathcal{F} \\
G(u,\nu) &= F(u,\nu) \times [H(u,\nu) + 1]. \quad < \mathbf{7pts} >
\end{aligned}
$$

$H(u,\nu) + 1$ est le filtre fréquentiel qui sera équivalent à l'opération FILTRE G $=$ PASSE HAUT(I) $+$ I. Ce filtre laissera passer les basses fréquences et amplifiera les hautes fréquences, il s'agit d'un réhausseur de contours dont une coupe une dimension à l'allure de la courbe du graphe suivant, <**4 pts**>



<**2 pts**>

$\boxed{\mathbf{2}}$ Par convolution répétée (d'un masque de convolution associé à une dérivée première et d'un masque de convolution associé à une dérivée seconde), on peut trouver le résultat immédiatement.

$$\boxed{-1}\boxed{1} * \boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1} = \boxed{-1}\boxed{3}\boxed{-3}\boxed{1}$$

La réponse, $\boxed{1}\boxed{-3}\boxed{3}\boxed{-1}$ est bonne aussi (en considèrant cette fois des masques du type $\boxed{1}\boxed{-1}$
<**7 pts**>

V. Restauration (10 pts).

Dans le cas de l'algorithme de Tichonov-Miller, l'image restaurée que l'on recherche ($\hat{f}(x,y)$) est vue comme le minimum de la fonction suivante,

$$\|g(x,y) - h(x,y) * \hat{f}(x,y)\|^2 + \alpha \|c(x,y) * \hat{f}(x,y)\|^2,$$

où $g(x,y)$ désigne l'image floue et bruitée, $h(x,y)$ le filtre passe-bas créant la dégradation de floue et $c(x,y)$ représentant l'opérateur laplacien.

1. Indiquer quelle est dans le cas d'une restauration idéale, le minimum de cette fonction d'énergie (raisonner dans le cas de la recherche d'une image $f(x,y)$ constante en niveaux de gris). <**5 pts**>
2. Indiquer à quoi sert le terme $\alpha\|c(x,y) * \hat{f}(x,y)\|^2$ dans cette fonction d'énergie. <**5 pts**>

Réponse
$\boxed{\mathbf{1}}$
Dans le cas d'une restauration idéale ou optimale, on a $\hat{f}(x,y) = f(x,y)$. De plus on a $g(x) = f(x) * h(x) + n(x,y)$ et $\alpha\|c(x,y) * \hat{f}(x,y)\|^2 = 0$ dans la cas d'une image $\hat{f}(x,y)$ uniforme en niveaux de gris.

Le minimum de la fonction est donc $\|n(x,y)\|^2$. <**5 pts**>

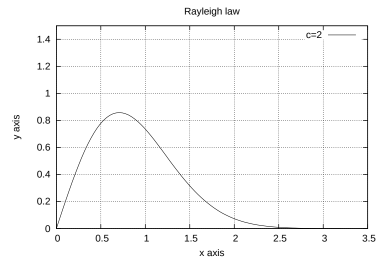
$\boxed{\textbf{2}}$
Ce terme sert à contraindre le problème, i.e., à transformer le problème mal posé en un problème bien posé (un résolution unique correspondant à la solution idéale) en éliminant les solutions aberrantes ; en l'occurrence dans cet exemple les images solutions ayant des hautes fréquences. <**5 pts**>

VI. Markov (15 pts).

La loi de Rayleigh est une loi qui intervient pour modéliser la distribution statistiques des niveaux de gris associés aux différentes classes (i.e., avec les notation du cours, $P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s)$ d'une image SONAR, echographique ou plus généralement toute image acoustique. Elle s'écrit,

$$\mathcal{R}(y;\alpha) = \frac{y}{\alpha^2}\exp\Big(-\frac{y^2}{2\alpha^2}\Big),$$

et une représentation graphique pour une valeur de α est.



1. Donner la fonction d'énergie que l'on chercherait à optimiser dans le cas d'une segmentation markovienne 2 classes. Les niveaux de gris de chacune de ces deux classes se répartissant selon deux lois de Rayleigh différentes (i.e., avec deux paramètres α différents selon la classe utilisée, i.e., α_{x_s} où x_s est la classe du site s). On utilisera le même terme d'énergie a priori utilisé en cours (pour la segmentation 2 classes gaussienne) et on supposera qu'il y pas de niveaux de gris $= 0$ dans l'image. <**15 pts**>

Réponse
$\boxed{\textbf{1}}$
On chercherait x_{map} qui minimiserait :

$$\begin{aligned} x_{map} &= \arg\min_x \Big(\sum_{s\in S}\big(-\ln P_{Y_s/X_s}(y_s/x_s)\big) + \sum_{c\in\mathcal{C}}\beta[1-\delta(x_s,x_t)]\Big) \\ &= \arg\min_x \Big(\sum_{s\in S}\big(-\frac{\ln y_s}{\alpha^2_{x_s}} + \frac{y_s^2}{2\alpha^2_{x_s}}\big) + \sum_{c\in\mathcal{C}}\beta[1-\delta(x_s,x_t)]\Big) \end{aligned}$$

<**15 pts**>