DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *06/12/2004*

I	Transformée de Fourier (31 pts).
II	DWT -Discrete Wavelet Transform (19 pts).
III	Opération Ponctuelle (20 pts).
IV	Restauration (20 pts).
V	Misc. (30 pts).
Total	120 points.

Tous documents, calculatrices et calculateurs personnels autorisés

I. Transformée de Fourier (31 pts)

1. (a) Soit la fonction $h(x)$, définie par,

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \exp(+x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Que peut on dire, sans avoir besoin de calculer quoi que ce soit, sur les propriétés de $H(\nu)$ (la transformée de Fourier de $h(x)$) ? (e.g., éventuelles symétries, fonction réelle ou complexe, etc.) <**2 pts**>

(b) Si on convoluait un signal $f(x)$ par $h(x)$, (i.e., si on considérait $h(x)$ comme étant une PSF (Point Spread Function)). Quelle opération réaliserait on ? (filtre passe-haut, passe-bande ou passe-bas). Répondre à cette question sans calculer quoi que ce soit, et préciser quelle serait l'allure grossière de $|H(\nu)|$. <**2 pts**>

(c) Calculer $H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)]$, i.e., la transformée de Fourier de $h(x)$. <**4 pts**>

(d) Trouver le module et la phase (ou l'argument) de $H(\nu)$ (i.e., $|H(\nu)|$ et $\Phi(\nu) = \arg(H(\nu))$) et tracer (grossièrement) l'allure de $|H(\nu)|$. <**3 pts**>

(e) En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier et les calculs précédents, calculer la TF de $(a/2)h(ax) \quad (a > 0)$ <**3 pts**>

(f) Exprimer la fonction Dirac $\delta(x)$ comme une limite de la fonction $(a/2)\,h(ax)$ lorsque le paramètre a tend vers quelque-chose que l'on précisera. <**2 pts**>

(g) En vous servant du résultat précédant, retrouver la TF du pic de Dirac. <**3 pts**>
Dans ce raisonnement, on retrouve la TF d'un pic de Dirac par la limite de la TF d'une fonction qui tend vers un pic de Dirac. Expliquer pourquoi le raisonnement n'aurait pas été bon si on avait considéré la fonction $k\,a\,h(ax)$ pour $k \neq 1/2$. Justifier votre explication sans vous servir du résultat de la TF de $h(ax)$. <**2 pts**>

2. Soit la fonction $\mathcal{W}(x)$, pour laquelle $\mathcal{F}(\mathcal{W}(x)) = 1/(2\pi j\nu)$ et soit $f(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle suivante :

$$-f'(x) + \int f(x)\,dx \;=\; \mathcal{W}(x) \qquad (1)$$

Que devient l'équation (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$? <**3 pts**>
En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis $f(x)$. <**4 pts**>

3. Calculer la transformée de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (2)$$

<**3 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ $h(x)$ est une fonction 1- réelle et 2- paire, sa transformée sera donc 1- à symétrie hermitienne (i.e., partie réelle paire et partie imaginaire impaire) et 2- réelle pure. En résumé, $H(\nu)$ sera une fonction réelle et paire. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ $h(x)$ est une fonction qui est toujours positive. Sa TF, comme toute PSF avec des coefficients positives aura donc l'allure d'un filtre passe-bas. $|H(\nu)|$ sera donc, de plus, une fonction décroissante et monotone pour des valeurs de ν croissante. De plus $\lim_{\nu\to\infty} |H(\nu)| = 0$. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ En utilisant directement la définition de la TF,

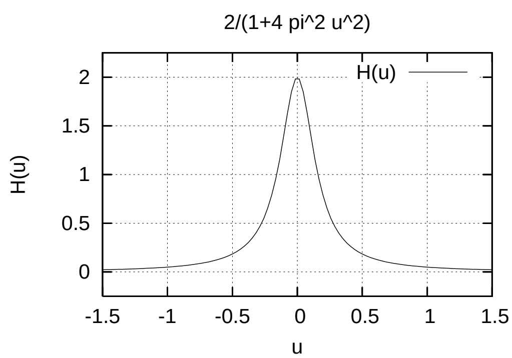
$$
\begin{aligned}
H(\nu) = \mathcal{F}[h(x)] &= \int_0^{\infty} \exp(-x)\exp(-2\pi j\nu x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} \exp(+x)\exp(-2\pi j\nu x)\,dx,\\
&= \frac{-1}{1+2\pi j\nu}\Big[\exp\big(-x(1+2\pi j\nu)\big)\Big]_0^{\infty} + \frac{1}{1-2\pi j\nu}\Big[\exp\big(+x(1-2\pi j\nu)\big)\Big]_{-\infty}^{0},\\
&= \frac{1}{1+2\pi j\nu} + \frac{1}{1-2\pi j\nu},\\
&= \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}. \quad < \mathbf{4}\ \text{pts} >
\end{aligned}
$$

La fonction trouvée est bien réelle et paire et monotone décroissante pour des valeurs de ν croissante comme intuitée précédemment.

$\boxed{\mathbf{1.(d)}}$

Le module d'une fonction réelle à valeur toujours positives (comme c'est le cas de $H(\nu)$) est la fonction elle même, et la phase d'une fonction réelle est la fonction nulle, on obtient donc immédiatement le module et l'argument à partir du résultat précédent,

$$
\begin{aligned}
|H(\nu)| &= \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}, \quad < \mathbf{1}\ \text{pt} >\\
\mathrm{Arg}\,(H(\nu)) &= 0, \quad < \mathbf{1}\ \text{pt} >.
\end{aligned}
$$



$<$**1 pt**$>$

$\boxed{\mathbf{1.(e)}}$ En utilisant la propriété $\mathcal{F}[h(ax)] = (1/a)H(\nu/a)$, on obtient immédiatement,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[(a/2)h(ax)] &= \frac{(a/2)(2/a)}{1+4\pi^2(\nu/a)^2},\\
&= \frac{a^2}{a^2+4\pi^2\nu^2}. \quad < \mathbf{3}\ \text{pts} >
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{1.(f)}}$ Pour une valeur de a de plus en plus élevé, on a la fonction $(a/2)h(ax) = \frac{a}{2}\exp -|ax|$ (d'intégrale unité) qui tend vers un pic de Dirac,

$$
\delta(x) = \lim_{a\to\infty} (a/2)h(ax). \qquad < \mathbf{2}\ \text{pts} >
$$

$\boxed{\mathbf{1.(g)}}$ Puis en prenant la TF des deux membres,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta(x)] &= \lim_{a\to\infty} \mathcal{F}[(a/2)h(ax)],\\
\mathcal{F}[\delta(x)] &= \lim_{a\to\infty} \frac{a^2}{a^2+4\pi^2\nu^2},\\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1+4\pi^2(\nu/a)^2},\\
&= 1. \qquad < \mathbf{3}\ \text{pts} >
\end{aligned}
$$

Dans le raisonnement, “on retrouve la TF d’un pic de Dirac par la limite de la TF d’une fonction qui tend vers un pic de Dirac”. On ne doit pas oublier que la fonction doit être aussi d’intégrale unité, ce qui est le cas de $k\,a\,h(ax)$ pour $k = 1/2$ seulement. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{2.}}$ on obtient,

$$
\begin{aligned}
-f'(x) + \int f(x)\,dx &= \mathcal{W}(x), \\
-2\pi j\nu\, F(\nu) + \frac{F(\nu)}{2\pi j\nu} &= \frac{1}{2\pi j\nu}, \quad < \textbf{3 pts} > \\
F(\nu)\Big[\frac{1+4\pi^2\nu^2}{2\pi j\nu}\Big] &= \frac{1}{2\pi j\nu}, \\
F(\nu) &= \frac{1}{1+4\pi^2\nu^2} \quad < \textbf{3 pts} >.
\end{aligned}
$$

Et donc, $f(x) = \frac{1}{2}\,h(x)$. <**1 pt**>

$\boxed{\textbf{3.}}$ $\mathcal{F}\big(\frac{1}{1+4\pi^2x^2}\big) = \frac{1}{2}\exp(-|\nu|)$, et par changement de variable, on trouve immédiatement

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big) = \pi \exp -2\pi|\nu|.$$

<**3 pts**>

II. DWT -Discrete Wavelet Transform (19 pts).

1. Soit le vecteur 1D, de dimension 8 suivant,

   $$v = [\,3 \quad 5 \quad 4 \quad 8 \quad 13 \quad 7 \quad 5 \quad 3\,].$$

   Donner la DWT de ce vecteur en utilisant la Transformation en ondelette de Haar pour 3 niveaux de résolution (et en donnant les différentes étapes de calcul). <**6 pts**>
2. Donner trois applications en traitement d’image de la décomposition en ondelette. <**4 pts**>
3. Pour un vecteur 1D de dimension N, donner le nombre d’opérations que nécessite une DWT (un moyennage de deux termes ainsi qu’une différence moyennée comptant pour une opération dans les deux cas). <**6 pts**>
4. En supposant que l’on a implémenté une DWT pour un vecteur 1D et que le nombre d’opérations pour effectuer cette DWT sur un vecteur 1D de dimension N est $C(N)$, donner le nombre d’opérations pour effectuer cette DWT sur une image de taille N lignes et N colonnes pour un nombre de résolution (i.e., décomposition) = 3. <**3 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1}}$ Cette décomposition fera intervenir trois étape de calcul ($2^3 = 8$).

• Étape 1.

On prend la moyenne de chaque pair de composante dans v et on place le résultat dans les quatre premières positions. Les quatre autres composantes sont la différence du premier élément de chaque pair et sa moyenne.

$$v = [\,5.66 \quad 8.49 \quad 14.14 \quad 5.66 \quad -1.41 \quad -2.83 \quad 4.24 \quad 1.41\,]. \quad < \textbf{2}\text{ pts} >$$

• Étape 2.
On ne touche pas aux quatre dernières composantes et on réitère le processus pour le vecteur constitué des quatre premières composantes,

$$v = [\,10 \quad 14 \quad -2 \quad 6 \quad -1.41 \quad -2.83 \quad 4.24 \quad 1.41\,]. \quad <\mathbf{2}\ \text{pts}>$$

• Étape 3.
On ne touche pas aux six dernières composantes et on réitère le processus pour le vecteur constitué des deux premières composantes,

$$v = [\,16.97 \quad -2.83 \quad -2 \quad 6 \quad -1.41 \quad -2.83 \quad 4.24 \quad 1.41\,]. \quad <\mathbf{2}\ \text{pts}>$$

$\boxed{2}$

1. Compression des données. En ne considérant que les coefficients d'ondelettes supérieur a un certain seuil. $<$**1.5 pt**$>$
2. En restauration de signal/image (incluant le filtrage ou débruitage) en utilisant un filtrage de ces coefficients pour chaque itération d'une technique de restauration pour contraindre (i.e., rendre bien posé) le problème de restauration comme on a pu le voir en TP. $<$**1.5 pt**$>$
3. On peut utiliser ces coefficients d'ondelettes pour caractériser une texture (pour de la segmentation, ou de la classification), mais aussi pour localiser des contours, .. etc. $<$**1 pt**$>$

$\boxed{3}$ Le nombre d'étapes ou résolutions a considérer est $\log_2 N$ (e.g., $3 = \log_2 8$ dans l'exemple de la question 1.). Pour la première étape, N opérations sont nécessaires ($N/2$ moyennages de deux termes et $N/2$ différences moyennées), puis $N/2$ opérations à la deuxième étape, puis $N/4$ a la troisième étape, etc. (dans l'exemple de la question 1. , la troisième est la dernière étape et $N/4 = 2$) donc,

$$2(\underbrace{1 + 2 + \ldots + N/2}_{\log_2(N)\ \text{termes}}) \quad \text{opérations} \quad <\mathbf{6}\ \text{pts}> \quad = \quad 2\Big(\frac{1 - 2^{\log_2(N)}}{1-2}\Big) = 2(2^{\log_2(N)} - 1).$$

$\boxed{4}$ On applique la TWD sur toute les N lignes de l'image puis sur toute les colonnes de l'image soit $2N\,C(N)$ opérations, puis $2(N/4)\,C(N/2)$ opérations (sur toute les $N/2$ lignes et $N/2$ colonnes), puis $2(N/4)\,C(N/4)$. ($\log_2 N$ fois dans le cas d'une décomposition maximale). $<$**3 pts**$>$

III. Opération ponctuelle (20 pts).

1. Une image a un histogramme normalisé pour lequel on est arrivé à trouver la forme analytique suivante

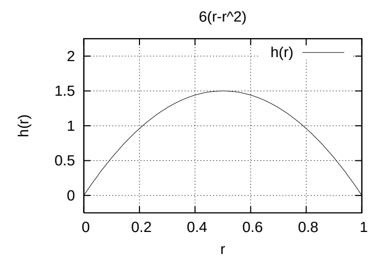
$$h(r) = 6(r - r^2)$$

pour $r \in [0, 1]$. On suppose donc ici que r correspond à un niveau de gris (1 correspondant au blanc et 0 au noir). Tracer grossièrement cet histogramme et préciser quelles est la moyenne des niveaux de gris de cette image qualitativement (i.e., en constatant quelque-chose sur le graphe) et par calcul. $<$**8 pts**$>$

2. Pourquoi $h(r) = 3(r - r^2)$ ne pourrait être une courbe d'histogramme normalisé ? $<$**2 pts**$>$
3. Déterminer la transformation $s = T(r)$ qui permettrait d'égaliser $h(r)$. $<$**8 pts**$>$
4. Perd on de l'information quand on fait une égalisation d'histogramme sur une image numérique ? Justifier votre réponse. $<$**2 pts**$>$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ L'histogramme de l'image ressemble à cette courbe,



<**3 pts**>

L'histogramme est symétrique par rapport à l'axe $r = 0.5$ donc la moyenne des niveaux de gris de cette image est $r = 0.5$. On peut aussi le trouver par calcul, <**2 pts**>

$$\mu = \int_0^1 6\,(r^2 - r^3)\,dr = 6\,[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}]_0^1 = 1/2. \quad < \mathbf{3\,pts} >$$

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$ Parce que $\int_0^1 h(r)\,dr \neq 1$ <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{2.(c)}}$

$$s = T(r) = \int_0^r h(r)\,dr = \int_0^r 6\,(r - r^2)\,dr = 6\,[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}]_0^r = 3r^2 - 2r^3. \quad < \mathbf{8\,pts} >$$

$\boxed{\textbf{2.(d)}}$ Oui on perd de l'information car certains niveaux de gris peuvent être regroupé pour n'en formé qu'un dans le processus d'égalisation d'histogramme. <**2 pts**>

Nota : En théorie avec un histogramme continu, il n'y aurait pas de perte d'information, mais en pratique ou tout est discrétisé, si.

IV. Restauration (20 pts).

On rappelle que dans le cas d'un modèle de dégradation linéaire tel que $g(x, y) = h(x) * f(x, y) + n(x, y)$, le filtre (inverse) qu'il faut appliquer a $g(x, y)$ pour estimer $f(x, y)$ au sens de Wiener est,

$$T(u, \nu) = \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{|N(u,\nu)|^2}{|F(u,\nu)|^2}} \right],$$

dans lequel $|N(u, \nu)|^2$ correspond a la puissance du bruit (σ^2 dans le cas d'un bruit Gaussien) et $|F(u, \nu)|^2$ représente la puissance du signal que l'on recherche.

1. Rappeler a quoi sert fondamentalement le terme $|N(u, \nu)|^2/|F(u, \nu)|^2$ au dénominateur de ce filtre inverse et quel filtre aurait-on si ce terme était nul et quels problèmes rencontre ce type de filtre (i.e., celui pour lequel ce terme est nul) ? <**3 pts**>
2. Donner une solution simple si on connaît rien sur la puissance du bruit, pour utiliser une version simplifiée du filtre de Wiener (qui n'ai toutefois pas les problème du filtre obtenu lorsque $|N(u, \nu)|^2/|F(u, \nu)|^2$ est nul). <**2 pts**>

3. Admettons que l'on connaisse parfaitement la puissance du bruit qui dégrade notre image initiale $f(x, y)$. Soit σ^2 cette puissance de bruit. Dans cette relation, on peut voir que trouver le filtre inverse idéal au sens de Wiener, nécessite encore de spécifier le module au carré de la TF de la fonction que l'on recherche (i.e., $|F(u, \nu)|^2$). Donner une version itérative de ce filtre sous la forme d'un point fixe (i.e., une relation du type $F^{[n+1]}(u, \nu) = W(F^{[n]}(u, \nu))$ et dans laquelle l'exposant $^{[]}$ désigne l'itération). <**4 pts**>
4. Quelle est la dégradation de flou (i.e., le type de forme de PSF) qui soit la plus difficile a restaurer. Donner des exemple et justifier votre réponse. <**2 pts**> Même question mais cette fois concernant le type de flou le plus facile a restaurer. Donner au moins un exemple et justifier votre réponse. <**1 pt**>
5. Quelle est la dégradation de flou gui soit la plus facile a estimer (si on considère les méthodes vues en cours). Justifier bien votre réponse. <**2 pts**> Même question mais cette fois concernant le type de flou le plus facile a estimer. Donner au moins un exemple et justifier votre réponse. <**1 pt**>
6. Dans le TP 3 concernant la méthode itérative de restauration de Figueiredo et Nowak, qui alterne deux étapes (une étape de Landweber et une étape de filtrage de l'estimée a chaque itération dans le domaine des ondelettes). Quel est le principal intérêt de faire le filtrage de la deuxième étape ? <**3 pts**> Quel est l'intérêt de le faire dans le domaine des ondelettes et pas dans le domaine de Fourier ? <**2 pts**>

Réponse

$\boxed{1}$ Si ce terme était nul, on aurait le classique filtre inverse correspondant a $F(u, \nu) = G(u, \nu)/H(u, \nu)$. Le problème avec ce filtre est que cet division a numériquement aucun sens pour les valeurs ou $F(u, \nu)$ est nulle. Le premier rôle du terme $|N(u, \nu)|^2/|F(u, \nu)|^2$ du filtre de Wiener permet donc d'éviter cette division par zéro. <**3 pts**>

Nota : Le deuxième rôle est de le faire optimalement au sens du critère d'estimation de $f(x, y)$ choisi par Wiener, i.e., au sens de l'erreur quadratique moyenne.

$\boxed{2}$ Il suffit de poser le terme $|N(u, \nu)|^2/|F(u, \nu)|^2$ égale a une constante non nulle (ou une fonction donnée) obtenue après, par exemple, différents essais successifs. <**2 pts**>

$\boxed{3}$ En considérant au tout début du processus itératif que $F^{[0]}(u, \nu) = G(u, \nu)$ (ou considérer au tout début une constante) et,

$$F^{[n+1]}(u, \nu) = G(u, \nu) \cdot \left[\frac{1}{H(u, \nu)} \cdot \frac{|H(u, \nu)|^2}{|H(u, \nu)|^2 + \frac{\sigma^2}{|F^{[n]}(u, \nu)|^2}} \right]$$

C'est ce que l'on appelle le filtre de Wiener Itérative (un point fixe qui converge très bien !). <**4 pts**>

$\boxed{4}$ Le flou uniforme et en fait tous les flous pour lesquels la TF de la PSF engendre des zéros dans le domaine spectral. <**2 pts**> Mis à part le flou engendré par u pic de Dirac !, le plus facile a restaurer est le flou Gaussien ou tous les autres types de flou qui n'engendre aucun zéro dans le domaine fréquentiel. <**1 pt**>

$\boxed{5}$ C'est l'inverse. Les plus faciles estimer sont les PSF pour lesquels des zéros sont engendres dans le domaine fréquentiel (comme vu en cours, on peut utiliser facilement ces zéros pour identifier les paramètres de la PSF). <**2 pts**> Le plus difficile a estimer est le flou Gaussien qui n'engendre aucun zéro dans le domaine fréquentiel. <**1 pt**>

$\boxed{6}$ Ce filtrage permet de régulariser la solution. Dans notre cas, il permet d'empêcher l'estimée de voir ces hautes fréquence s'amplifier d'itérations en itérations et d'obtenir une solution aberrante. <**3 pts**> Dans les deux cas il s'agit d'un filtrage donc par définition d'une suppression (ou atténuation) de fréquences du signal. Dans le cas des ondelettes cette suppression (ou atténuation) des fréquences est fait **localement** (i.e., relativement a une position x, y donnée) et non pas globalement comme le ferait le filtrage dans le domaine de Fourier et dont l'effet produit l'effet de ringing.<**2 pts**>

V. Misc. (30 pts).

1. Supposons que vous ayez a votre disposition plusieurs centaines de vues de la ville de Cincinnati prises par une caméra de surveillance immobile (par exemple une vue prise toute les 1/2 seconde) (cf. Fig. 1).

FIG. 1 – Vues de Cincinnati prise par une caméra de surveillance

   (a) Quel pré-traitement(s) et traitement(s) devrait-on faire sur cette séries d'images fixes pour obtenir une image de la ville de Cincinnati ou il n'y aurait aucun objet en mouvement (i.e., rues et routes désertes, aucun piéton, etc.). <**6 pts**>

   (b) Supposons que l'on arrive a obtenir une image de la ville de Cincinnati ou il n'y aurait aucun objet en mouvement. On suppose toujours que la caméra de surveillance est fixe. Comment pourrait on utiliser cette image pour détecter les objets mobiles que l'on peut voir sur ces deux images (voitures, drapeau, etc.). <**2 pts**>

   (c) Supposons que les deux premiers points sont réalisés, quel traitement devrait on faire pour obtenir une mesure qui serait proportionnelle à la densité du trafic routier. <**3 pts**>

2. (a) Soit la PSF 1D défini par le signal discrétisé suivant,

$$\frac{1}{A}[\,1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\,].$$

   Quel valeur A devrait il être ? <**2 pts**>, Quel type de filtre réalise t-on si on convolue un signal par cette PSF ? <**1 pt**> Si A conservait la valeur de 1, que cela résulterait sur le signal filtré ? <**1 pt**>

   (b) Si on convoluait une image selon les lignes avec cette PSF 1D puis ensuite si on convoluait le résultat de ce filtrage selon les colonnes. A quel PSF 2D ce filtrage en deux temps correspondrait il ? <**4 pts**>

   (c) Est-ce que des convolution répétées du signal 1D $[\;0.5 \quad 0.5]$ peut être utilisé pour obtenir les mêmes résultats que la convolution avec le signal $(1/A)\;[\;1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\;]$? Si oui combien de convolutions successives sont nécessaire si non expliquer pourquoi. <**4 pts**>

3. (a) Supposons que vous vouliez faire un système automatique (couplé à un microscope) de détection du processus de division cellulaire (appelé aussi la mitose). Plus précisément un appareil automatique constituée d'une petite caméra de surveillance couplé à un microscope (permettant de prendre puis de traiter une image telle que celle donnée à la Fig. 2 toute les minutes) dont le but de vous avertir automatiquement si une division cellulaire a eu lieu (i.e., passage de une à deux cellules puis passage de deux à quatre cellules puis etc.). Quelle type de traitement et d'algorithmes proposeriez vous ?

      i. Pour extraire le contour des cellules. <**2 pts**>

      ii. Pour réaliser ce qu'on vous demande. Justifiez votre réponse. <**5 pts**>

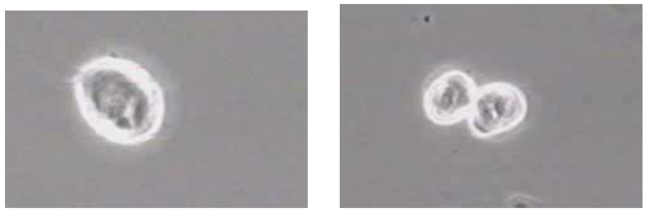


FIG. 2 – Processus de division cellulaire ou mitose

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ Pour obtenir automatiquement l'image de la ville de Cincinnati ou il n'y aurait aucun objet en mouvement, on pourrait faire comme traitement un filtre passe-bas temporel et plus précisément un moyennage non pas spatial mais temporel. On peut faire aussi l'équivalent d'un filtrage médian temporel (qui est en fait un filtre passe-bas non linéaire) qui aura le même résultat et même sera plus robuste. Dans ce filtrage temporelle, tout ce qui bouge est considéré comme du bruit et serait éliminé. Il en résulterait ainsi une image de la ville de Cincinnati ne faisant apparaître aucune voiture (sauf les voitures immobiles qui seraient stationné durant toute la période de la prise de vue). <**4 pts**>

Avant de faire ce moyennage, on devrait s'assurer après un histogramme matching comme pré-traitement qu'il n'y a pas de différence de luminosité d'une image à l'autre. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ Il suffit de faire une simple différence entre l'image obtenue précédemment dans laquelle il n'y a aucun objet en mouvement (que l'on appelle l'image de référence) et une image donnée par la caméra. Un seuil sur cette valeur absolue de la différence nous permettra de détecter les zones mobiles. <**2pts**>

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ Le nombre de pixel classé mobile serait une mesure qui serait proportionnelle à la densité du trafic routier. <**2pts**>

$\boxed{\textbf{2.(a)}}$ $A = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$. <**2 pts**> Filtre passe-bas. <**1 pt**> Si $A = 1$, le signal filtrée aurait une moyenne de niveaux de gris multipliée par 16. <**1 pt**>

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$

$\frac{1}{16^2}$

1	*4*	*6*	*4*	*1*
4	*16*	*24*	*16*	*4*
6	*24*	*36*	*24*	*6*
4	*16*	*24*	*16*	*4*
1	*4*	*6*	*1*	*1*

<**4 pts**>

$\boxed{\textbf{2.(c)}}$ Oui si on convolue [0.5 0.5] avec lui même, on obtient, [0.25 0.50 0.25]. Et en convoluant ce résultat avec [0.5 0.5], on obtient [0.125 0.375 0.375 0.125], puis [0.0625 0.25 0.375 0.25 0.0625] qui correspond bien à (1/16) [1 4 6 4 1]. <**4 pts**>

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$

1- Un détecteur de Canny ou un simple seuillage et un amincissement des contours par morphologie mathématique, permettrait d'extraire les contours de chaque cellule. <**2 pts**>

2- Une possibilité serait ensuite d'utiliser la transformée de Hough sur ses contours avec des formes circulaire ou mieux ellipsoïdale.

A l'instant t on relèverait dans la matrice d'accumulation le maximum. L'instant de détection de la mitose serait un autre maximum dans cette matrice d'accumulation qui serais deux fois plus important. <**5 pts**>