DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *05/12/2005*

I	Transformée de Fourier (30 pts).
II	Filtrage (32 pts).
III	Segmentation & Markov (26 pts).
IV	Compression et TCD (12 pts).
V	Misc (23 pts).
Total	123 points.

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (30 pts)

1. (a) Soit la fonction $f(x)$, définie par,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$ et en déduire la TF de $f(3x)$ et la TF de $g(x)$, définie par,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ \exp(x) & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

<**7 pts**>

(b) Montrer que l'on peut trouver facilement a et b tel que $h(x) = \exp(-|x|) = f(ax) + f(bx)$ et en déduire la TF de $h(x)$. <**4 pts**>

(c) Si on considère que le spectre d'amplitude est nulle lorsque son amplitude est inférieure à 1% de sa valeur maximale, avec quelle période d'échantillonnage T_e maximale (approximatif) doit on échantillonner $h(x)$? <**3 pts**>

(d) Si on ne respecte pas cette fréquence d'échantillonage minimale, quel est le nom du phénomène qui se produit ? Dire concrètement ce qui se passe lors de la visualisation de ce signal échantillonné si ce phénomène se produit et donner deux méthodes pour résoudre ce problème. <**5 pts**>

(e) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'expression ci dessous dans laquelle "$*$" désigne l'opérateur de convolution.

$$f(x) * f(3x). \qquad < \mathbf{4} \text{ pts} >$$

2. Trouver le résultat de l'expression,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} * \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \qquad < \mathbf{4} \text{ pts} >$$

3. Trouver le résultat de l'intégrale suivante,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 \, dx.$$

par la méthode de votre choix. <**3 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ En utilisant directement la définition de la TF,

$$\begin{aligned} F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] &= \int_0^{\infty} f(x) \exp(-2\pi j \nu x) \, dx = \frac{-1}{1 + 2\pi j \nu} \Big[\exp\big[-x(1 + 2\pi j \nu)\big] \Big]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{1 + 2\pi j \nu}. \quad < \mathbf{3\ pts} > \end{aligned}$$

Pour calculer la TF de $f(3x)$, on utilise la propriété de dilatation de la TF, i.e., $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{\nu}{a})$, on trouve,

$$\mathcal{F}[f(3x)] = \frac{1}{|3|} F(\nu/3) = \frac{1/3}{1 + 2\pi j \nu/3} = \frac{1}{3 + 2\pi j \nu}. \quad < \mathbf{2\ pts} >$$

Pour calculer la TF de $g(x)$, on peut utiliser aussi la propriété de dilatation tout en s'apercevant que $g(x) = f(-x)$ et on trouve,

$$\mathcal{F}[g(x)] = \mathcal{F}[f(-x)] = \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{1 - 2\pi j\nu}.$$ < **2 pts** >

1.(b) On a $h(x) = \exp(-|x|) = f(x) + f(-x)$, et de cela on en déduit que,

$$\mathcal{F}[h(x)] = \mathcal{F}[f(x) + f(-x)] = \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[f(-x)] = \frac{1}{1 + 2\pi j\nu} + \frac{1}{1 - 2\pi j\nu} = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}.$$

<**4 pts**>

1.(c) On doit calculer $|H(\nu)|$, le module de $H(\nu)$, qui n'st autre que la fonction précédente ;

$$|H(\nu)| = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}$$ < **1 pt** >

$|H(\nu)| < 0.02$ pour une fréquence de demi-échantillonage de $\nu \gtrapprox 1.58$ ou une période d'échantillonage de $T_{\mathrm{e}} <\approx 0.3$. <**2 pts**>

1.(d) Ce phénomène est appelé aliasing, repliement de spectre, moiré ou encore sous-échantillonage. <**1.5 pts**>

Concrètement, ce repliement de spectre va créer dans ce signal sous-échantillonné des hautes fréquences parasites provenant de la somme des hautes fréquences positifs et négatifs de ce signal du au phénomène de repliement spectral. <**1.5 pts**>

Pour résoudre ce problème, il existe deux solutions ;

1) Échantillonner à une période d'échantillonage plus petite. <**1 pt**>
2) Ou filtrer passe-bas le signal pour que ce repliement spectral n'ai pas lieu. <**1 pt**>

(Nota : du coup on introduira du flou dans les détails de cette image sous échantillonnée ; ce qui est tout de même préférable à l'introduction de hautes fréquences parasites induisant des artefacts sur l'image.)

1.(e) Le plus simple est de résoudre cette expression dans le domaine fréquentiel en se servant de ce qu'on a calculer à la question **1.(a)** puis de trouver la TF inverse de cette solution. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\Big[f(x) * f(3x)\Big] &= \mathcal{F}[f(x)] \cdot \mathcal{F}[f(3x)] = \frac{1}{(1 + 2\pi j\nu)(3 + 2\pi j\nu)} \\ &= \frac{1/2}{1 + 2\pi j\nu} - \frac{1/2}{3 + 2\pi j\nu}. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} f(x) * f(3x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1/2}{1 + 2\pi j\nu} - \frac{1/2}{3 + 2\pi j\nu}\Big) = \mathcal{F}^{-1}\big(\frac{1/2}{1 + 2\pi j\nu}\big) - \mathcal{F}^{-1}\big(\frac{1/2}{3 + 2\pi j\nu}\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) - f(3x)\big). \end{aligned}$$ < **4 pts** >

2. On résout cette équation dans le domaine de Fourier.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} * \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} & \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & \Pi(\nu) \cdot \Pi(\nu) \\ = & & = \\ \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} & \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & \Pi(\nu) \end{array}$$ < **4 pts** >

$\boxed{\textbf{3.}}$ Trois possibilités. La première utilise la connaissance de la TF inverse de la fonction que l'on intègre, qui est la fonction triangle $\triangle(x)$.

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 \exp(-2\pi j\nu(x=0))\, d\nu \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2\right]_{x=0} = \triangle(x=0) = 1. \end{aligned}$$

Deuxième solution ; remarquer que le résultat de cette intégrale correspond à la valeur (en $x = 0$) de la fonction $\sin \pi x/\pi x * \sin \pi x/\pi x$ (auto-corrélation de la fonction $\sin \pi x/\pi x$) et on trouve,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 d\nu \quad = \quad \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} * \frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)_{x=0} = 1.$$

Troisième solution ; on utilise la conservation de l'énergie dans les deux espaces et on a ;

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2 d\nu \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)^2\, dx = 1.$$

(Un des trois méthodes donnait $<$**3 pts**$>$)

II. Filtrage (32 pts)

1. Soit le filtre 1D spatial qui réalise, sur le signal unidimensionnel $f(x)$, l'opération suivante,

$$f(x) - k\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}. \tag{1}$$

   (a) Trouver l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle (module de la Transformée de Fourier) de ce filtre pour $k > 1$. $<$**5 pts**$>$

   (b) En déduire le type de filtre dont il s'agit pour $k > 0$, et rappeler (cf. notes de cours) quel phénomène ce filtre fera apparaître en rappelant son lien avec le système visuel humain et donner finalement (à l'aide d'un graphique) son effet sur un signal 1D en escalier. $<$**5 pts**$>$

   (c) Quel rôle joue $k\,(> 0)$ dans ce filtre ? $<$**2 pts**$>$

   (d) Si on considère le masque de convolution $[1 \times 3]$ (i.e., 1 ligne et 3 colonnes) traditionnellement donné pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donner le masque de convolution $[1 \times 3]$ qui réalise l'Équation (1) pour $k = 1$. $<$**3 pts**$>$

   (e) En utilisant le masque de convolution $[1\times3]$ trouvé à la question précédente (que l'on appelle par la suite $h(x)$), utiliser la TF $H(\nu) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x) \exp(-2\pi j\nu x)$ pour trouver sa réponse fréquentielle $<$**3 pts**$>$ et comparer la avec la réponse fréquentielle obtenue à la question (a). Pourquoi ces deux réponses fréquentielles sont elles différentes ? Justifier votre réponse. $<$**3 pts**$>$

2. Soit maintenant le filtre 1D spatial de la fonction $f(x)$ qui réalise l'opération suivante

$$f(x) + k\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \tag{2}$$

   (a) Trouvez l'expression mathématique et l'allure de la réponse fréquentielle (module de la Transformée de Fourier) de ce filtre pour $k > 1$. $<$**4 pts**$>$

(b) Si on considère le masque de convolution $[1 \times 3]$ (i.e., 1 ligne 3 colonnes) traditionnellement donné pour l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donnez le masque de convolution $[1 \times 3]$ qui réalise l'Équation (2) pour k quelconque. $<$**3 pts**$>$

(c) En déduire les valeurs de k pour lesquels l'Équation (2) implémente un filtre passe-bas. $<$**2 pts**$>$

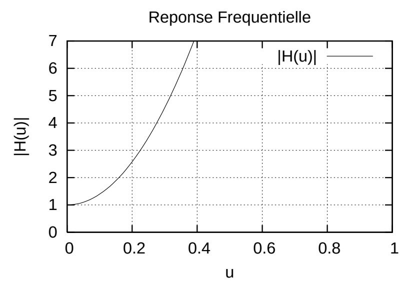
(d) A quoi est équivalent le filtre trouvé en 2.(c) pour $k = 0.25$? $<$**2 pts**$>$

Réponse

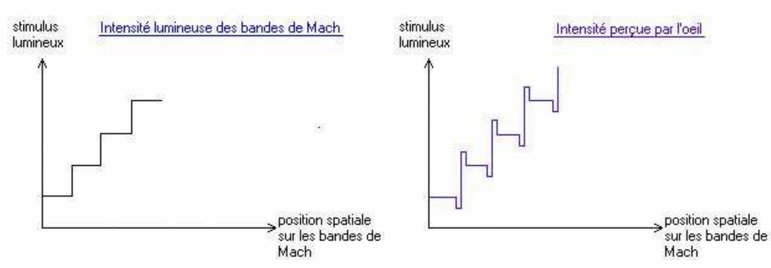
$\boxed{\textbf{1(a).}}$ La transposition dans le domaine de Fourier avec la convention $f(x) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu)$ se fait immédiatement et on trouve,

$$f(x) - k\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad F(\nu)\big[1 - k(2\pi j\nu)^2\big] = F(\nu)\,\big[\underbrace{1 + 4k\pi^2\nu^2}_{H(\nu)}\big]. \qquad <\textbf{2 pts}>$$

Dans le domaine spectrale, $|F(\nu)|$ est donc multiplié par la fonction de transfert $H(\nu) = 1 + 4k\pi^2\nu^2$, dont le module est $|1 + (4k\pi^2\nu^2)|$. $<$**1 pt**$>$
Avec $|H(\nu)|_{\nu \longrightarrow 0} \longrightarrow 1$ et $|H(\nu)|_{\nu \longrightarrow \infty} \longrightarrow \infty$. L'allure est donné par le graphe ci contre (pour $k = 1$). $<$**2 pts**$>$



$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ Il s'agit donc d'un filtre rehausseur de contour. $<$**1.5 pt**$>$
Ce filtre fera apparaître les BANDES DE MACHS $<$**1 pt**$>$ propre au système visuel humain $<$**1 pt**$>$ et qui fera apparaître comme intensité perçu, sur un signal 1D en escalier, et tout comme le filtre précèdent une intensité (comme celle perçue par l'oeil humain) et comme montré dans le graphe ci-dessous,



$<$**1.5 pts**$>$

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ Il contrôlera, proportionnellement à la valeur de k, la plus ou moins amplification ou rehaussement des contours. $<$**2 pts**$>$

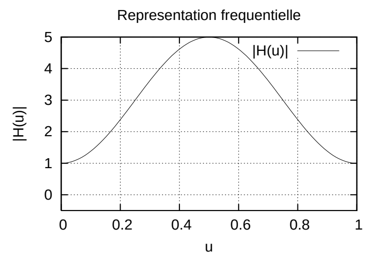
$\boxed{\textbf{1.(d)}}$ On a, en utilisant l'opérateur $\boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}$ pour $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

$$\begin{aligned} f(x) - k\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} &= f(x) * \Big[\delta(x) - \boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}\,\Big] \\ &= f(x) * \Big[\frac{1}{3}\,\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0} - \boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}\,\Big] \\ &= f(x) * \boxed{-1}\boxed{3}\boxed{-1}. \end{aligned}$$

On trouve donc le masque $[1 \times 3]$ de convolution suivant $\boxed{-1}\boxed{3}\boxed{-1}$. **<3 pts>**

1(e). Si on appelle $H(\nu)$ la TFD de $\boxed{-1}\boxed{3}\boxed{-1}$, on a

$$\begin{aligned} H(\nu) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} h(x)\exp(-2\pi j\nu x) = \sum_{x=-1}^{+1} h(x)\exp(-2\pi j\nu x) \\ &= -\exp(2\pi j\nu) + 3 - \exp(-2\pi j\nu) = 3 - 2\cos(2\pi\nu). \end{aligned}$$



<3 pts>

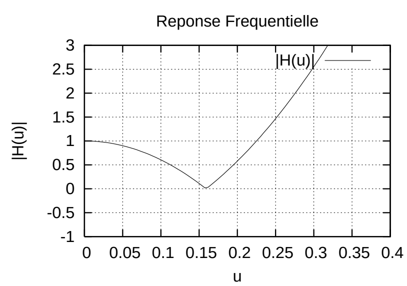
Cette réponse fréquentielle est elle aussi un rehausseur de contour mais la TF s'applique ici sur une fonction discrète donc le spectre est ici (forcément) périodique de période numérique T=1. De plus on doit considérer l'effet de la discrétisassions de l'opérateur dérivé seconde qui explique que "localement" cette réponse fréquentielle comporte quelques dissemblances comparativement à la TF fait sur sa version continu. **<3 pts>**

Nota : En fait, pour être plus précis, il s'agit bien du même filtre et on peut le constater facilement car, pour les petites valeurs de ν (proche de 0), $\cos(2\pi\nu) \approx 1 - (2\pi\nu)^2/2$ et donc $H(\nu) = 3 - 2\cos(2\pi\nu) \approx 3 - 2 \times (1 - (2\pi\nu)^2/2) = 1 + 4\pi^2\nu^2$, identique à la fonction de transfert trouvé à la question 1.(a) pour $k = 1$.

2.(a) On trouve,

$$f(x) + k\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad F(\nu)\,[\underbrace{1 - 4k\pi^2\nu^2}_{H(\nu)}]. \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Et, $|H(\nu)| = |1 - 4k\pi^2\nu^2|$ qui se représente dans le domaine des fréquences par,



<2 pts>

2.(b)

$$\begin{aligned} f(x) + k\,\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} &= f(x) * \left[\delta(x) + k\,\boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}\right] \\ &= f(x) * \left[\frac{1}{3}\,\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0} + k\,\boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}\right] \\ &= f(x) * \boxed{k}\boxed{-2k+1}\boxed{k}. \end{aligned}$$

On trouve donc le masque 1×3 de convolution suivant $\boxed{k}\boxed{-2k+1}\boxed{k}$. **<3 pts>**

2.(c) Si tous les coefficient de ce masque de convolution étaient positif, alors la convolution par ce masque se réduirait à un moyennage et on aurait un filtre passe-bas ; ce qui est donc le cas pour $k > 0$ et $k < 1/2$. $<$**2 pts** **[Calcul Faux/Raisonement Juste $>$ 1 pt]**$>$

2.(d) Pour $k = 0.25$, on à $\boxed{\text{k}}\boxed{\text{-2k+1}}\boxed{\text{k}} = \frac{1}{4}\,\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ qui est similaire au filtre Gaussien ou binomial de largeur 3 (et qui est bien passe-bas puisque tous ses coefficients sont positifs).

$<$**2 pts** **[Calcul Faux/Raisonement Juste $>$ 1 pt]**$>$

III. Segmentation & Markov (26 pts).

On considère une segmentation Markovienne deux classes dans laquelle on définit la fonction de potentiel du modèle *a priori* comme suit : $V_c(x) = (1 - \delta(x_s - x_t))$.

1. Si cette fonction potentielle s'applique sur respectivement les cliques binaires horizontales et verticales. Que cela veut il dire physiquement ? (i.e., quel sont les contraintes modélisées mathématiquement sur les formes segmentées que l'on recherche dans l'image ?). $<$**4 pts**$>$
2. En reliant cette fonction potentielle à la probabilité d'avoir une configuration x d'étiquettes (étiquette possible "1" ou "0" pour chaque site) par la relation $P_X(x) = (1/Z)\exp\big(-\sum_{c\in\mathcal{C}} V_c(x)\big)$, trouver le rapport de probabilité $P_X(x = (a))/P_X(x = (b))$ où **(a)** et **(b)** sont les deux configurations suivantes.

(a)

0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

et

(b)

1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0

$<$**8 pts**$>$

3. Si on devait calculer non pas un rapport de probabilité comme précédemment mais par exemple la probabilité $P_X(x = (a))$. Indiquer combien de fois plus de calcul on devrait faire (approximativement) comparativement à la question précédente. Justifiez bien votre raisonnement. $<$**5 pts**$>$
4. Si on avait le modèle ne comportant que des cliques horizontales (et donc plus de cliques verticales), indiquer quel serait le nouveau rapport de probabilité $P_X(x = (a))/P_X(x = (b))$? $<$**4 pts**$>$
5. Quel est la différence majeure entre les deux stratégie de segmentation suivante :
   (a) Segmentation au sens du MV (Maximum de vraisemblance) + technique de morphologie mathématique pour "nettoyer la segmentation".
   (b) Segmentation Markovienne.

$<$**4 pts**$>$

Réponse

1.

Puisque l'on essaie de minimiser une fonction d'énergie, cela veut dire que l'on va favoriser la situation dans laquelle deux étiquettes voisines (dans un 8-voisinage) sont identiques ($V_c = 0$) et défavoriser les situations ou deux étiquettes voisines seront différentes ($V_c = 1$). On va donc favoriser ses zones de régions (segmentées) homogènes. $<$**4 pts**$>$

2.

- $P_X(x ='' \mathbf{a}'') = \frac{1}{Z}\exp\big(-\sum_{c\in\mathcal{C}} V_c(x)\big) = \frac{1}{Z}\exp\big(-(16)\big)$
  (16 cliques binaires horiz. ou vert. différentes)

$<$**3 pts**$>$

- $P_X(x ='' \mathbf{b}'') = \frac{1}{Z} \exp\big(-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)\big)\big) = \frac{1}{Z} \exp\big(-(24)\big)$
  (24 cliques binaires horiz. ou vert. différentes)
  <**3 pts**>

Donc, $P_X(x = (a))/P_X(x = (b)) = \exp(8)$ (<**2 pts**>) et de ce fait, avec ce modèle la configuration **(a)** est $\exp(8) \approx 2981$ fois plus probable que la configuration **(b)**.

Nota : Ceux qui ont le bon raisonnement avec un nombre de cliques deux fois moins grand ont la totalité des points.

3.

Dans ce cas, on devrait calculer la fonction de partition Z qui est la somme sur toute les configurations possibles <**2.5 pts**> (au total $\Omega = 2^{16}$ configurations possibles pour deux étiquettes et 16 sites dans cette imagette) des probabilités $Z = \sum_{x \in \Omega} \exp(-V_c(x))$. Donc $2^{16}/2$ fois plus de calcul que la question précédente, i.e., 2^{15} fois plus de calcul. <**2.5 pts**>

4.

- $P_X(x ='' \mathbf{a}'') = \frac{1}{Z} \exp\big(-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)\big)\big) = \frac{1}{Z} \exp\big(-(4)\big)$
  (4 différentes)
  <**1.5 pts**>
- $P_X(x ='' \mathbf{b}'') = \frac{1}{Z} \exp\big(-\sum_{c \in \mathcal{C}} V_c(x)\big)\big) = \frac{1}{Z} \exp\big(-(0)\big) = \frac{1}{Z}$
  (0 différentes)
  <**1.5 pts**>

Donc $P_X(x = (a))/P_X(x = (b)) = \exp(-4)$ (<**2 pts**>) et de ce fait, avec ce modèle la configuration **(b)** serait $\exp(4) \approx 54.6$ fois plus probable que la configuration **(a)**.

Nota : Ceux qui ont le bon raisonnement avec un nombre de cliques deux fois moins grand ont la totalité des points.

5.

Dans la segmentation Markovienne la décision au niveau de chaque étiquette se fait par étude simultanée de la valeur de vraisemblance + de la valeur de l'*a priori*. Dans la technique segmentation MV + morphologie mathématique la décision de classification se fait n deux étapes ; l'une après l'autre. <**3 pts**>
De plus dans la segmentation Markovienne, la décision (pour savoir quel est, en un site s, l'étiquette de classe optimal), se fait globalement et non pas localement pour la première stratégie. <**1 pts**>

IV. Compression et TCD (12 pts).

1. Rappeler quelles propriétés à la spectre (obtenu à l'aide d'une TF) d'une fonction paire. <**2 pts**>
2. On dispose algorithmiquement d'une FFT (Fast Fourier Transform) et on voudrait calculer la TCD (Transformée de Cosinus Discrète) de l'image suivante que l'on suppose avoir une longueur et largeur égale à une puissance de deux.

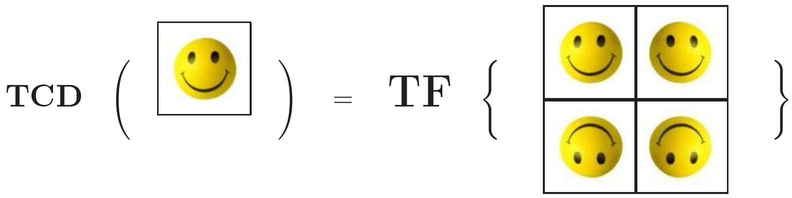
   

   Expliquez comment vous pouvez calculer cette TCD à partir de la FFT et dire qu'elles sont les propriétés de ces deux transformés qui vous permettent de faire cela (i.e., justifier votre réponse). <**7 pts**>
3. Quel est donc la complexité algorithmique par cette stratégie du calcul d'une TCD d'une image de taille $N \times N$? <**3 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ Partie réelle paire et pas de partie imaginaire. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ On se sert du fait que la FFT suppose que l'image à transformée est périodique en x et y (i.e., cyclique) et que la TCD suppose que la transformée de l'image est pair. Donc une stratégie serait de rendre pair l'image de départ (ou symétrie miroir) sans changer la répartition des fréquences de celles ci puis de calculer la FFT ; cela reviendrait à faire sa TCD ; i.e.,



< **7pts** >

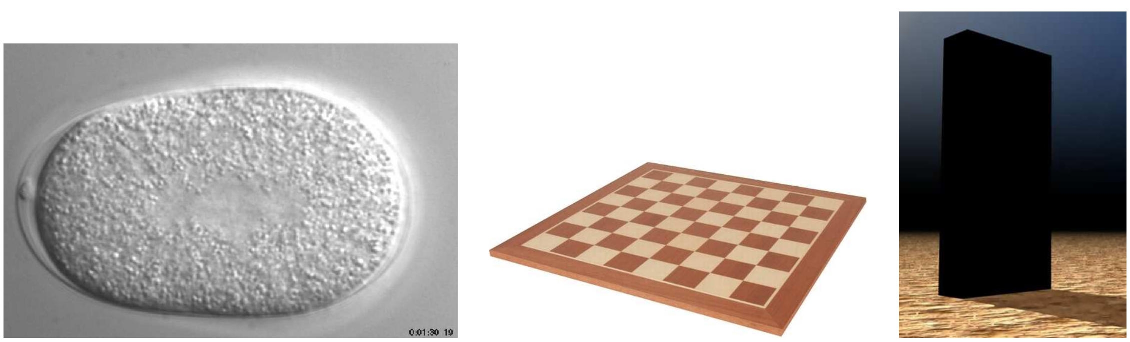
Nota : On comprend bien que l'image rendue paire à la même répartition de fréquence que l'image originale et que puisque celle-ci à été rendue pair, sa FFT n'a qu'une partie réelle sans partie imaginaire et est donc identique à une TCD. Théoriquement le spectre obtenu en utilisant la FFT est aussi 4 fois plus grand en taille (il faudrait sous-échantilloner d'un facteur 2 pour retrouver la même taille que celle obtenu en calculant directement la TCD) et l'ensemble ds coefficients obtenus sont auss multiplié par ce même facteur.

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ Pour la FFT d'une image de taille $N \times N$, on a une complexité proportionelle à $N^2 \log_2 N$. Pour calculer sa TCD il nous faut donc une complexité proportionelle à $4N^2 \log_2 2N$.

<**3 pts**>

Nota : En approximation, on peut dire que c'est en $N^2 \log_2 N$ (2pts/3).

V. Misc. (23 pts).



(a) **(b)** **(c)**

Fig. 1 – **(a)** Image d'un embryon au microscopie par électrons. **(b)** Image d'un plateau d'échecs. **(c)** Image d'un objet mystérieux (style "*2001 l'odyssée de l'espace*").

1. Supposons que vous ayez à votre disposition cette image (cf. Fig. 1.(a)) d'embryon obtenue par microscopie par électrons (pour les obtenir, un canon à électrons mitraille une surface à un angle de 45 degré) et que vous deviez extraire les petits grumeaux (petites bosses) pour éventuellement les compter ou

pour analyser leur déplacement dans une série d'images. Nous pouvons constater que cette image est surexposée (coin en haut à droite) et sous-exposée (coin en bas à gauche). Quels type de techniques pourraient éventuellement être utilisé sur cette image pour corriger cette situation de sur et sous-exposition ? **<8 pts>**

2. Expliquer comment ou par quelles techniques on peut déterminer les positions des coins dans l' image Fig. 1.(b). **<5 pts>**
3. Imaginer qu'un monolithe noire mystérieux sans aucune aspérité et sans aucune ouverture visible apparaisse un jour (de façon mystérieuse !) sur terre. On aimerait avant tout savoir de quoi est fait l'intérieur de ce mystérieux (!) monolithe sans pour autant utiliser une technique destructrice du style découpage au laser ou chalumeau ! Quel technique déjà vu en traitement d'image pourrait être utile ? **<5 pts>**

(a) **(b)**

FIG. 2 – **(a)** Image de Lena **(b)** Image de Lena bruité.

4. Voici l'image de Lena et une image de Lena bruitée par du bruit additif Gaussien de variance σ^2. Déterminer une technique qui permette d'estimer la variance du bruit qui s'est ajoutée à l'image (a) ne connaissant que l'image bruitée (b). **<5 pts>**

Réponse

1.(a)

• Dans l'image de la Fig. 1, on peut constater que la dégradation de surexposition varie spatialement (i.e., elle est plus importante en haut a droite qu'en bas a droite et inexistante en bas à gauche). Le traitement doit être donc forcement adaptatif (i.e./ou spatialement diffèrent) et non pas global (une opération ponctuelle et globale sur l'histogramme pourrait donner quelques résultats mais serait peu robuste). Une égalisation ou un étirement d'histogramme adaptatif (i.e., quadrillage de l'image puis égalisation ou un étirement pour chacune de ces zones carré) est la première chose à laquelle on peut penser. On peut rendre plus robuste ce traitement avec des fenestres qui se chevauche et dont le résultat serait ensuite moyenné.

• Utiliser un traitement qui "detrende" l'image en utilisant un plan de pente est aussi une idée (en permettant, par une transformation linéaire, de rendre la moyenne des niveaux de gris de chaque colonne de pixels appartenant au gros globules (embryon) identique).

• On peut essayé si la technique d'égalisation d'histogramme adaptatif avec fenêtre se chevauchant ne marchait pas, la même technique adaptatif en utilisant non pas une égalisation d'histogramme mais une technique d'histogramme matching en utilisant comme histogramme de référence, l'histogramme obtenu dans une fenêtre centré au milieu de la cellule embryon (donc avec aucun problème de sous ou sur exposition).

• On pourrait essayer aussi un filtrage homomorphique.

• Si ces traitement ne marche pas, on peut se demander si la dégradation n'a pas détruit l'information en haut a droite. Dans le pire des cas, il se peut que la surexposition soit si importante qu'elle est détruit l'information en haut a droite ! (cad qu'il n'existe aucun contraste même dans les niveaux de gris proche du blanc qui permette de retrouver les grumeaux). Dans ce cas, aucun algorithme ne permettra de retrouver cette information !

<8 pts>

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$

• Détecteur de contour (par exemple canny) + transformée de Hough qui nous donneraient les différentes équations des droites. Analytiquement ou numériquement l'intersection de ces droites correspondraient aux différents coins de cette image.

• ....

<5 pts>

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$

On pourrait récolter les différentes coupes de projection de ce monolithes (en utilisant différentes radiations à différents niveaux de fréquence ou des photons, ultrassons ou des particules traversant le monolithe) et tenter, pour chacune de ces fréquences, une reconstruction tomographique 3D (donc une méthode non destructrice) qui serait la même que celle utilisé pour reconstruire l'intérieur du corps humain. **<5 pts>**

Pour obtenir peut être ca ....

$\boxed{\textbf{1.(d)}}$ Si on fait l'hypothèse qu'il existe quelques zones de régions homogène dans cette image alors la technique la plus simple consiste à balader une petite fenêtre (par exemple de taille 4×4) et de calculer en chaque point correspondant au centre de cette fenêtre, la variance obtenue des niveaux de gris de l'image. Une estimation du bruit serait alors la plus petite variance obtenues pour les différentes valeurs de décalage de cette fenêtre.

Nota : En effet supposons que cette petite fenêtre se cale dans une zone qui, avant d'être bruité par le bruit Gaussien, était homogène, la variance calculé sur cette fenêtre correspond effectivement à une bonne estimation empirique de la variance du bruit ajouté sur cette image. **<5 pts>**

Nota : Une méthode plus lourde (mentionné par olusieurs étudiants) consisterait à utiliser une technique de débruitage de l'image et utiliser une différence au carré entre l'image bruitée et l'image restorée pour donner une estimation de la variance du bruit. La méthode est correcte mais beaucoup moins robuste que la méthode précédente et la connaissance du bruit est souvent nécéssaire avant toute restoration (souvenez vous du filtre de Wiener).