DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *04/12/2006*

I	Transformée de Fourier (28 pts)
II	Spectre de Fourier (28 pts)
III	Filtrage (26 pts)
IV	Morphologie Mathématique (24 pts)
V	Segmentation (10 pts)
VI	Problèmes mal posés (7 pts)
Total	123 points

Tous documents, calculatrices et calculateurs personnels autorisés

I. Transformée de Fourier (28 pts)

1. (a) En s'aidant de la dérivée du produit $f(x)\,\delta(x)$, établisser la valeur de l'expression $f(x)\,\delta'(x)$.
   <**3 pts**>

   (b) Utiliser la relation définie précédemment pour calculer $x\,\delta'(x)$, $\exp(x)\,\delta'(x)$, et, $\sin(x)\,\delta'(x)$
   <**3 pts**>

   (c) Utiliser cette relation pour montrer que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x)\,dx = -f'(0)$$

< **4 pts** >

2. (a) En posant $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, démontrer, par la méthode de votre choix, que,

$$\mathcal{F}[x\,f'(x)] = -\nu F'(\nu) - F(\nu) \qquad < \textbf{4 pts} >$$

   (b) Soit $f(x)$ la fonction solution de l'équation différentielle suivante,

$$f(x) + f''(x) + xf'(x) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

   Que devient l'équation (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?
   <**2 pts**>
   En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis $f(x)$.
   <**4 pts**>

3. (a) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'expression ci dessous dans laquelle "$*$" désigne l'opérateur de convolution,
   <**4 pts**>

$$\exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2)$$

4. (a) Par la méthode de votre choix, trouver le résultat de l'intégrale suivante,
   <**4 pts**>

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2)\exp[-\pi(x-t)^2]\,dt$$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$

La formule de dérivée du produit de deux fonctions et les propriétés du produit du Dirac avec une fonction nous permet d'écrire,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(f(x)\,\delta(x)\big) &= f'(x)\,\delta(x) + f(x)\,\delta'(x) \\
\frac{d}{dx}\big(f(0)\,\delta(x)\big) &= f'(0)\,\delta(x) + f(x)\,\delta'(x) \\
\text{et donc,} \qquad f(x)\,\delta'(x) &= f(0)\,\frac{d}{dx}\,\delta(x) - f'(0)\,\delta(x) \\
\text{i.e.,} \qquad f(x)\,\delta'(x) &= f(0)\,\delta'(x) - f'(0)\,\delta(x) \qquad < \textbf{3 pts} >
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$
En appliquant la relation trouvée précédemment, on trouve,

$$\begin{array}{rcll} x\,\delta'(x) = 0\,\delta'(x) - 1\,\delta(x) & = & -\delta(x) & <\textbf{1 pt}> \\ \exp(x)\,\delta'(x) = \exp(0)\,\delta'(x) - \exp(0)\,\delta(x) & = & \delta'(x) - \delta(x) & <\textbf{1 pt}> \\ \sin(x)\,\delta'(x) & = & -\delta(x) & <\textbf{1 pt}> \end{array}$$

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$
En utilisant la relation trouvée en 1.(a) et le fait que, par définition, $\int \delta(x)\,dx = 1$, on a,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x)\,dx & = & f(0)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,dx - f'(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx \\ & = & f(0)\big[\delta(x)\big]_{-\infty}^{+\infty} - f'(0) \\ & = & -f'(0) \qquad <\textbf{4 pts}> \end{array}$$

$\boxed{\textbf{2.(a)}}$

▷ On a $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$, et donc par la propriété duale ; $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2\pi j x f(x)$ et donc

$$\mathcal{F}[xf(x)] = -\frac{1}{2\pi j}F'(\nu)$$

. Et finalement puisque,

$$\begin{array}{rcl} xf'(x) = (xf(x))' - f(x) & \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & 2\pi j\nu\,\mathcal{F}[xf(x)] - F(\nu) = -vF'(\nu) - F(\nu) \\ xf'(x) & \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & -vF'(\nu) - F(\nu) \end{array}$$

▷ Ou encore, en utilisant $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$ et $\mathcal{F}[\,x\,]$ déjà vues en exercice,

$$xf'(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \mathcal{F}[x] * (2\pi j\nu\,F(\nu)) = \frac{-1}{2\pi j}\,\delta'(\nu) * (2\pi j\nu\,F(\nu)) = \frac{d}{d\nu}(-\nu F(\nu)) = -vF'(\nu) - F(\nu)$$

<**4 pts**>

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$
En utilisant la propriété de la TF sur la dérivée, et la relation précédente, on obtient,

$$\begin{array}{rcl} f(x) + f''(x) + xf'(x) = 0 \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu) + (2\pi j\nu)^2F(\nu) - vF'(\nu) - F(\nu) & = & 0 \\ -4\pi^2\nu^2F(\nu) - \nu F'(\nu) & = & 0 \qquad <\textbf{2 pts}> \end{array}$$

Et en résolvant cette équation différentielle dans le domaine spectral, on trouve,

$$\begin{array}{rcl} -v\,F'(\nu) & = & 4\pi^2\nu^2F(\nu) \\ \dfrac{F'(\nu)}{F(\nu)} & = & -4\pi^2\nu \\ \ln|F(\nu)| & = & -2\pi^2\nu^2 + K_1 \\ F(\nu) & = & C_1^{st}.\exp(-2\pi^2\nu^2) \quad <\textbf{2 pts}>. \end{array}$$

Sachant que $\exp(-\pi x^2) \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-\pi\nu^2)$ et la propriété de dilatation/contraction de la transformée de Fourier, on trouve finalement $f(x) = C_2^{st}.\exp(-x^2/2)$ où C_2^{st} est une constante. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$

$$\exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \exp(-\pi\nu^2)\exp(-\pi\nu^2) = \exp(-2\pi\nu^2)$$

Donc, $\exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2) = \mathcal{F}^{-1}[\exp(-2\pi\nu^2)] = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{\pi}{2}x^2)$.
<4 pts>

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$
En utilisant le résultat de la question précédente,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2)\exp[-\pi(x-t)^2]\,dt = \exp(-\pi x^2) * \exp(-\pi x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{\pi}{2}x^2)$$

<4 pts>

II. Spectre de Fourier (28 pts)

1. Les images 1 à 4 de la Fig. 1 représentent le module du spectre de Fourier des différentes images (a) à (d). Indiquer, pour chacun des spectres, à quelle image il correspond. Justifier chaque réponse par les caractéristiques présentes dans l'image.
   <8 pts>

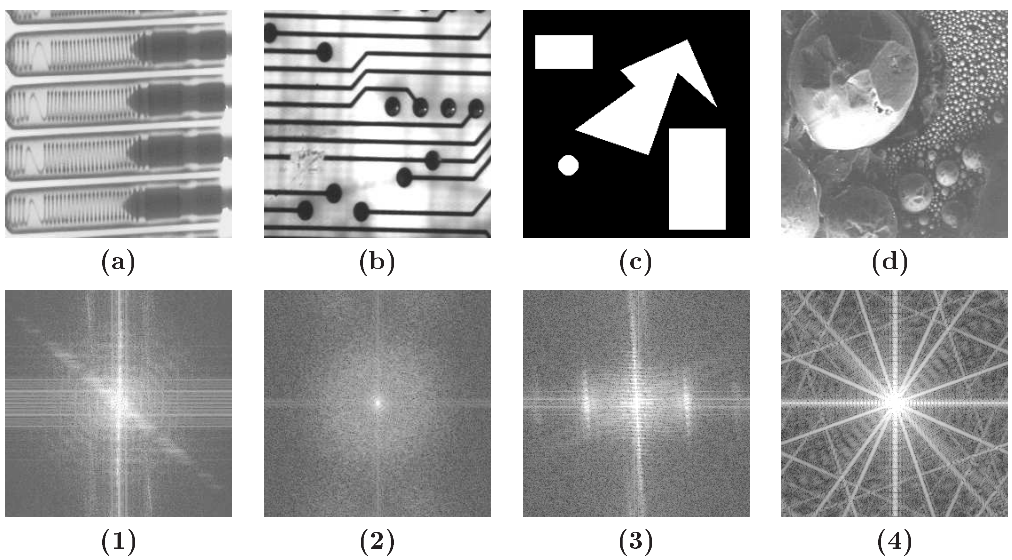


FIG. 1 – Images et leur module du spectre de Fourier en ordre aléatoire.

2. Quelle particularité à le spectre de phase ou la partie imaginaire d'un signal paire ?
   <2 pts>
3. Quelle sorte d'image obtiendrait on, si après calcul de la transformée de cette image, on inversait (i.e., on multipliait par -1) tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier obtenue et si on faisait une transformée de Fourier inverse finale (en laissant la partie réelle inchangée) ? Justifier votre réponse en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier.
   <5 pts>
4. Soit une séquence d'images que l'on modélise par la fonction $f(x, y, t)$, x et y étant la position du pixel et t prenant des valeurs entières représentant le numéro de l'image dans la séquence.

(a) On désirerait calculer la transformée discrète 3D de ce volume de donnée. Dire comment cela pourrait être fait à partir de transformées de Fourier discrète 2D et transformées de Fourier discrète 1D ?
<4 pts>

(b) Supposons que dans séquence d'image $f(x, y, t)$, une région (ou l'image entière) subit une translation pure de vitesse (ou vélocité) (v_x, v_y), nous savons que la relation qui lie l'image $f(x, y, t)$ et cette vélocité est exprimée par la relation suivante,

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, t) + v_y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \tag{2}$$

En posant $\mathcal{F}(f(x, y, t)) = F(\nu_x, \nu_y, \nu_t)$, que devient cette équation dans le domaine spectral.
<5 pts>

(c) En déduire comment on peut estimer le couple (v_x, v_y) donnant la vitesse de translation dans le domaine spectral.
<4 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

$\triangleright$ **c-4** : l'image est binaire et synthétique et fait donc apparaître des transitions ou discontinuités spatiales très nettes qui vont se matérialiser dans son spectre d'amplitude par des fréquences spatiales élevées et des fort coefficients de module du spectre dans la direction perpendiculaire à toutes les transitions blanche-noire visibles dans l'image. Il s'agit donc, sans ambiguïté, de l'image 4.
<2 pts>

$\triangleright$ **d-2** : l'image présente des formes présentant des transitions de différentes importances et des formes différentes qui vont se traduire spectralement par une diversité de fréquence dans le domaine spectral. Il s'agit donc de l'image 2.
<2 pts>

$\triangleright$ **a-3** : Un type de transitions existe dans l'image (horizontale légèrement diagonale) expliquant la ligne presque vertical de forts coefficient dans le module du spectre de l'image 3. De plus un motif se répète (4 fois) suivant l'axe des y et une discrétisassions de 4 ou 5 pixels suivant l'axe des fréquences en y peut être vues sur l'image 3.
<2 pts>

$\triangleright$ **b-1** : Deux types de transitions (horizontales et diagonales droites) existent dans l'image et correspondent à deux type de fort coefficients spectraux sur une orientation perpendiculaire aux deux précédentes transitions.
<2 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Le spectre de phase ou la partie imaginaire d'un signal paire est nulle.
<2 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

• L'opération qui consiste à multiplier par -1.0 tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier est l'opération qui prend le conjugué du spectre complexe, i.e., l'opération $F(u, \nu) \triangleright F^\star(u, \nu)$.

Or on a la propriété suivante :

$$f(-x, -y) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad F^\star(u, \nu)$$

Donc par transformée de Fourier inverse, on va réaliser spatialement l'opération $f(-x,-y)$ qui correspond, puisque l'image est périodique à l'infinie en ligne et en colonne (car on a utilisé la transformé de Fourier discrète), à une rotation de 180 degré de l'image.

• On pourrait résonner aussi de la façon suivante ; l'opération qui consiste à multiplier par -1.0 tous les coefficients de la partie imaginaire de la transformée de Fourier est l'opération qui multipliera la phase du signal par -1 et laissera inchangé le module du spectre du signal. L'image sera la même mais donc déphasé d'un angle π, ce qui correspond pour l'image à une rotation d'angle π radian ou d'angle 180 degré.

• Cela se voit aussi mathématiquement de la façon suivante, multiplier par -1.0 tous les coefficients de la partie imaginaire = multiplier la phase du signal par -1 et laissera inchangé le module du spectre du signal et le signal $f(x)$ se reconstruit par $f(x) = -\sum_{\nu} F(u)\exp(\frac{2\pi j \nu x}{N})$, ce qui correspond pour l'image à une reconstruction avec une rotation d'angle 180 degré.

<5 pts>

$\boxed{\textbf{4.(a)}}$

Grâce à la propriété de séparabilité de la transformée de Fourier, on devrait d'abord calculer pour chaque valeur de t une transformé 2D et ainsi réaliser l'opération $f(x,y,t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} F(\nu_x,\nu_y,t)$, puis ensuite sur toute les lignes temporelles, pour chaque (ν_x,ν_y) utiliser finalement une transformé 1D.

<4 pts>

$\boxed{\textbf{4.(b)}}$

$$v_x\,\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,t) + v_y\,\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t) = 0 \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad 2\pi j\,F(\nu_x,\nu_y,\nu_t)\Big(v_x\nu_x + v_y\nu_y + \nu_t\Big) = 0$$

l'équation (2) devient donc $v_x\nu_x + v_y\nu_y + \nu_t = 0$ qui est l'équation d'un plan dans le domaine spectral.

<5 pts>

$\boxed{\textbf{4.(c)}}$

Le plan de maximum d'énergie spectral sera le plan d'équation $v_x\nu_x + v_y\nu_y + \nu_t = 0$. Trouver ce plan, c'est trouver v_x et v_y.

<4 pts>

III. Filtrage (26 pts)

1. En imagerie médicale, lorsqu'on veut caractériser un flou Gaussien (i.e., un flou engendré par une PSF Gaussienne), on utilise, non pas la variance de la Gaussienne (ou son écart type comme il est habituellement le cas en traitement du signal) mais son FWHM, i.e. son "Full width at half maximum", ou après traduction, sa largeur à mi-hauteur.
   (a) Trouver $\sigma = f(\text{fwhm})$, i.e., la relation liant l'écart type d'une Gaussienne en fonction de son "fwhm", largeur à mi hauteur.
   <6 pts>
   (b) En utilisant la formule précédente, trouver le sigma (en pixel) du filtre de convolution Gaussienne suivant $\boxed{1\,|\,2\,|\,1}$.
   <4 pts>
2. (a) Trouver le masque de convolution équivalent à $\boxed{1\,|\,1} * \boxed{1\,|\,1} * \boxed{1\,|\,1} * \boxed{1\,|\,1}$ ou $*$ est l'opérateur de convolution.
   <5 pts>

(b) Est ce un masque de convolution Gaussien ? Justifier votre réponse.
<**5 pts**>

3. (a) Expliquer pourquoi le filtre passe haut n'amplifie pas réellement le bruit blanc mais plutôt et plus précisément diminue le Rapport Signal sur Bruit du signal.
<**6 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$

L'équation de la Gaussienne est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-x^2/2\sigma^2)$. La hauteur maximale de la Gaussienne (en $x=0$) est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ et la mi hauteur de la Gaussienne se trouve donc en $x=\frac{1}{2}\,\text{FWHM}$ tel que $\exp(-x^2/2\sigma^2)=\frac{1}{2}$, i.e., en

$$\sigma = \frac{\text{FWHM}}{2\sqrt{2\ln 2}}$$

<**6 pts**>

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$

La largeur à mi hauteur de ce filtre de convolution Gaussienne est 2 pixels et donc $2=\text{FWHM}$ et donc équivalent à $\sigma=\frac{2}{2\sqrt{2\ln 2}}=\frac{1}{\sqrt{2\ln 2}}\approx 0.85$.
<**4 pts**>

$\boxed{\textbf{2.(a)}}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline\end{array} * \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline\end{array} * \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline\end{array} * \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&1\\\hline\end{array} * \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&6&4&1\\\hline\end{array}$
<**5 pts**>

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$

La convolution de deux Gaussienne reste une Gaussienne (cf. Exo. I.3.(a)). Cependant le filtre obtenu ne conserve pas la moyenne de l'image contrairement au filtre Gaussien. Il serait donc parfaitement Gaussien si on ajoutait le facteur 1/16 devant. Il deviendrait aussi un filtre binomial.
<**5 pts**>

$\boxed{\textbf{3.}}$

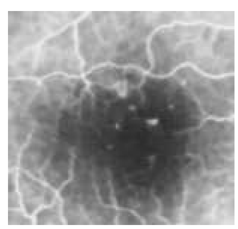
Le filtre passe haut enlèvera la bonne majorité du spectre de l'image qui se concentre surtout vers les basses et moyennes fréquences et enlèveras une proportion de bruit qui sera proportionnelle à la partie passante de sa fonction de transfert (car le bruit blanc se répartie spectralement uniformément) De ce fait le filtrage réduira le rapport signal sur bruit d'un signal.
<**6 pts**>

IV. Morphologie Mathématique (24 pts)

1. Comment pourrait on facilement enlever les chiffres sous ce code barre avec un traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique ?
<**6 pts**>

2. Quel traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique permettrait de faire l'opération inverse, i.e., éliminer les codes barres et garder les chiffres ?
   <**6 pts**>
3. Comment pourrait-on facilement compter le nombre de pastilles blanches restantes et déterminer leur tailles avec un traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique ? (Nota : on sait que les pastilles sont rondes.)
   <**6 pts**>

4. Quel traitement utilisant les outils de la morphologie mathématique permettrait la détection de micro-anévrismes sur une angiographie des vaisseaux sanguins de l'oeil. Les micro-anévrismes sont les taches claires au centre dans la partie foncée de l'image. On pourra remarquer la chose suivante : ceux-ci sont compacts et se trouvent dans une surface foncée alors que les vaisseaux sanguins sont longs dans une surface claire.
   <**6 pts**>



Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

• Par exemple : Ouverture par un élément morphologique linéique et verticale, par exemple une ligne vertical de largeur 1 pixel et de longueur supérieur à l'épaisseur (en pixels) maximal des chiffres. Ce traitement pourrait se faire sur l'image binarisée ou en niveau de gris.

• De façon presque équivalente, on pourrait aussi squelettiser l'image. Le traitement qui consisterait ensuite a faire un filtre médian sur un voisinage 1 ligne et n colonnes (n impaire supérieur à trois) permettrait de supprimer les chiffres.
<**6 pts**>

$\boxed{\textbf{2.}}$

• Par exemple : Ouverture par un élément morphologique linéique et horizontal, par exemple une ligne horizontale de longueur 1 pixel et de largeur supérieur à l'épaisseur (en pixels) maximal des barres code. Ce traitement pourrait se faire sur l'image binarisée ou en niveau de gris.

• Si on fait le traitement précèdent, il suffirait de faire une différence entre l'image originale et l'image obtenue en 1.a.
<**6 pts**>

$\boxed{\textbf{3.}}$

• Une binarisation permettrait d'obtenir les pastilles blanches sur fond noir. Une technique utilisant une érosion avec des opérateur morphologiques circulaires de plus en plus grand permettrait, pour une certaine taille de l'élément morphologique, de supprimer toutes les régions blanches de l'image binarisée, permettant ainsi de déterminer à la fois la taille de la pastille (i.e., la taille de l'élément morphologique circulaire utilisé) et le nombre de pastille (i.e., le nombre de pixels blanc éliminé par cette opération divisée par la taille de l'élément morphologique circulaire utilisé.

• Une binarisation permettrait d'obtenir les pastilles blanches sur fond noir. Une squelettisation permettrait en final d'avoir autant de points blancs que de pastilles.
<6 pts>

$\boxed{\textbf{4.}}$

• On pourrait segmenter en deux classes l'images, pour obtenir une image binaire (a) utiliser une ouverture morphologique pour enlever les micro-anévrismes, permettant d'obtenir une image (b) puis faire $|(a) - (b)|$.

• Il est possible d'obtenir dans un premier temps, une image sans micro-anévrisme par une succession d'ouvertures morphologiques avec des petites lignes de différentes orientations.

Il suffit ensuite de soustraire cette image sans micro-anévrisme à l'image de départ pour obtenir les micro-anévrisme. Un simple seuil permettrait d'obtenir le résultat.

<6 pts>

V. Segmentation (10 pts)

1. Expliquer qualitativement à quoi sert le facteur de décroissance de température dans le recuit simulé ? A quoi est équivalent l'algorithme de recuit simulé lorsque ce facteur de température tend vers zéro.
   <5 pts>
2. Expliquer quels sont les deux intérêts majeurs de prendre des attributs pour caractériser une textures plutôt que de prendre, comme attribut l'ensemble des niveaux de gris contenu dans une petite fenêtre ?
   <5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Le facteur de température décroissant permet à l'algorithme d'optimisation de recuit simulé de sortir des *minima* locaux de la fonction d'énergie et ainsi tester différente configurations dans sa recherche du *minima* global (associé à la solution optimale). Une température très grande nous donne un algorithme qui va explorer de façon très aléatoire puis en se refroidissant finira par devenir de plus en plus déterministe,

<3 pts>

se transformant finalement lorsque $T \rightarrow 0$ en algorithme de descente de gradient a pas fixe, purement déterministe que l'on appelle aussi ICM.

<2 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Pour deux raisons principales :

1. Pour diminuer la dimensionnalité du problème. **<2.5 pts>**
2. Pour trouver des caractéristiques attributs qui soient le plus invariant possible au facteur d'échelle, rotation, illumination, warping, bruit, luminosité, distorsion, transformation diverses, etc. **<2.5 pts>**

VI. Problèmes mal posés (10 pts)

1. Répertorier tous les termes d'énergies *a priori* vu en cours, permettant de rendre *bien posé* un problème initialement *mal posé* et résumer en quelques mots leur signification (i.e., dire quel type de solutions favorisent ou pénalisent t-ils).
   <4 pts>
2. Essayer de trouver un terme d'énergie *a priori*, non vue en cours, permettant de contraindre le problème mal posé de votre choix et exprimer en quelques mots, ou avec une formule mathématique sa signification et son intérêt pour le problème que vous avez considéré.
   <3 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

- Terme P_n/P_I du filtre de Wiener $\triangleright$ prend en compte le rapport Signal sur bruit du problème et permet de ne pas diviser par 0.
- Restoration de Tichonov Miller avec énergie a priori $\triangleright$ $\|c * \hat{f}\|$ ou $*$ est l'opérateur de convolution et c est le laplacien, pénalisant les solutions exhibant des hautes fréquences.
- Segmentation Markovienne avec énergie a priori $\triangleright$ $\sum_{c \in \mathcal{C}} \beta(1 - \delta(x_s, x_t)$, pénalisant les solutions inhomogènes.
- Segmentation par snake avec énergie a priori mesurant l'angle entre trois noeuds consécutifs, pénalisant les contours non lisses.

<4 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Il existe, dans le cadre de la restauration différents modèles a priori, l'un des plus simples pénalise les solutions ayant des niveaux de gris in-homogènes avec une fonction quadratique, ou une fonction valeur absolue.

Il existe aussi celui de Buades ou Efros qui dit que l'image possède des auto-similarités spatial (une image est hautement redondante).

Il existe celui de Barnsley qui dit que l'image possède des auto-similarités spatial à différente échelle (modèle fractal).

Il existe beaucoup de modèle d'image modélisant le fait que l'image est un signal se reconstruisant avec un nombre limité de composantes de bases (modèle pénalisant la complexité du signal image, appelé aussi *sparsity* (peu de coefficients spectrales différents de zéros)).

A noter que pour une image particulière, comme celle utilisée en astronomie du ciel étoilé et indiqué par un étudiant, il y a l'équivalent du modèle d'image précédent mais dans le domaine spatial. Une sorte de *sparsity* spatiale contraignant l'image restaurée astronomique (montrant des étoiles) à avoir peu de pixel différent de zéros, limitant ainsi la dégradation de flou de cette image puisqu'une étoile sans flou est représentée idéalement par un point ponctuel (un seul pixel d'intensité 255).

<3 pts>