DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *03/12/2007*

I	Transformée de Fourier (32 pts)
II	Représentation & Filtrage Spatial (22 pts)
III	Représentation & Filtrage Fréquentiel (22 pts)
IV	Misc. (44 pts)
Total	120 points

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS PERSONNELS AUTORISÉS

I. Transformée de Fourier (32 pts)

1. (a) Soit $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ (i.e., $F(\nu)$ représentant la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$). Calculer par la méthode de votre choix
<**3 pts**>

$$\mathcal{F}[\,x^2 f(x)\,]$$

   (b) Utiliser la relation définie précédemment pour calculer la TF de $x^2 \exp(-x)$ (pour $x > 0$).
<**4 pts**>

2. (a) Soit $h(x)$ la fonction (pour $x > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) \quad = \quad \exp(-x) \tag{1}$$

Que devient l'Eq. (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?
<**3 pts**>

   (b) En déduire $H(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis sa solution $h(x)$, dans le domaine spatial.
<**4 pts**>

   (c) Comment pourrait on écrire $h(x)$ si on voulait l'exprimer sous forme de produit de convolution d'une même fonction ?
<**3 pts**>

   (d) Si on remplaçait le membre de droite de l'Eq. (1) par $\big[\,\delta(x) - \delta'(x)\,\big]$ (au lieu de $\exp(-x)$), quelle serait à nouveau la solution de cette équation différentielle ?
<**5 pts**>
Nota : On rappelle que $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$.

3. Retrouver la célèbre propriété suivante de la TF

$$\mathcal{F}[\,f'(x)\,] = (2\pi j \nu)\, F(\nu) \tag{2}$$

en utilisant le fait que 1-) $f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$, 2-) la transformée de Fourier d'une fonction décalée et 3-) le fait que, quand $x \to 0$, $\exp(x) \approx 1 + x$.
<**5 pts**>

4. Trouver le résultat de l'expression ci dessous, dans laquelle a et b sont deux réels positifs et $*$ représente l'opérateur de convolution

$$\frac{\sin \pi a x}{\pi a x} * \frac{\sin \pi b x}{\pi b x}$$

<**5 pts**>

Réponse

1.(a)

(i) La méthode la plus simple consiste à appliquer la formule de la transformée de Fourier d'une fonction dérivée seconde, i.e.

$$\mathcal{F}[\,f''(x)\,] \;=\; (2\pi j\nu)^2\, \mathcal{F}[\,f(x)\,] \;=\; -4\pi^2\nu^2\, F(\nu)$$

puis d'appliquer la propriété duale pour finalement trouver

$$\mathcal{F}[\,x^2 f(x)\,] \;=\; -\frac{1}{4\pi^2}\,F''(\nu) \qquad < \textbf{3 pts} >$$

(ii) Une autre méthode consisterait à se rappeler (ou en déduire à partir du NOTA donné dans l'énoncé) que $\mathcal{F}[\,\delta'(x)\,] = 2\pi j\nu$ et donc, par la propriété duale que $\mathcal{F}[\,x\,] \;=\; -\frac{1}{2\pi j}\,\delta'(\nu)$.
Compte tenu de ce fait, on trouve ensuite

$$\mathcal{F}[\,x^2 f(x)\,] \;=\; -\frac{1}{2\pi j}\,\delta'(\nu) * -\frac{1}{2\pi j}\,\delta'(\nu) * F(\nu) \;=\; -\frac{1}{4\pi^2}\,F''(\nu)$$

1.(b)

On trouve facilement (pour $x > 0$) $\mathcal{F}[\,\exp(-x)\,] = \frac{1}{1+2\pi j\nu}$ (fait en classe ou cf. Examen de l'année 2005). Donc, en utilisant la relation précédemment trouvée

$$\mathcal{F}[\,x^2 \exp(-x)\,] \;=\; -\frac{1}{4\pi^2}\Big(\frac{1}{1+2\pi j\nu}\Big)'' = -\frac{1}{4\pi^2}\Big(\frac{-2\pi j}{(1+2\pi j\nu)^2}\Big)' \;=\; \frac{2}{(1+2\pi j\nu)^3} \qquad < \textbf{4 pts} >$$

2.(a)

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = \exp(-x) \;\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}\; (2\pi j\nu)^2 H(\nu) + 2(2\pi j\nu)H(\nu) + H(\nu) = \frac{1}{1+2\pi j\nu} \qquad < \textbf{3 pts} >$$

2.(b)

De la relation précédente, on en déduit

$$H(\nu) = \frac{1}{(1+2\pi j\nu)^3}$$

Et en se servant de la question 1.(b), on en déduit que $h(x) = \frac{1}{2}\,x^2 \exp(-x)$ (pour $x > 0$) est une des solutions de cette équation différentielle. $<$**4 pts**$>$

2.(c)

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{(1+2\pi j\nu)^3}\Big] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{(1+2\pi j\nu)}\,\frac{1}{(1+2\pi j\nu)}\,\frac{1}{(1+2\pi j\nu)}\Big] \\ h(x) &= \exp(-x) * \exp(-x) * \exp(-x) \qquad \text{(pour x>0)} \qquad < \textbf{3 pts} > \end{aligned}$$

2.(d)

En se rappelant (ou en déduisant à partir du NOTA donné dans l'énoncé) que $\mathcal{F}[\,\delta'(x)\,] = 2\pi j\nu$, on a cette fois ci

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = \delta(x) - \delta'(x) \;\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}\; (1+2\pi j\nu)^2 H(\nu) = 1 - 2\pi j\nu$$

Et, si on revient au domaine spatial

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1-2\pi j\nu}{(1+2\pi j\nu)^2}\Big] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{2}{(1+2\pi j\nu)^2} - \frac{1}{1+2\pi j\nu}\Big] \\ &= 2\exp(-x) * \exp(-x) - \exp(-x) \qquad \text{pour x>0} \qquad < \textbf{5 pts} > \end{aligned}$$

NOTA [1]

[1] Si le deuxième membre de l'équation avai été $[\delta(x) + \delta'(x)]$, on aurait eu

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{1+2\pi j\nu}\Big] = \exp(-x) \qquad \text{pour x>0}$$

3

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\big[\,f'(x)\big] &= \frac{1}{\epsilon}\lim_{\epsilon\to 0}\ \mathcal{F}\big[f(x+\epsilon)-f(x)\big] = \frac{1}{\epsilon}\lim_{\epsilon\to 0}\ \Big\{F(\nu)\big[\exp(2\pi j\nu\epsilon)-1\big]\Big\} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\,F(\nu)\big[(1+2\pi j\nu\epsilon)-1\big] \\
\text{et donc}\qquad \mathcal{F}\big[\,f'(x)\big] &= (2\pi j\nu)\,F(\nu) \qquad <\ \mathbf{5\ pts}\ >
\end{aligned}
$$

4

Le plus facile est de *télé-porter* cette expression dans le domaine de Fourier, la résoudre dans cet espace puis revenir dans le domaine spatial, i.e.

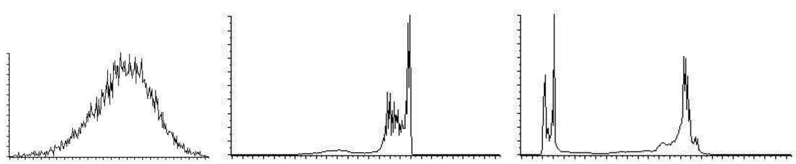
$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{\sin\pi ax}{\pi ax} * \dfrac{\sin\pi bx}{\pi bx} & \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & \dfrac{1}{|a|}\,\Pi(\dfrac{\nu}{a})\ \ \dfrac{1}{|b|}\,\Pi(\dfrac{\nu}{b}) \\
= & & = \\
\dfrac{1}{|ab|}\ \dfrac{\sin\pi cx}{\pi x} & \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & \dfrac{1}{|ab|}\,\Pi(\dfrac{\nu}{\min(a,b)})
\end{array}
$$

dans laquelle $c = \min(a,b)$.

$<$**5 pts**$>$

II. Représentation & Filtrage Spatial (22 pts)

1. Affecter à l'image représentant un ciseau, l'un des trois histogrammes représenté ci dessous en justifiant sommairement votre réponse.



(a) **(b)** **(c)**

$<$**5 pts**$>$

2. En traitement d'image, il existe une multitude de variante de filtre passe-bas, plus ou moins différents. Parmi ceux-ci, il existe le filtre que l'on appelle le FILTRE OLYMPIQUE qui consiste à faire la moyenne (dans un voisinage considéré, e.g., une fenêtre $[3\times 3]$) de toutes les valeurs de niveaux de gris sauf les deux valeurs extrêmes (min et max). Discuter l'efficacité de ce type de filtre (comparé au filtre médian et Gaussien) sur une image entachée de bruit Gaussien et sur une image entachée de bruit sel et poivre.
$<$**5 pts**$>$
3. Quelle densité de probabilité aurait le bruit poivre et sel ? Tracer sommairement à quoi il pourrait ressembler. Quel est le paramètre qui caractérise l'importance de ce bruit ?
$<$**5 pts**$>$
4. Affecter à chaque flèche le traitement (filtre ou opération ponctuelle) qui lui correspond parmi les traitements suivant :
   (a) Égalisation

(b) Filtre moyenneur

(c) Filtre médian

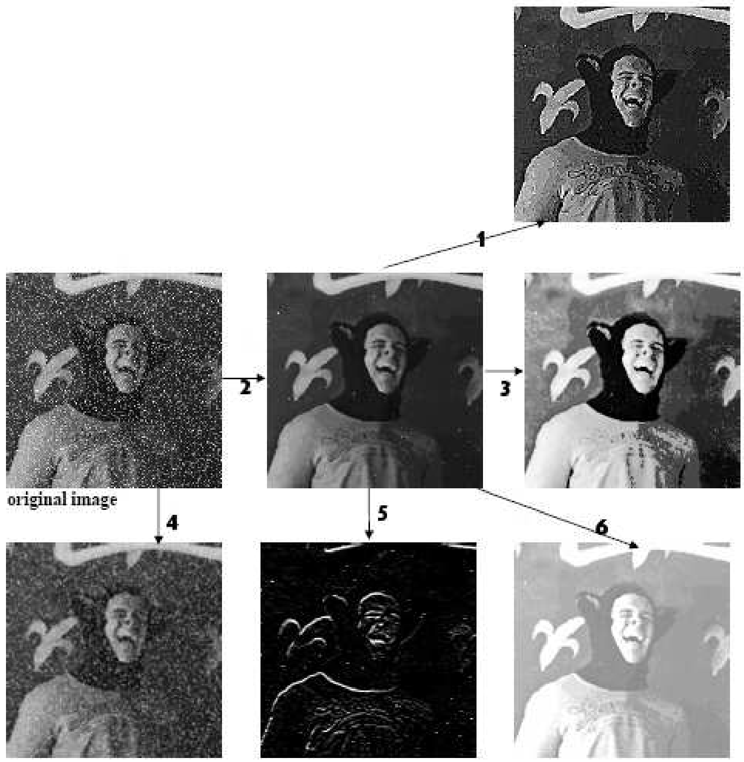
(d) Rehausseur de contour

(e) Filtre de Prewitt

(f) Rehaussement de luminance (i.e., ajout d'une constante sur l'image)

<**7 pts**>

NOTA : VOUS N'AVEZ PAS BESOIN DE JUSTIFIER VOTRE RÉPONSE, DONNER SEULEMENT LA BONNE RÉPONSE.



Réponse

$\boxed{1}$

C'est l'histogramme (b) qui représente l'image du ciseau. L'histogramme doit être forcément bimodal puisque un objet d'une certaine couleur se détache du background. De plus, il existe un peu plus (en proportion) de pixels appartenant au background que de pixel appartenant à l'objet et les niveaux de gris du background ont une variance faible (plus faible que celle appartenant à l'objet), nous renseignant de ce fait que le deuxième pic de l'histogramme est plus important en hauteur et moins important en largeur que le premier pic associé au pixels appartenant à l'objet. De plus, il existe des niveaux de gris sur l'objet (au niveau des lames) qui se rapprochent beaucoup du background nous indiquant que ces deux pics sont très proche l'un de l'autre.

<**5 pts**>

$\boxed{2}$

Pour une image entachée de bruit Gaussien, ce filtre devrait se comporter de façon similaire au filtre Gaussien avec les mêmes défaut de ce dernier, lorsqu'on augmente la taille du voisinage ; les contours deviennent de plus en plus flou (pour une fenêtre $[3 \times 3]$, le fait de faire une moyenne sur 9 valeurs ou $9 - 2 = 7$ valeurs de niveaux de gris ne changerait pas grand chose à la préservation des contours de l'image.

Pour une image entachée de bruit sel et poivre, il devrait se comporter similairement au filtre médian pour un bruit où les agrégats ne sont pas plus gros qu'un pixel. Par contre lorsque les agrégats de bruits ont une épaisseur supérieurs à un pixel, ce filtre devrait se comporter comme le filtre Gaussien, c'est à dire pas très bien, et rien n'y changerait, même si on augmentait la taille du voisinage.

<**3 pts | 1 pts | 1 pts**>
<Raisonnement | Taille Voisinage | Taille agrégats >

$\boxed{3}$

Deux pics plus ou moins large a chaque extrémité de l'histogramme. <**2.5 pts**>

Le paramètre qui caractérise l'importance de ce bruit est soit :

– la proportion des pixels affectée (exprimé en pourcentage, par exemple un bruit poivre et sel de 10% affecterait 10% des pixels de l'image).

– soit la grosseur des agrégats de ces taches poivres et sel.

<**2.5 pts**>

Nota : L'une ou l'autre des deux réponses donne la totalité des points, les deux réponses ensemble donneraient un BONUS +2

$\boxed{4}$

1. (3-a) Égalisation
2. (4-b) Filtre moyenneur
3. (2-c) Filtre médian
4. (1-d) Rehausseur de contour
5. (5-e) Filtre de Prewitt (1 direction)
6. (6-f) Rehaussement de luminance (ajout d'une constante sur l'image)

<**7 pts**>

III. Représentation & Filtrage Fréquentielle (22 pts)

1. (a) Rappeler quelle est la propriété de la Transformée de Fourier (TF) qui permet de dire que le spectre de cet oiseau en cage (voir figure **(a)** ci dessous) est constitué du spectre de l'oiseau plus le spectre créé par la cage de l'oiseau (i.e., la succession de lignes blanches verticales équidistantes).
<**2 pts**>

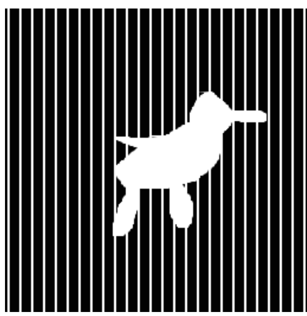
   (b) Quel spectre va créer la cage de l'oiseau dans le domaine spectral et s'additionnera au spectre de l'oiseau ? Plus précisément, faire un graphique ou (au choix) donner une expression mathématique simplifiée du spectre créé par cette cage (représentée par cette succession de lignes blanches verticales équidistantes et que l'on supposera d'épaisseur supérieure à un pixel).
<**8 pts**>

   (c) En déduire le traitement dans le domaine spectral permettant d'enlever la cage de l'oiseau (i.e., quel est le type de filtre dans le domaine fréquentiel qui permettrait de retrouver l'image de l'oiseau sans cage).
<**2 pts**>

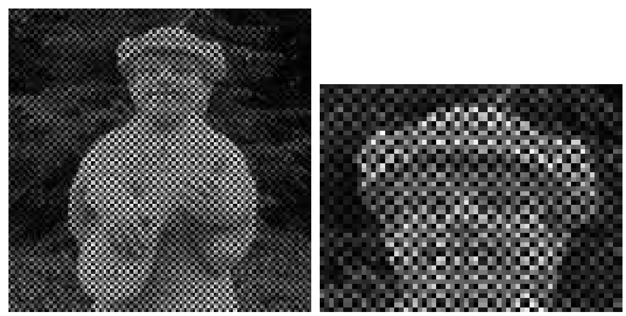
2. L'image **(b)** est une image qui a été numérisée sur un journal. Cette image présente un défaut que l'on appelle tramage et qui est en fait une dégradation de l'image créée par la répétition d'un motif périodique haute fréquence s'appliquant sur l'image. Dans le cas le plus simple (et c'est le cas ici), le tramage est un peigne de Dirac en 2D (quelquefois la trame est un peu plus compliquée qu'un simple peigne de Dirac). L'opération de détramage consiste donc à restituer les niveaux de gris avant que ceux ci ne soient affectés par cette dégradation.

   (a) Indiquer un filtre simple qui pourrait éliminer ce type de problème. Est-ce que le filtre médian est approprié pour restaurer ce type d'image ? Justifier votre réponse.
   <5 pts>

   (b) A quoi ressemblera le spectre de l'image dégradée comparativement au spectre de l'image non dégradée ?
   <5 pts>



(a)



(b)

Réponse

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ Linéarité. **<2 pts>**

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$

Si on considère que l'axe des x représente les différentes colonnes de l'image et l'axe des y, celui des lignes, on pourrait donner à la cage la représentation mathématique suivante ; Suivant y, ces barres verticales sont des constantes ($\mathrm{C}^{st}(y)$) et en x on reconnaît le signal porte de largeur a qui se répète toute les période T (donc $\Pi(\frac{x}{a}) * \text{Ш}_T\,(x)$). En supposant la correspondance $x \rightleftharpoons u$ et $y \rightleftharpoons \nu$

$$\text{Fonction Cage} = \mathrm{C}^{st}(y) \cdot \; \Pi(\frac{x}{a}) * \text{Ш}_T\,(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \delta(\nu) * a\,\mathrm{sinc}(au) \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T}}\,(u)$$
$$\propto \quad \delta(\nu) \;\cdot\; \mathrm{sinc}(au) \cdot \text{Ш}_{\frac{1}{T}}\,(u)$$

Le spectre de la cage représente donc un sinus cardinal dont on a pris des valeurs régulièrement espacées (de $1/T$) et centrée en u (ligne horizontale) et de largeur 1 pixel.

<8 pts>

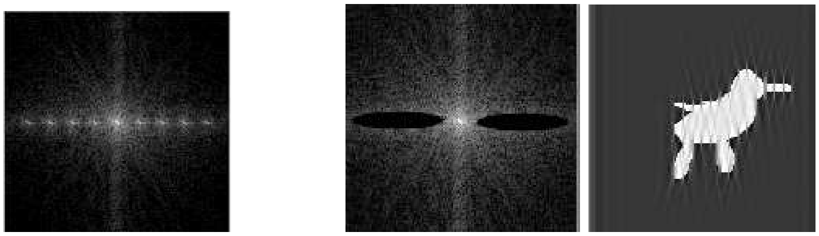
< 4 pts pour u | 4 pts pour ν >

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$

Si on réussit à enlever le spectre de la cage, sans enlever trop de basses fréquences qui constituent aussi la forme de l'oiseau, on réalisera le filtrage qui permettra de retrouver l'image de l'oiseau sans cage. Ce filtrage serait un filtre combinant un filtre à rejecteur de bande et un filtre passe-bas dont l'application sur le spectre de l'image de l'oiseau avec cage ressemblerait à la figure ci-dessous.

<2 pts>

<Tous les points pour un bon principe>



NOTA : Les trois figures ci-dessus nous montre le spectre de l'oiseau en cage (on peut voir le spectre créé par la cage sur l'axe horizontal) et l'opération permettant d'enlever la cage dans le domaine spectral.

2.(a)

Une opération simple serait un filtre moyenneur ou Gaussien <**3 pts**>.

Un filtre médian ne serait pas approprié pour ce type de problème car il existe la moitié des pixels qui sont dégradé dans l'image. La valeur médiane prise par le filtre médian serait donc souvent une valeur de la trame et non un niveaux de gris de l'image. <**2 pts**>

2.(b)

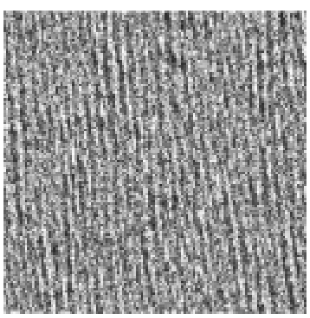
$$\text{Img tramée} = \text{Img} \cdot \text{Ш}_{T=2\text{pixels}}(\nu) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \text{Spectre de l'Img tramée} = \text{Spectre de l'Img} * \text{Ш}_{\frac{1}{T}=\text{moitié de l'img}}(\nu)$$

La présence de haute fréquences dues au changement abruptes d'intensités <**3 pts**>. Plus précisément, le spectre de l'image tramée se répétera 2 fois en u et en ν comparativement au spectre de l'image non tramée <**3 pts**>. On comprend bien (question précédente donc pourquoi Un filtra passe-bas permettra de supprimer cette répétition et de retrouver la continuité des niveaux de gris de l'image originale).

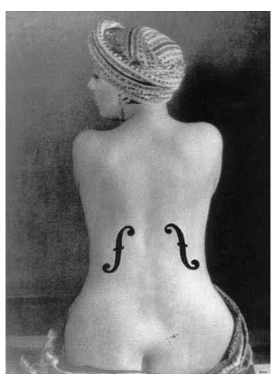
IV. Misc. (44 pts)

1. Expliquer en une phrase à quoi est du le repliement (ou recouvrement ou chevauchement) spectral et le recouvrement (ou chevauchement ou recouvrement) spatial.
   <**5 pts**>
2. On veut faire un filtrage spatial adaptatif sur une image dégradée par un bruit Gaussien de variance égale à $\sigma^2 = 100$. A quelles valeurs serait il judicieux de fixer le seuil de ce filtre adaptatif ?
   <**5 pts**>
3. L'image **(a)** ci-dessous est une vraie image SAR (Synthetic Aperture Radar ou en français radar à synthèse d'ouverture) prise par un satellite de la surface d'un océan. L'image est bruitée mais on peut voir clairement avec l'oeil les différentes vagues périodique (vue d'en haut) qui apparaissent à sa surface.
   On vous demande de trouver un système de traitement d'image qui vous permettrait de trouver automatiquement (et de façon le plus robuste possible), à partir de ce type d'images, la période, ou la largeur (en mètres) des vagues. (Cette information est importante pour la météo pour savoir si la mer est calme ou déchaîné (plus une vague est large, plus elle est haute : information importante aussi pour les surfers !).
   Essayer d'être le plus précis possible et on supposera que la résolution spatiale ($= \Delta x$) ou période d'échantillonage est de 2 mètres et que l'image est de taille 128×128 pixels.
   <**10 pts**>

4. L'image **(b)** ci dessous est une photo de Emmanuel Rudnitsky, dit Man Ray peintre et photographe (mort en 1976). Une de ces photographie célèbre s'intitule *le violon d'ingres* (1924) et représente la photographie d'une femme nue assise de dos. Par quelques coup de peinture noire, l'auteur s'est amusée à *transformer* le corps de cette femme en violon, (jouant ainsi avec l'expression populaire “avoir un violon d'ingres”, l'auteur révèle à travers son art, l'érotisme de ce corps et sa propre passion pour un de ces modèle (Alice prin dite *kiki de Montparnasse*)).
   Donner une technique de traitement d'image qui permettrait efficacement *d'effacer les deux coups de pinceaux* de l'auteur (i.e., retrouver la photo telle qu'elle était avant ces coups de pinceaux).
   <5 pts>
5. Imaginons que l'on ait une image de bruit blanc Gaussien de moyenne (en niveaux de gris) 128 et de variance $\sigma^2 = 800$, i.e, un bruit qui suit une densité de probabilité Gaussienne $\mathcal{N}(\mu = 128, \sigma^2 = 800)$.
   (a) Donner l'intervalle des niveaux de gris dans lequel sera compris 99.5% des pixels ?
   <2 pts>
   (b) Si on filtre cette image de bruit par un filtre moyenneur $[3 \times 3]$ et que l'on recalcule la moyenne et la variance de ce bruit (sur l'image filtrée). Indiquer 1) si la moyenne et la variance de ce bruit serait identique, supérieur ou inférieur ? Justifier votre réponse. 2) quelle serait vraisemblablement une estimation de sa moyenne et sa variance ? Justifiez votre réponse par rapport à ce qui à été dit en cours en disant aussi le nom de la propriété qui vous permettra de conclure sur cette dernière question.
   <8 pts>
6. L'image **(c)** est une image satellitaire de la surface de la terre prise par Google earth représentant une chaîne montagneuse en Amérique du sud. Que proposeriez vous, comme traitement simple, pour améliorer la visibilité des détails de l'image dans ce qui semble être l'oeil et le sourcil de ce visage (d'indien ?) pour en savoir plus ? Justifier brièvement votre réponse.
   <4 pts>
7. Donner (schématiquement) la représentation frontière (Boundary representation) du triangle équilatéral (Figure **(d)**) représentant une forme dont les contours ont été préalablement binarisée.
   <5 pts>

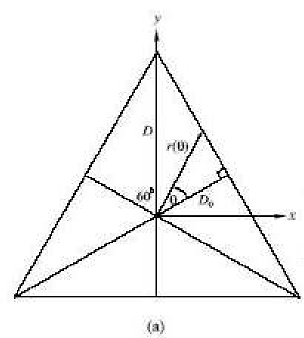


(a)



(b)

(c)



(d)

Réponse

$\boxed{1}$

Le repliement spectral est du à une période d'échantillonage trop petite (ne respectant pas le théorème de Shannon).

<2.5 pts>

Le repliement spatial existe quant on fait une convolution dans le domaine fréquentiel (donc en utilisant la TF discrète qui implique la périodisation du signal de départ).
<2.5 pts>

$\boxed{2}$

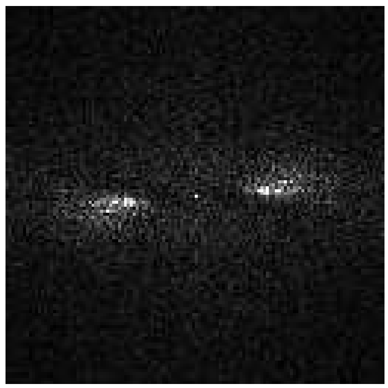
seuil $= 3\,\sigma$
permettant ainsi de prendre les zones de région homogène filtrée avec une probabilité supérieure à 99.5%.
<5 pts>

NOTA : La réponse seuil $= 2\,\sigma$ a été considéré aussi comme valable et juste.

$\boxed{3}$

Pour identifier la période des vagues, la façon la plus précise est, dans un premier temps de calculer le spectre de cette image. Celui ci montrerait clairement deux valeurs maximales de part et d'autre de l'origine que l'on peut facilement trouver automatiquement. La valeur max du spectre, correspondant à la fréquence de ses vagues se situerait de part et d'autre de l'origine, **<5 pts>** dans notre cas à $N_p = 24$ pixels ou $24\Delta u$ avec Δu, la résolution spectrale égale à $\Delta u = 1/(N \cdot \Delta x)$, donc

$$\text{Fréquence des vagues} = \frac{N_p}{N \cdot \Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \text{Période des vagues} = \frac{N \cdot \Delta x}{N_p} \qquad \text{en mètres} \qquad <\mathbf{5pts}>$$



NOTA 1- : Dans notre cas, on obtiendrait le spectre ci dessus, la valeur de $N_p = 24$ et donc la PÉRIODE DES VAGUES $= \frac{128\times 2}{24} = 10.66$ en mètres.

NOTA 2- : Après avoir débruité l'image, avec un filtre passe bande centré sur les deux valeurs maximales du spectre (de part et d'autre de l'origine), on pourrait ensuite revenir dans le domaine spatial, puis après binarisation de cette image, et après érosion avec un élément structurant de plus en plus grand jusqu'à ce que l'image érodée devienne blanche. La taille de l'élément structurant trouvé dans ce cas avec le fait que la grosseur des pixels est, par définition, $\Delta x = 2m$ pourrait permettre une bonne estimation de la largeur des vagues.

$\boxed{4}$

- Une opération d'ouverture et fermeture (morphologie mathématique) localement et sur l'image en niveau de gris (i.e., sur l'imagette encerclant et centrée autour de chaque dégradation [facilement trouvable puisque constitué de pixels essentiellement noir]) avec un élément structurant de grosseur supérieur à la taille de la dégradation appliqué sur l'enveloppe de cette image (en niveaux de gris) permettrait *"d'enlever"* les deux traits noirs fait par l'auteur et permettrait de *"retrouver"* (dans une certaine mesure) les niveaux de gris dans cette zone.
- De même, un traitement local, du style filtrage médian avec un voisinage (carré ou circulaire) qui serait supérieur à deux fois la grosseur de cette dégradation permettrait d'obtenir des résultats de restauration convenable.
- La plus simple et peut être la moins efficace restauration consisterait a calculer la valeur moyenne des niveaux de gris autour de chaque dégradation et remplir la zone noire avec cette moyenne.

<**5 pts**>

$\boxed{\mathbf{5}}$

l'intervalle des niveaux de gris dans lequel sera compris 99.5% des pixels serait $[128 - 3\sigma\ ,\ 128 + 3\sigma] = [\approx 43 \ \ \approx 213]$.

<**2 pts**>

Après filtrage par un masque de convolution moyenneur $[3 \times 3]$, la moyenne serait identique (le filtrage passe-bas **doit** conserver la moyenne de l'image) <**1 pts**> mais sa variance serait plus faible (car le bruit moins important) <**1 pts**>.

Plus Précisément, l'écart type du bruit serait approximativement divisé par $\sqrt{\text{Nb. de coefficient du filtre}} = \sqrt{9}$ (ou sa variance divisée par 9) et on trouverait approximativement un bruit distribuée selon $\mathcal{N}(\mu = 128, \sigma^2 \approx 89)$, i.e., un écart type du bruit ≈ 9.4. <**4 pts**>

La propriété d'ergodicité permet de rapprocher cette expérience avec celle sur le moyennage d'ensemble d'images entachées d'un bruit Gaussien. <**2 pts**>

NOTA : Dans notre cas, on trouverait pour le bruit généré par l'ordinateur utilisé en TP une valeur de σ calculée sur l'image filtrée égale à $\sigma = 9.59$.

$\boxed{\mathbf{6}}$

L'information couleur n'étant pas très importante dans cette application, il serait préférable de travailler avec l'image des niveaux de gris. Une égalisation d'histogramme serait un traitement qui nous permettrait d'avoir un peu plus de précision au niveau de ce que sont réellement les contours de ce soit-disant oeil d'indien. Pour visualiser plus de détails dans les contours (représenté par des niveaux de gris sombre), un étirement d'histogramme aux niveaux des zones de niveaux de gris sombre nous permettrait d'avoir un peu plus de contraste des contour et peut être apprécier plus justement la ressemblance de ce contour avec celle d'un véritable oeil.

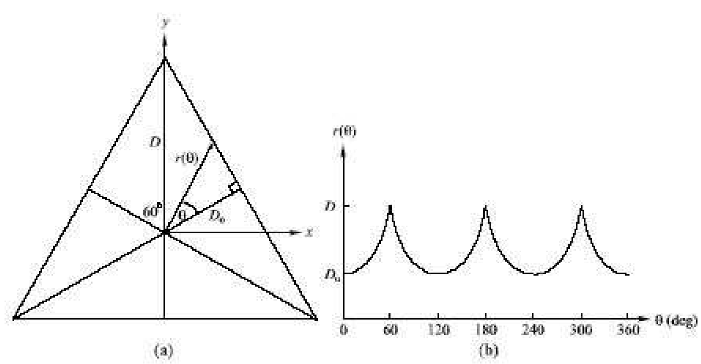
Une transformation linéaire par morceaux avec une pente plus abrupte pour les niveaux de gris plus sombres serait aussi une bonne réponse et améliorerait la visibilité des détails.

On pourrait aussi utiliser un rehausseur de contour pour augmenter la visibilité des détails de cette image.

<**4 pts**>

$\boxed{\mathbf{7}}$

cf. cours.



<**5 pts**>