DIRO
IFT 6150

EXAMEN THÉORIQUE

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *01/12/2008*

I	Transformée de Fourier (28 pts)
II	Opération ponctuelle & Filtrage Spatial (41 pts)
III	Restauration (17 pts)
IV	Misc. (38 pts)
Total	124 points

Tous documents, calculatrices et calculateurs personnels autorisés

I. Transformée de Fourier (28 pts)

1. (a) Soit $f(x)$ la fonction (pour $m > 0$) solution de l'équation différentielle suivante

$$m^2 f(x) - f''(x) \quad = \quad \delta(x) \tag{1}$$

Que devient l'Eq. (1) si on lui applique la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?
<**3 pts**>

(b) En déduire $F(\nu)$, solution de cette équation dans le domaine spectral puis sa solution $f(x)$, dans le domaine spatial, sachant que l'on peut facilement trouver dans les tables de transformée de Fourier la relation suivante
<**4 pts**>

$$\mathcal{F}\big[\exp(-|x|)\big] = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}$$

(c) Soit la fonction $g(x)$, définie par

$$g(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calculer $G(\nu) = \mathcal{F}[g(x)]$ (i.e., la transformée de Fourier de $g(x)$).
<**3 pts**>

(d) Si on remplaçait le membre de droite de l'Eq. (1) par $\big[\,\delta(x) - \delta'(x)\,\big]$ (au lieu de $\delta(x)$), quelle serait à nouveau, pour $m = 1$, la solution de cette équation différentielle ?
[Nota : On rappelle que $\delta'(x) * f(x) = f'(x)$.]
<**5 pts**>

2. (a) Sans calcul, quelles seraient (toutes) les propriétées intéressantes de $H(\nu) = \mathcal{F}\big[h(x)\big] = \mathcal{F}\big[x^2 \, \exp(-\pi x^2)\big]$ que l'on pourraient déduire à partir des propriétées de $h(x)$ et des propriétés de la transformée de Fourier.
<**3 pts**>

(b) Calculer maintenant $H(\nu) = \mathcal{F}\big[x^2 \, \exp(-\pi x^2)\big]$.
<**5 pts**>

3. Calculer $\mathcal{F}\big[\cos^2 x\big]$.
<**5 pts**>

Réponse

1.(a)

$$m^2 f(x) - f''(x) \;=\; \delta(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad m^2 F(\nu) - (2\pi j\nu)^2 F(\nu) = 1 \qquad < \textbf{3 pts} >$$

1.(b)

De la relation précédente, on en déduit

$$F(\nu) = \frac{1}{m^2 + 4\pi^2\nu^2} \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Et en se servant du fait que $\exp(-|x|) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2}$ et de la propriété de contraction dilatation de la TF, on trouve

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{m^2+4\pi^2\nu^2}\Big] = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{m^2}\cdot\frac{2}{1+4\pi^2(\frac{\nu}{m})^2}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^2}\cdot|m|\cdot\exp(-m\,|x|) \\
&= \frac{1}{2m}\cdot\exp(-m\,|x|) \qquad <\textbf{2 pts}>
\end{aligned}
$$

1.(c)

En utilisant directement la définition de la TF

$$
G(\nu)=\mathcal{F}[g(x)] = \int_0^{\infty} g(x)\,\exp(-2\pi j\nu x)\,dx = \frac{-1}{1+2\pi j\nu}\Big[\exp\big(-x(1+2\pi j\nu)\big)\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{1+2\pi j\nu} \qquad <\textbf{3}\text{ pts}>
$$

1.(d)

$$
m^2 f(x) - f''(x) = \delta(x)-\delta'(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad m^2F(\nu)-(2\pi j\nu)^2F(\nu) = 1-2\pi j\nu
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1-2\pi j\nu}{1+4\pi^2\nu^2}\Big] = \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{(1-2\pi j\nu)}{(1-2\pi j\nu)(1+2\pi j\nu)}\Big] \qquad <\textbf{1 pt}> \\
&= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{1+2\pi j\nu}\Big] \qquad <\textbf{3 pts}> \\
&= g(x) \qquad <\textbf{1 pt}>
\end{aligned}
$$

NOTA :

On pourrait raisonner aussi de la façon suivante

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}\Big] - \mathcal{F}^{-1}\Big[2\pi j\nu\,\frac{1}{1+4\pi^2\nu^2}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\exp(-|x|) - \frac{1}{2}\Big(\exp(-|x|)\Big)' \\
&= \exp(-x) \quad \text{pour} \quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

2.(a)

$h(x)$ est réelle et paire, sa TF sera donc à symétrie hermitienne (partie réelle paire) et sans partie imaginaire. <**3 pts**>

[NOTA : On peut dire aussi que

• le signal $h(x)$ ne comportant pas de discontinuités, on aura un support borné pour $H(\nu)$ (BONUS <**+1 pts**>),

• $h(x)$ étant paire, le calcul de la transformée de Fourier ou de la transformée inverse donnera la même chose (BONUS <**+1 pt**>).

• $h(x)$ étant positive, sa transformée de Fourier aura l'allure d'un filtre passe-bas (BONUS <**+1 pts**>).]

2.(b)

On a la propriété suivante $\qquad \mathcal{F}[\,x^2 f(x)\,] = -\dfrac{1}{4\pi^2}\,F''(\nu)$

que l'on peut aussi retrouver en utilisant l'une des deux méthodes expliquées dans la correction de l'examen de 2007. On trouve donc que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\,x^2\ \exp(-\pi x^2)\,] &= -\frac{1}{4\pi^2}\Big(\exp(-\pi\nu^2)\Big)'' = \frac{1}{2\pi}\Big(\nu\exp(-\pi\nu^2)\Big)' = \frac{1}{2\pi}\ \exp(-\pi\nu^2) - \nu^2\ \exp(-\pi\nu^2) \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi} - \nu^2\Big)\exp(-\pi\nu^2) \qquad < \mathbf{5}\ \text{pts} >\end{aligned}$$

3.

On se souvient que $\exp(2\pi j x \nu_o) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \delta(\nu-\nu_o)$ [propriété duale de $\delta(x-x_o) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \exp(-2\pi j\nu x_o)$]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\cos^2 x\big] &= \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\big[1+\cos(2x)\big] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\big[1\big] + \frac{1}{4}\Big(\mathcal{F}\big[\exp(2jx)+\exp(-2jx)\big]\Big) \ \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}\ \frac{1}{2}\,\delta(\nu) + \frac{1}{4}\Big(\delta(\nu-\frac{1}{\pi}) + \delta(\nu+\frac{1}{\pi})\Big)\end{aligned}$$

< **5** pts >

II. Opération ponctuelle & Filtrage Spatial (41 pts)

1. En traitement d'image, il existe un filtre que l'on appelle le FILTRAGE PAR LE MAX qui consiste à faire les étapes suivantes
   (a) On considère le niveaux de gris du pixel à traiter, et d'autre part tous ses voisins. Sur les voisins, on calcul le niveau de gris MIN et le niveaux de gris MAX.
   (b) Si le niveau de gris du pixel à traiter est compris entre le MIN et le MAX, alors on le laisse inchangé sinon on le remplace par le MAX

   Dans le premier exemple (voisinage du second ordre), on remplace donc le pixel de niveau de gris 176 par 143 ($176 \notin [100\ 143]$) et dans le deuxième exemple il demeure inchangé ($176 \in [100\ 178]$).

   (a)

132	125	132
124	**176**	100
143	123	122

   (b)

132	125	132
124	**176**	100
178	123	122

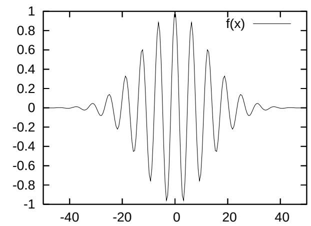
   Dans quelle famille ce filtre fait-il partie ? Donner les caractéristiques de ce filtre (i.e., expliquer dans quelles circonstances (type de bruit, type d'image) ce filtre est intéressant, justifier votre réponse et donner le nom d'un filtre que vous connaissez qui se rapproche le plus de celui-ci.
   <6 pts>

2. On désire calculer le Laplacien (∇^2) d'une image $I(x,y)$ filtrée passe-bas par un (masque de convolution [ou PSF], $f(x,y)$), c'est à dire faire l'opération suivante $\nabla^2\big[I(x,y) * f(x,y)\big]$.
   Montrer que l'on a l'égalité

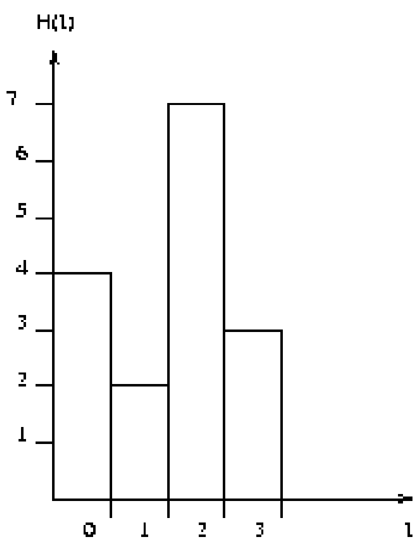
   $$\nabla^2\big[I(x,y) * f(x,y)\big] = I(x,y) * \big[\nabla^2 f(x,y)\big]$$

   qui montre que l'on peut faire cette opération en filtrant l'image par le laplacien du passe-bas.
   <5 pts>

3. On désire trouver un masque de convolution qui nous permettrait de calculer numériquement la dérivée troisième d'une image en x (colonne de l'image). Trouver (une version possible) de ce masque de convolution en justifiant votre réponse.
   $<$**5 pts**$>$
4. Soit la PSF (point spread function) suivante : $f(x) = \exp(-\frac{\pi x^2}{\sigma}) \cdot \cos(x)$



   En calculant sa transformée de Fourier et en représentant brièvement sa réponse fréquentielle, trouvée la nature du filtre obtenu lorsqu'on convolue une image par $f(x)$.
   $<$**7 pts**$>$
5. Dire pourquoi l'opérateur $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{-1}$ est plus robuste que l'opérateur $\boxed{-1}\boxed{1}$ si on veut calculer une approximation du gradient. En terme de rapport signal (du gradient) sur bruit, quel est une estimation (approximé) du gain gagné si on utilise le premier plutôt que le deuxième (dans le cas d'une image (avec la propriété d'ergodicité) entachée par du bruit blanc Gaussien) ?
   $<$**4 pts**$>$
6. Appliquer l'égalisation de l'histogramme de l'image en niveaux de gris dans l'exemple suivant (Fig. (a)). Montrer les détails de vos calculs.
   $<$**5 pts**$>$



(a)

```
//-------------------------------------------------------------
//  Egalisation Histogramme
//-------------------------------------------------------------
void Egalise(int*** img,int lgth,int wdth)
{
 int i,j;
 float tmp;
 float* HistoNg;
 float* FnctRept;

 //Allocation Memoire
 HistoNg=new float[256];
 FnctRept=new float[256];

 //Calcul Histogramme Ng
 for(i=0;i<256;i++) HistoNg[i]=0.0;

 for(i=0;i<lgth;i++) for(j=0;j<wdth;j++)
    { tmp=img[0][i][j]+img[1][i][j]+img[2][i][j];
      tmp/=3.0;
      tmp=(int)(tmp+0.5);
      if ((tmp>=0)&&(tmp<256)) HistoNg[(int)(tmp)]++; }

  for(i=0;i<256;i++)  HistoNg[i]/=(float)(wdth*lgth);


  .......
  .......
  ......

 //Liberation Memoire
 if (HistoNg)  delete HistoNg;
 if (FnctRept) delete FnctRept;
}
```

(b)

7. Voici le début du code en C (cf. Fig. (b)) d'une fonction qui réalise une égalisation d'histogramme sur une image couleur *img*. Compléter le pour qu'il soit fonctionnel.
   $<$**9 pts**$>$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Ce filtre (qui s'assure en résumé que tous les pixel à son niveau de gris placé dans la gamme de ses voisins) fait partie de la famille des filtre à opération locale a un voisinage, aussi de la famille des filtres passe-bas qui, tout comme le filtre médian, doit efficacement supprimer (ou fortement atténuer) le bruit "poivre et sel" (dans cet exemple seulement le bruit "sel" d'épaisseur 1 pixel et de proportion moins de 1/9 pour être plus précis, le bruit "poivre" ne serait pas filtré par cette procédure), c'est à dire qu'il adoucit les pixels isolés ayant un niveau de gris très différent des niveaux de gris de leur voisinage. De plus il aura la particularité de bien préserver (tout comme le filtre médian) les contours et les détails de l'image. Tout comme le filtre médian, il ne serait pas très efficace dans le cas d'un bruit Gaussien.

<**6 pts**>

$\boxed{\textbf{2.}}$

2 facon de le faire

(i)

Pour alléger la démonstration, raisonnons en laissant tomber la dimension y (le laplacien et le passe-bas sont symétriques),

$$\begin{array}{ccc} \nabla^2\big[I(x) * f(x)\big] & \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & (2\pi j u)^2 \cdot I(u) \cdot F(u) \\ = & & = \\ I(x) * \big[\nabla^2 f(x)\big] & \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} & I(u) \cdot \Big((2\pi j u)^2 \cdot F(u)\Big) \end{array}$$

(ii) La démonstration la plus simple est de dire que calculer le laplacien d'une image $I(x,y)$ se résume numériquement par $I(x,y) * l(x,y)$, i.e. un filtrage où $l(x,y)$ est la psf (point spread function) ou masque de convolution associé à ce filtre (laplacien). Donc, le produit de convolution étant commutatif

$$\nabla^2\big[I(x,y) * f(x,y)\big] \stackrel{\Delta}{=} l(x,y) * I(x,y) * f(x,y) = I(x,y) * \Big(l(x,y) * f(x,y)\Big) = I(x,y) * \big[\nabla^2 f(x,y)\big]$$

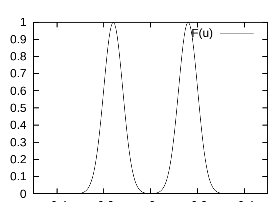
<**5 pts**>

$\boxed{\textbf{3.}}$

Un masque de convolution associé à une dérivée troisième peut se construire à partir d'un masque de convolution associé à une dérivée seconde, i.e., $\boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1}$ et d'un masque de convolution associé à une dérivée première, i.e., $\boxed{-1}\boxed{1}$, et on trouve $\boxed{1}\boxed{-2}\boxed{1} * \boxed{-1}\boxed{1} = \boxed{-1}\boxed{3}\boxed{-3}\boxed{1}$ <**5 pts**>

$\boxed{\textbf{4.}}$

$$\begin{aligned} \exp(-\frac{\pi x^2}{\sigma}) \cdot \cos(x) \;\stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}\; & \sqrt{\sigma}\exp(-\pi\sigma\nu^2) * \Big(\delta(\nu - \frac{1}{2\pi}) + \delta(\nu + \frac{1}{2\pi})\Big) \qquad < \mathbf{4} \text{ pts} > \\ \propto\; & \exp\Big\{-\pi\sigma(\nu - \frac{1}{2\pi})^2\Big\} + \exp\Big\{-\pi\sigma(\nu + \frac{1}{2\pi})^2\Big\} \qquad < \mathbf{2} \text{ pts} > \end{aligned}$$



Donc un filtre passe-bande. <**1 pt**>

$\boxed{\textbf{5.}}$

Le premier opérateur sera plus robuste car il moyenne l'estimation du gradient (ou de la dérivé) à droite du signal (donné par le deuxième opérateur) avec l'estimation de sa dérivée à gauche (donné par le deuxième opérateur $\boxed{1}\boxed{-1}$). Ainsi le bruit (blanc Gaussien) de ces deux estimations sera moyenné et le rapport signal (du gradient) sur bruit sera plus important. **<2.5 pts>**

En considérant le signal image comme étant ergodique, les moyennes spatiales auront le même effet sur le bruit qu'une moyenne d'ensemble et ainsi le gain gagné (pour deux moyennage) sera approximativement de l'ordre de (cf. cours) de $\sqrt{2}$. **<1.5 pts>**

6.

(i) Si on considère que l'on a 4 niveaux de gris dans cet exemple ;

$\frac{4}{16} \times 3 = 0.75 \quad \frac{6}{16} \times 3 = 1.125 \quad \frac{13}{16} \times 3 = 2.4375 \quad \frac{16}{16} \times 3 = 3$

Les trois barres seront donc déplacées aux niveaux de gris suivants 0, 1, 2 et 3 (si on tronque) donc rien de changé ou en 1 (hauteur 6 ; fusion de la première et la deuxième barre)) et la barre 2 et 3 seront inchangées (si on arrondit).

(ii) Si on considère que l'on a 256 niveaux de gris.

$\frac{4}{16} \times 255 = 63.75 \quad \frac{6}{16} \times 255 = 95.625 \quad \frac{13}{16} \times 255 = 207.18 \quad \frac{16}{16} \times 255 = 255$

Les trois barres seront donc déplacées aux niveaux de gris suivants 63, 95, 207 et 255 (si on tronque) ou en 64, 96, 207 et 255 (si on arrondit).
<5 pts>

7.

```
//Calcul Fnct Repartition
for(i=0;i<256;i++) FnctRept[i]=0.0; // Pas obligatoire

for(i=0;i<256;i++)
   { if (i>0)  FnctRept[i]=FnctRept[i-1]+HistoNg[i];
     else      FnctRept[i]=FnctRept[i]; }

for(i=0;i<256;i++) FnctRept[i]=(int)((FnctRept[i]*255)+0.5);

//Egalise
for(i=0;i<lgth;i++) for(j=0;j<wdth;j++)
  { img[0][i][j]=(int)FnctRept[(int)(img[0][i][j])];
    img[1][i][j]=(int)FnctRept[(int)(img[1][i][j])];
    img[2][i][j]=(int)FnctRept[(int)(img[2][i][j])]; }
```

<9 pts>

III. Restauration (17 pts)

1. Soit $g(x, y)$ une image naturelle en niveaux de gris dégradée obtenue à partir de l'image parfaite (i.e., sans dégradation) $f(x, y)$ et du modèle de dégradation suivant

$$g(x, y) = f(x, y) \cdot n(x, y)$$

dans lequel $n(x, y)$ est un bruit blanc Gaussien suivant une loi normale (i.e., gaussienne) de moyenne $\mu = 1.0$ et de variance σ^2 inconnu, i.e., $n(x, y) \sim \mathcal{N}(\mu = 1.0, \sigma^2)$.

   (a) Indiquer dans quel interval approximatif évolueront les valeurs de $n(x, y)$.
   <3 pts>

(b) Voici une image (donc $g(x,y)$) qui a été dégradée par ce type de bruit. Dans cet exemple, $n(x,y) \sim \mathcal{N}(\mu = 1.0, \sigma^2 = 0.02)$.

Quelle est la technique qui nous permettrait de transformer cette dégradation multiplicative en une dégradation additive ($N(x,y)$) qui s'ajouterait sur une image $\mathcal{F}(x,y)$, différente de $f(x,y)$ (et qui créerait une nouvelle image dégradée que l'on appellera $\mathcal{G}(x,y)$). Écrire le nouveau modèle de dégradation obtenue par cette technique.
<4 pts>

(c) Si on supposait que ce bruit additif était Gaussien et blanc (ce qui n'est pas le cas dans cet exemple), quel serait une technique qui permettrait d'estimer (grossièrement) la variance σ^2 de ce bruit $N(x,y)$ additif. Justifier votre réponse.
<4 pts>

(d) Trouvez et expliquer une méthode qui permettrait d'estimer (grossièrement) la variance σ^2 de ce bruit $n(x,y)$.
<6 pts>

Réponse

1.(a)

les valeurs de $n(x,y)$ évolueront approximativement dans l'interval $[1.0 - 3\sigma \;\; 1.0 + 3\sigma]$. **<3 pts>**

1.(b)

La première chose à faire est de rendre ce bruit multiplicatif en prenant le log népérien (ou un autre log) de tous les niveaux de gris. Du coup on se retrouve avec une dégradation additif du type

$$\begin{aligned} \ln g(x,y) &= \ln[f(x,y)] + \ln[n(x,y)] \\ \mathcal{G}(x,y) &= \mathcal{F}(x,y) + N(x,y) \end{aligned}$$

<4 pts>

1.(c)

(i) Une méthode possible consisterait, pour chaque pixel, à estimer dans une petite fenêtre W (par exemple de dimension 3×3) et centrée sur ce pixel), la variance empirique. La variance minimale obtenue sur l'ensemble de ces estimations serait une borne supérieur et une assez bonne estimation de la variance de ce bruit. En effet l'image comporte certainement quelques zones homogènes et lorsque W se fixera sur l'une d'entre elle, la variance obtenue sur cette zone sera une asez bonne estimation de la variance du bruit.

(ii) Une autre possibilité serait de calculer la DSP (densité spectral de l'image bruitée), i.e., $|\mathcal{F}[\mathcal{G}(x,y)]|^2$ puis de trouver σ^2 en sachant que la DSP d'un bruit blanc gaussien est une constante σ^2 qui s'ajoute (pour toute les fréquences du spectre) à la DSP de l'image non bruitée.
<4 pts>

1.(d)

Le plus simple est peut être de travailler avec l'image $g(x, y)$ directement. En calculant pour chaque pixel de cette image, dans une petite fenêtre (par exemple de dimension 3×3) centrée sur ce pixel, la valeur $|max - min|/moy$ contenue dans cette fenêtre (la valeur moy est la moyenne des niveaux de gris dans cette petite fenetre). Pour une zone (initialement) homogène dans l'image (même après être bruitée), cette valeur $|max - min|/moy$ serait plus petite que toute les autres et dans le cas d'une image sans bruit (puisqu'on suppose qu'il existe des zones de régions homogènes dans l'image), cette valeur $|max - min|/moy$ serait égal à zéro. Dans le cas de notre bruit multiplicatif $|max - min|/moy \approx 6\,\sigma$ (cf. question 1.(a)) et donc une bonne approximation serait

$$\hat{\sigma} \approx \left(\frac{|max - min|}{6 \times moy}\right) \qquad < \mathbf{6} \text{ pts} >$$

[NOTA : Pour l'image présentée plus haut, on obtient $\hat{\sigma} \approx \left(\frac{|max-min|=54}{6 \times moy=68.22}\right) = 0.1319$ au lieu d'une valeur réelle de $\sigma = \sqrt{0.02} \approx 0.1414$ (en prenant des fenêtre d'estimation de taille 3×3, soit approximativement 6.7 % d'erreur d'estimation)].

IV. Misc. (38 pts)

1. On vient de réaliser un flou sur l'image MONA (cf. Figure (a)) en procédant dans le domaine spectral et en utilisant l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform) et un filtre de moyenne de taille 15×15. On obtient le résultat montré à droite de l'image MONA. Expliquer en justifiant pourquoi il existe (sur l'image rendue floue) une sorte de grosse ligne noire sur le coté supérieur de l'image (i.e., sur les premières lignes de l'image floue).
   <5 pts>
2. On aimerait avoir une estimation de l'angle que fait la tour de pise automatiquement par traitement d'image. Comment pourrait-on faire cette estimation ?
   <5 pts>
3. (a) Donner le vecteur descripteur de Fourier d'un cercle (i.e., d'une forme circulaire parfaite).
   <2.5 pts>

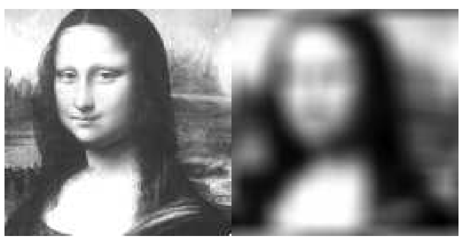
   (b) Si on utilise les descripteurs de Fourier pour caractériser une forme (par un ensemble de coefficient du spectre 1D de la forme représentée en coordonnée polaire avec une origine du repère au centre de gravité de la forme). Qu'obtiendrait-on si on fait le "filtrage suivant" ?
   <4.5 pts>

   i. forme $\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}$ $[c_0 \quad c_1 \ldots \quad c_n]$.

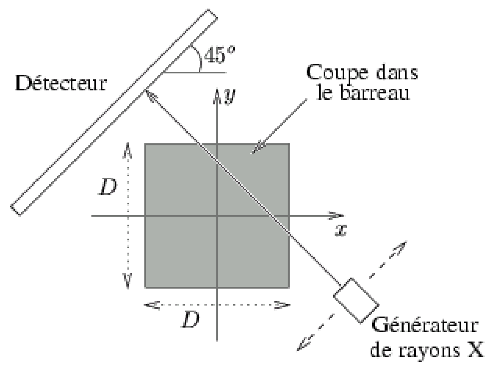
   ii. ? $\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}$ $[c_0 \quad 0 \ldots 0]$.
4. (a) Expliquer à quoi sert le pseudo-coloriage.
   <4 pts>

   (b) Expliquer ce qu'est le coloriage (à ne pas confondre avec le pseudo-coloriage) en traitement d'image et expliquer pourquoi c'est un problème mal posé (vous pouvez l'expliquer en donnant des exemples).
   <4 pts>
5. Quelle est le rôle du facteur de température dans le recuit simulé ?
   <4 pts>

6. Dans un processus industriel de fabrication de barreaux métalliques, on désire réaliser du contrôle de qualité en “imageant” à intervalles de temps régulier une coupe transversale 2D de ces barreaux. L'imagerie de cette coupe est obtenue par un procédé de tomographie par rayon X (cf. Figure (c)). La densité du barreau vaut 1.0 tandis que la densité extérieure est nulle.
   (a) Déterminer (en une dimension) la projection apparaissant sur le détecteur de la figure (c).
   <**3 pts**>.
   (b) Imaginer qu'une bulle d'air se soit introduite lors du moulage du barreau. Représentez ce défaut sur la coupe obtenue du barreau et montrer qualitativement comment la projection est modifiée.
   <**2 pts**>.
   (c) En déduire une technique permettant de trouver/détecter (et/ou quantifier) la présence de trop de bulles d'air dans le barreau.
   <**4 pts**>.


(a)


(b)



(c)

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Puisqu'on a utiliser une FFT, l'image MONA utilisée dans cette convolution est en fait l'image de MONA se répétant indéfiniment en ligne et colonne (ou cette même image mais toroidale). La grosse ligne noire que l'on voie est en fait le résultat du moyennage des niveaux de gris du haut de l'image (qui sont clairs) avec les niveaux de gris (très noirs) des dernières lignes de l'image.

<**5 pts**>

$\boxed{\textbf{2.}}$

(i) Binarisation + Transformée de Hotelling.

(ii) Après transformée de Fourier de l'image en identifiant l'angle α où se trouve des forts coefficients spectraux associées aux hautes fréquences (discontinuitées) de l'image. Cette angle α sera perpendiculaire à l'angle que fait la tour de pise avec l'axe des x (horizontal) ou égale (en valeur absolue) à l'angle que fait cette tour avec l'axe des y (vertical).

<**5 pts**>

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$

Dans ce cas $r(\theta) = \mathrm{C}^{st}$ = surface du cercle et donc $R(\nu) = s\,\delta(\nu)$ ou s est la surface du cercle.
$[c_0 = \mathrm{s}, \ldots \quad 0, \ldots, 0]$. <**2.5 pts**>

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$

Le cercle centré sur le centre de gravité de l'objet et de même surface que l'objet.

<**4 pts**>

4.(a)

Il sert à transformer une image de niveaux de gris en pseudo-couleurs permettant ainsi d'augmenter la visibilité des détails (résolution) d'une image pour une meilleure interprétation (exemple : pour les images satellites ou les images fonctionnelles SPECT).

<4 pts>

4.(b)

Le coloriage consiste à retrouver la couleur originale d'une image à partir de sa version en niveaux de gris. C'est un problème mal posé, car il existe une infinité de couleur qui donneront le même niveaux de gris.

<4 pts>

5.

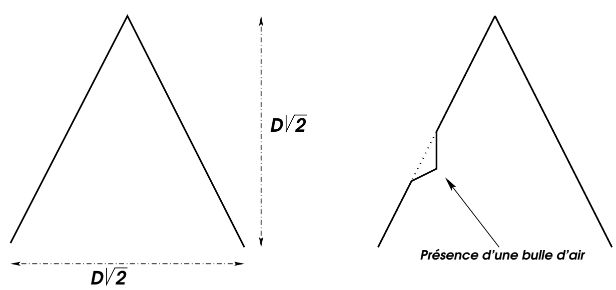
Il sert à passer progressivement d'une exploration stochastique très aléatoire à une descente du gradient déterministe (température nulle) permettant ainsi d'explorer les (et de se sortir des) minimas locaux de la fonction d'energie que l'on cherche à minimiser avant de se positionner sur un minimum global. Lorsque la température est nulle, l'exploration se transforme en unw simple descente de gradient que l'on appelle aussi dans ce cas l'algorithme ICM.

<4 pts>

6.(a)(b)

La coupe 1D obtenue serait un triangle de largeur $D\sqrt{2}$ et de hauteur $D\sqrt{2}$. Mathématiquement, en 1D, on devrait trouver la fonction

$$\text{Coupe 1D} = D\sqrt{2}\,\Lambda\Big(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\Big) \qquad \text{où } \Lambda \text{ est la fonction triangle}$$



<5 pts>

Dans le cas de bulles d'air, on devrait trouver une coupe du même style que celle représentée ci-dessus.

6.(c)

On vérifie la pente de la courbe, on peut aussi calculer l'aire (surface) de cette courbe, ou on recherche la présence et on quantifie la présence de négativité dans la projection parfaite (sans bulle) moins la forme receuillie etc..

<4 pts>