DIRO
IFT 6150

# EXAMEN THÉORIQUE

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift6150
*e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date :** *05/12/2011*

| | |
|---|---|
| I ...................... | Transformée de Fourier (33 pts) |
| II .................... | Filtrage (18 pts) |
| III ................... | Restauration (28 pts) |
| IV ................... | Image couleure et multispectrale (20 pts) |
| V .................... | Misc. (21 pts) |
| Total ................ | 120 points |

Tous documents, calculatrices et calculateurs personnels autorisés

**I. Transformée de Fourier** (33 pts)

1. Expliquer pourquoi il existe le facteur $2/T$ ($T$ étant la période du signal) dans le calcul des $A_n$ et $B_n$ de la série de Fourier.
   <**4 pts**>
2. Démontrer de **deux** façons différentes, à quoi est égale l'expression de la distribution : $\delta(-x)$
   <**4 pts**>
3. (a) Soit la fonction $f(x)$ (avec $k > 0$), définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x/k) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   Calculer $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$, i.e., la transformée de Fourier (TF) de $f(x)$.
   <**4 pts**>

   (b) Déduire de la question précédente (en utilisant les propriétés de la TF), la TF de $g(x)$ (avec $k > 0$)

$$g(x) = \begin{cases} -\exp(x/k) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   <**4 pts**>

   (c) Déduire des deux précédentes questions que

$$\mathcal{F}\big[\text{sgn}(x)\ \exp(-|x|/k)\big] = \frac{-4\pi j\nu k^2}{1 + 4\pi^2\nu^2 k^2}$$

   où $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe et $k > 0$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   <**4 pts**>

   (d) Que se passe t-il lorsque $k$ tend vers l'infinie dans la fonction sgn(x) $\exp(-|x|/k)$ ? Expliquer le qualitativement, en utilisant par exemple un graphique.
   Déduire de la question précédente, la TF de la fonction $\text{sgn}(x)$ et préciser aussi pourquoi on ne pouvait utiliser directement la définition de la TF (basée sur le calcul intégral) pour mener à bien le calcul de la transformée de Fourier de cette fonction $\text{sgn}(x)$.
   <**4 pts**>

   (e) Trouver (éventuellement en vous servant de $f(x)$ et $g(x)$ des questions précédentes) la TF de la fonction $h(x)$, définie quelque soit $x$, par $h(x) = \exp(-|x|/k)$
   <**4 pts**>

   (f) Trouver maintenant, en vous servant si vous voulez de la question précédente, la TF de la fonction $k(x) = x\ \exp(-|x|/k)$ (définie quelque soit $x$).
   <**5 pts**>

---

**Réponse**

$\boxed{1.}$

C'est un facteur de normalisation qui nous permet de retrouver le fait que la série de Fourier d'une fonction de base doit se décomposer en elle même, c'est à dire que l'on doit avoir, par exemple, $\mathcal{S}$érie$\mathcal{F}$ourier$\big[f(x) = \cos(wx)\big] = \cos(wx)$. C'est à dire que le coefficient $A_1 = 1$ et que tous les autres $A_n$ et $B_n$ soient égales à zéro dans la décomposition ($B_n = 0$ car $f(x)$ est paire). En effet, dans le cas du calcul détaillé de $\mathcal{S}$érie$\mathcal{F}$ourier$\big[f(x) = \cos(wx)\big] = \cos(wx)$.

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{T}\int_0^T \cos(wx)\,\cos(nwx)\,dx \\
&= 0 \quad (\text{si} \quad n \neq 1) \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T \cos^2(wx)\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2wx)\Big)\,dx = 1 \quad (\text{si} \quad n = 1)
\end{aligned}
$$

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{2.}}$

Avec la convention $x \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \nu$, on a, 5 façons différentes de le montrer, en utilisant :

- La propriété de contraction-dilatation : $\quad \delta(-x) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \dfrac{1}{|-1|}\cdot 1 = 1 \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} \delta(x) = \delta(-x)$
- Le fait que l'inversion d'une fonction donne la conjugaison de sa transformée de Fourier ($\# \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} *$) :

$$\delta(-x) = \delta^{\#}(x) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} 1^* = 1 \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightleftharpoons} \delta(x) = \delta(-x)$$

- Le fait que $\delta(\alpha x) = \dfrac{1}{|\alpha|}\,\delta(x)$ (démontré dans l'examen de l'année dernière) et donc $\quad \delta(-x) = \delta(x)$
- L'action de cette distribution sur une fonction f(x) et ensuite par simple identification

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-x)\,f(x)\,dx = -\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(z)\,f(-z)\,dz = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\,dz = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,f(x)\,dx \;\Leftrightarrow\; \delta(-x) = \delta(x)$$

- Le fait que la distribution de Dirac à été présentée en cours comme étant la limite de la fonction (paire) porte de largeur $\epsilon$ et de hauteur $1/\epsilon$. La limite de cette porte, inversée en $x$, donnera géométriquement encore $\delta(x)$. Un raisonement similaire avec le fait que la distribution Dirac à été présenté en cours comme étant la limite de la fonction paire Gaussienne lorsque celle-ci à un écart-type qui tend vers zéro est aussivalable.

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$

En utilisant directement la définition de la TF

$$F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)] \;=\; \int_{0^+}^{\infty} f(x)\,\exp(-2\pi j\nu x)\,dx = \frac{-1}{\frac{1}{k}+2\pi j\nu}\Big[\exp\big(-x(\frac{1}{k}+2\pi j\nu)\big)\Big]_{0^+}^{\infty} = \frac{k}{1+2\pi jk\nu}$$

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$

Comparativement à la question précédente, la fonction est inversée et négative, on a donc $g(x) = -f(-x)$. Or on sait que la TF est linéaire et que l'inversion d'une fonction donne la conjugaison de sa transformée de Fourier (i.e., $\# \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} *$) donc

$$G(\nu) = \mathcal{F}[g(x)] = -F^{\star}(\nu) \;=\; \frac{-k}{1-2\pi jk\nu}$$

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{3.(c)}}$

$$\text{sgn(x)}\,\exp(-|x|/k) = f(x)+g(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{k}{1+2\pi jk\nu} + \frac{-k}{1-2\pi jk\nu} = \frac{-4\pi j\nu k^2}{1+4\pi^2\nu^2k^2}$$

**<4 pts>**

**3.(d)**

On ne peut utiliser le calcul intégral pour calculer $\mathcal{F}\left[\,\mathrm{sgn}(x)\,\right]$ car le signal $\mathrm{sgn}(x)$ n'est pas à énergie finie. Pour calculer la fonction $\mathrm{sgn}(x)$, on doit l'exprimer comme étant la limite d'une fonction dont on connait sa transformée de Fourier.

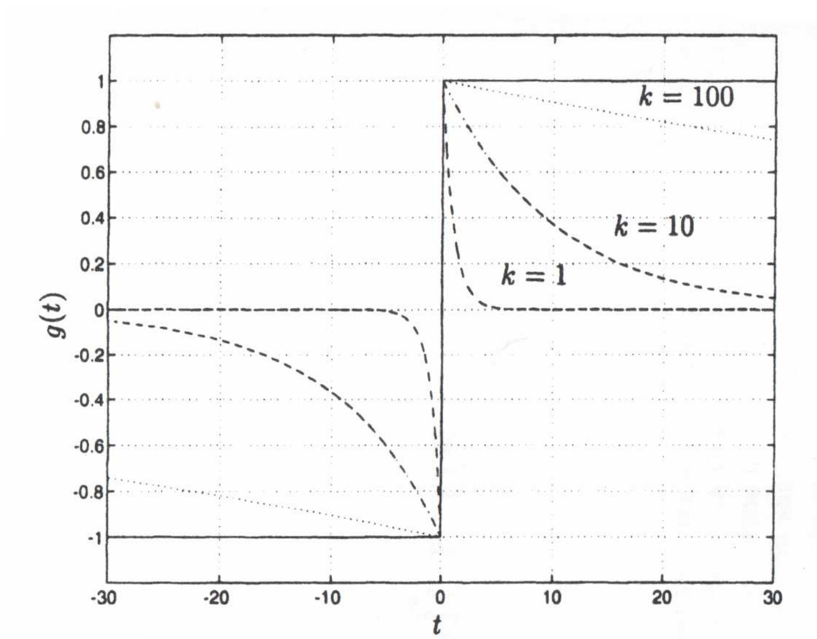
**<1 pt>**

Lorsque le paramètre $k$ va tendre vers $\infty$, la fonction sgn(x) $\exp(-|x|/k)$ va tendre vers la fonction sgn(x)

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{sgn(x)}\ \exp(-|x|/k) = \mathrm{sgn(x)} \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \lim_{k\to\infty}\left(\frac{-4\pi j\nu k^2}{1+4\pi^2\nu^2k^2}\right) = \frac{1}{j\pi\nu}$$

$$\mathrm{sgn(x)} \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{1}{j\pi\nu}$$

**<3 pts>**




**3.(e)**

En utilisant $f(x)$ et $g(x)$ des questions précédentes, on trouve

$$h(x) = \exp(-|x|/k) = f(x) - g(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{k}{1+2\pi jk\nu} + \frac{k}{1-2\pi jk\nu} = \frac{2\,k}{1+4\pi^2\nu^2k^2}$$

**<4 pts>**

**3.(f)**

On connait la TF de $\exp(-|x|/k)$ (cf. question précédente) et on a de plus $\mathcal{F}[xf(x)] = -\frac{1}{2\pi j}F'(\nu)$ (puisque $\mathcal{F}[f'(x)] = 2\pi j\nu F(\nu)$, et donc par la propriété duale ; $\mathcal{F}^{-1}[F'(\nu)] = -2\pi jxf(x)$)

$$x\ \exp(-|x|/k) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad -\frac{1}{2\pi j}\ \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{2\,k}{1+4\pi^2\nu^2k^2}\right) = \frac{-8\pi k^3 j}{(1+4\pi^2\nu^2k^2)^2}$$

**<5 pts>**

**II. Filtrage** (18 pts)

1. **Filtrage Médian**
   Est-ce que le filtrage médian serait intéressant pour restaurer une image bruitée par du bruit additif Gaussien blanc ? Quelle serait, comparativement à un filtre passe-bas, les caractéristiques (avantages/inconvénients) de cette méthode sur ce type de bruit ?
   **<5 pts>**
2. **Filtrage Passe-Haut**
   Quelles sont les avantages d'un filtre passe-haut de butterworth par rapport à un filtre passe haut ideal ?
   **<5 pts>**
3. **Filtrage Harmonique**
   Parmis la multitude de filtres existants, il existe le FILTRE HARMONIQUE qui consiste à remplacer le niveau de gris d'un pixel (de coordonné $p = (x, y)$), i.e., $I(p)$ par :

$$I_F(p) = \frac{N}{\sum_{p \in \mathcal{N}} \frac{1}{(I(p)}}$$

   où $I$ est l'image de départ (en supposant qu'aucun de ces pixels ont un niveaux de gris égale à zéro $[I(p) \neq 0]$), $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des niveaux de gris appartenant au voisinage du pixel $p$ et $N$ représente le nombre de voisins considérés.
   De quelle famille ce filtre fait-il partie ? Donner les caractéristiques de ce filtre, i.e., expliquer dans quelles circonstances (type de bruit, type d'image) ce filtre est intéressant et efficace. Justifier votre réponse.
   **<8 pts>**

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1}}$

Le filtrage médian est particulièrement bien adapté pour restaurer des images bruitées par un bruit de type poivre et(ou) sel, c'est à dire un bruit faisant apparaître des valeurs abérrantes (qui diffèrent grandement de la valeur moyenne locale des niveaux de gris) pour lesquelles la médiane des niveaux de gris contenu dans un masque de convolution permetra facilement de rejeter (si la taille choisie du masque de convolution reste néanmoins deux fois supérieur à la taille des grains de sel et poivre de ce type de bruit). Pour un bruit Gaussien (AWGN), où aucune valeure est abbérante, cela sera donc beaucoup moins efficace. Néanmoins, ce type de filtrage permettra de conserver les contours de l'objet contrairement au filtre passe-bas qui lui permettra de conserver la moyenne de l'image mais pas ses contours. Notons aussi que si l'image est très bruitée, le filtre médian sera très inéficace.
**<5 pts>**

Nota : Ci dessous, l'image Lena original et bruitée par du bruit Gaussien de variance 900 et le résultat du filtrage par un filtre médian de taille $5 \times 5$.

$\boxed{2}$

En choisissant une pente de la fréquence de la coupure moins abrupte, on aura moins de ringing (ou ripples, ou distorsions)) et un filtrage pase-haut moins sensible au bruit (plus précisement le rapport signal sur bruit de l'estimation du gradient ou des hautes fréquences spatiales de l'image est plus important).
**<5 pts>**

$\boxed{3}$

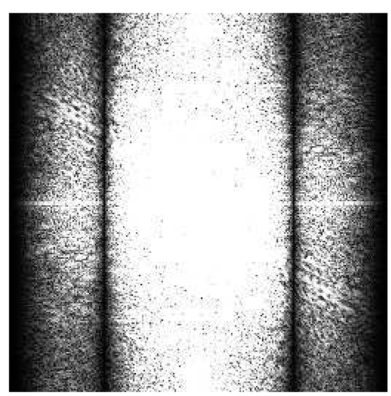
Il s'agit d'un filtre à opération locale à un voisinage et comme il n'y a aucune différence, on peut raisonnablement penser qu'il s'agit d'un **filtre passe-bas**. On peut s'en convaincre en remarquant que le filtrage d'une zone homogène dans laquelle tous les pixels ont un niveaux de gris similaire, restera homogène avec le même niveaux de gris. Si des niveaux de gris différents existent dans cette zone homogène, alors ces dernier seront atténués comme un filtre moyenneur traditionnel. De plus, les valeurs très différentes et très élevé (comme du bruit impulsionnel de type "sel") vont être considérablement atténuées puis moyennées entres elles par ce filtre qui sera donc efficace pour ce type de dégradation. Par contre, ce filtre sera moins efficace lors de la présence de bruit impulsionnel de type "poivre", avec un niveaux de gris très proche de zéro sur une zone claire où ce filtre créera pour tous le voisinage considéré des valeurs très sombres donc très différentes de la réalité.
**<8 pts>**

---

---

**III. Restauration** (28 pts)

1. **Estimation des paramètres de la fonction de floue**
   Soit $g(x,y)$, l'image de Lena dégradée par un flou de mouvement (soit en $x$ ou en $y$), c'est à dire par une dégradation modélisée mathématiquement par une PSF (Point Spread Function) de la forme d'une fonction porte $h(x,y) = \Pi(\frac{x}{d_x}, \frac{y}{d_y})$ de largeurs $d_x$ et $d_y$ (en pixels) inconnues que l'on va chercher à déterminer dans cet exercice.
   On dispose pour cela de la connaissance de la TF (Transformée de Fourier) de l'image de Lena floue $G(u,\nu)$ (i.e., $g(x,y) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} G(u,\nu)$) pour laquelle on a fait -1] un recalage cyclique pour que le centre apparaisse au centre de l'image et -2] un rehaussement des hautes fréquences avec une transformation du type $\log[1 + G(u,\nu)]$ (comme celle vue en Travaux Pratiques).



(a) Soit $f(x,y)$, l'image de Lena parfaite (i.e., non dégradée par du flou). Exprimer mathématiquement la relation existant entre $f(x,y)$, l'image floue $g(x,y)$ et la PSF $h(x,y)$.
**<3 pts>**

(b) Justifier comment la connaissance de $G(u,\nu)$ peut nous permettre d'estimer les paramètres de la fonction de floue $h(x,y)$, c'est à dire $d_x$ et $d_y$ et donner une estimation de $d_x$ et $d_y$.
**<7 pts>**

2. **Debruitage**
Une image de taille $N \times N$ est bruitée par du bruit blanc Gaussien additif (AWGN noise) de variance $\sigma^2$. On prend la même image mais on la réduit d'un facteur 2, en longueur et largeur et on la bruite avec le même bruit additif blanc Gaussien (de même variance $\sigma^2$). Cette nouvelle image (sous-échantillonnée d'un facteur 2) ; sera t-elle plus ou moins difficile à débruiter par un filtre passe-bas ? Justifier qualitativement votre réponse.
**<5 pts>**

3. **Bruit Poivre & Sel**
On veut créer algorithmiquement en language C, un bruit impulsionnel (ou bruit poivre et sel) d'épaisseur 1 pixel et de proportion $\rho$ s'appliquant sur une image. Par simplicité, ce bruit à une chance sur deux de créer un point blanc (niveaux de gris 255) ou noir (niveaux de gris 0). Donner l'implémentation de la fonction
AddImpulseNoise(float** mat,int lgth,int wdth,float prop) en language C. On pourra se servir de la fonction float randomize() que l'on à déjà utilisé en Travaux Pratiques et qui retourne un flottant compris entre 0 et 1.
**<5 pts>**

4. **Conséquence du Flou**
Est-ce que des fréquences spatiales d'une image seront détruites ou simplement (théoriquement) atténuées dans une image, lorsqu' on appliquera sur cette image un flou donné par une fonction PSF de type a-] porte, b-] Gaussienne, c-] une PSF de flou qui serait le résultat de la convolution d'une Gaussienne multipliée par une fonction cosinus ? Justifier bien votre réponse surtout pour la question c-] où l'on donnera qualitativement la MTF de ce flou.
**<8 pts>**

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$

On a la relation mathématique suivante : $$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) = f(x,y) * \frac{1}{d_x d_y}\,\Pi\Big(\frac{x}{d_x},\frac{y}{d_y}\Big)$$

**<3 pts>**

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$

On sait que du flou (i.e., des abscences de discontinuités) dans la direction des $x$ entraine des faibles coefficients dans la direction perpendiculaire à cet axe dans le domaine fréquentiel (et même des coefficients nuls lorsque $H(u,\nu)$ comporte des zéros fréquentiels ce qui est le cas de la TF d'une porte).
**<2 pts>**

En utilisant la correspondance $x$ (colonne) $\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}$ $u$ et $y$ (ligne) $\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}$ $\nu$ et que des lignes verticales noires apparaissent dans $G(u,\nu)$ dans la direction $\nu$, on peut en déduire qu'il n'existe que du flou dans la direction des $x$, et donc que $h(x,y) = \Pi(\frac{x}{d_x}, y)$ ou que $d_y = 1$. Il reste à déterminer $d_x$. On a la relation

$$\Pi\big(\frac{x}{d_x}\big) \quad \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \quad \frac{\sin(\pi u\, d_x)}{\pi u\, d_x} \qquad \text{(à une constante de proportion près)}$$

**<3 pts>**

Avec le sinc qui s'annule tous les $u = 1/d_x$, on appercevra donc deux lignes verticales autour de l'axe $O\nu$ séparées d'une largeur de $(2 \times 1/d_x)$ dans le domaine fréquentiel (puis des lignes verticales séparées d'une largeur de $(1/d_x)$). $G(u, \nu)$ nous montre que cette largeur est de l'ordre de la moitié de l'image donc correspondant à une bande de fréquence numérique de 0.5 (i.e., $N/2$ pixels séparés de $\Delta u = 1/N$). On en déduit donc facilement que :

$$\begin{aligned} 2 \times 1/d_x &= 0.5 \\ \text{c'est à dire,} \qquad d_x &= 4 \ \text{pixels} \end{aligned}$$

L'image Lena a donc été rendu flou par la PSF : $\Pi\left(\frac{x}{4}, y\right)$
**<2 pts>**

$\boxed{\mathbf{2}}$

On suppose qu'il n'y pas le problème d'aliasing dans la suite de ce raisonement.

Il faut se rappeler que plus l'image est petite et plus le spectre de cette image occupera un support de taille importante dans le domaine fréquentiel. De plus il faut se rappeler que le bruit blanc Gaussien se répartit uniformément sur toute les fréquences du spectre (contrairement au signal image qui se répartit surtout sur les basses et moyennes fréquences). Il y aura donc plus de composantes fréquentielles (en proportion) sur la petite image qui seront altérées et il sera donc plus difficile de les restaurer. Inversement, dans la grande image, il y a plus de hautes fréquences (pour lesquel le signal n'a aucune composante ou pour lequel le spectre fera apparaître des coefficients très faibles) et dans lesquelles, en proportion, plus de bruit vont s'y aditionner. En supprimant ces composantes hautes fréquences par filtrage passe-bas, on enlevera plus de composante de bruit dans le cas de la grande image, et donc l'image sera effectivement mieux restorée.

Un raisonement plus qualitatif (mais valable) consisterait à dire qu'une image sous-échantillonnée aura (comparativement à l'image originale non échantillonnée), des variations plus rapides dans l'image (la taille des régions étant deux fois moins grand) et donc aura un spectre plus étendu (plus de hautes fréquences et donc plus de fréquences entachées par du bruit). De ce fait, une restoration par filtre passe-bas sera plus difficile (que sur l'image originale).
**<5 pts>**

$\boxed{\mathbf{3}}$

```
void AddImpulseNoise(float** mat,int lgth,int wdth,float prop)
.  {
.    for(int i=0 ;i<lgth ;i++) for(int j=0 ;j<wdth ;j++)
.    if (randomize()<prop)
.       {
.       if (randomize()<0.5) mat[i][j]=0.0 ;
.       else mat[i][j]=255.0 ;
.       }
.    }
```

**<5 pts>**

$\boxed{\mathbf{4}}$

Oui pour le flou de la question a-] car la TF d'une porte est un sinus cardinal qui comporte des zéros dans le domaine fréquentiel. Non pour le flou de la question b-] car la TF d'une Gaussienne est une Gaussienne qui atténuera des fréquences spatiales de l'image dégradée mais ne les détruira pas.
**<4 pts>**

Pour la question c-] l'énoncé est ambigu et j'ai du compter juste les deux réponses possibles :

1. S'agit-il d'une PSF résultant de la multiplication avec une Gaussienne ? Dans ce cas, on a :

$$\text{GaussSpat} \cdot \cos(2\pi\nu_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \text{GaussFreq} * \frac{1}{2}\Big(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\Big) = 2 \quad \text{Gaussiennes décalées en } \pm\nu_0$$

et comme une gaussienne ne s'annule jamais complètement, elle atténuera les fréquences spatiales de l'image. Il s'agit ici d'un filtre passe-bande.

2. S'agit-il d'une PSF résultant de la convolution d'une Gaussienne avec un cosinus ? Dans ce cas, on a :

$$\text{car} \quad \text{GaussSpat} * \cos(2\pi\nu_0) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \text{GaussFreq} \cdot \frac{1}{2}\Big(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\Big) = 2 \quad \text{Dirac en } \pm\nu_0$$

et dans ce cas toute les fréquences, exceptée en $\pm\nu_0$, seront détruites !

**<4 pts>**

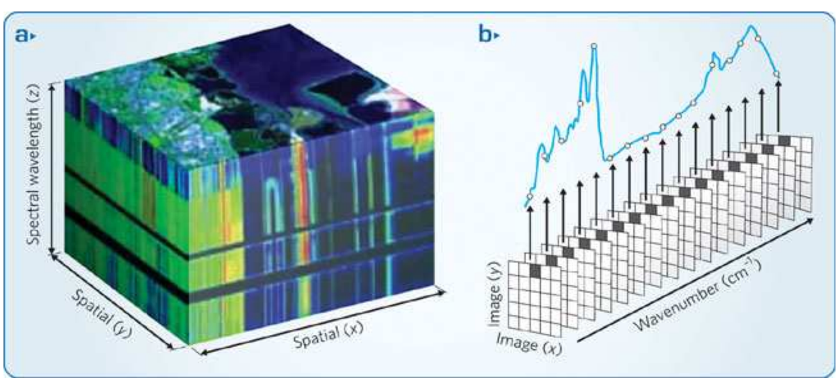
---

---

**IV. Image Couleur et Multispectrale** (20 pts)

1. **Couleur**
   (a) Une voiture rouge est éclairée (uniquement) par une lumière au phosphore bleu (n'émettant donc que de la longueur d'onde propre à la couleur bleu). Quel sera la couleur émise par la voiture, sous ses conditions d'illumination ?
   **<5 pts>**
   (b) Expliquer brièvement pourquoi et/ou quel est l'intérêt que l'espace de couleur CMY, utilisée pour les imprimantes couleures, utilise comme origine du repère (point $(0, 0, 0)$), la couleur blanche (contrairement à l'espace RVB qui lui utilise le noir comme origine du repère) ?
   **<5 pts>**

2. **Image Multispectrale**
   Une image hyperspectrale $I(x, y, z)$ est un cube de données à deux dimensions spatiales ($x$ et $y$) et une dimension spectrale ($z \in [0, \ldots, K]$). À chaque pixel, correspond une position géographique et la luminance spectrale observée dans différentes longueurs d'ondes lumineuse (de la gamme ultraviolet, visible et proche infrarouge).




   (a) À partir de ce cube hyperspectrale $I(x, y, z)$, généralement acquis par un avion ou un satellite, indiquer comment on pourrait obtenir ou créer l'image couleur qu'un être humain pourrait voir de cet avion ou de ce satellite. ?
   **<4 pts>**

(b) On aimerait obtenir (à partir de ce cube $I()$ une carte de contour soft, c'est à dire une image $C(x, y)$ ou à chaque pixel la luminance serait d'autant plus grande qu'il existe probablement un contour au sens de cette image multidimensionnelle. Donner deux façons de calculer cette luminance en $x, y$ qui ait un sens.
**<6 pts>**

---

**Réponse**

**1.(a)**

On doit de rappeler que la lumière blanche est en fait le mélange de toutes les couleurs qui existent et, toujours d'après ce que l'on a dit en cours ; une voiture est rouge car, à partir de la lumière blanche qui l'éclaire (et qui est la somme de toute les couleurs), elle absorbe toute les couleurs (par exemple le vert et le bleu) sauf le rouge. Du coup, si on l'éclaire (uniquement) par une lampe au phosphore bleu, ce bleu va être absorbé par la voiture et elle n'émettra donc plus aucune couleur ou longueur d'onde. Elle semblera donc noire.
**<5 pts>**

**1.(b)**

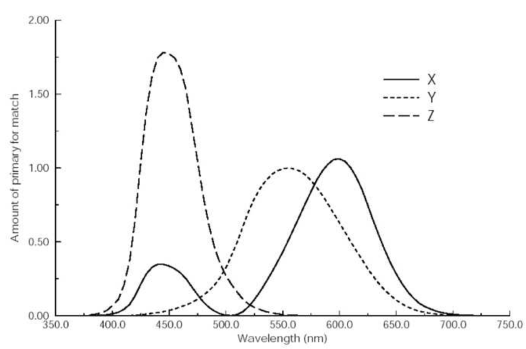
L'espace de couleur CMY, utilisée pour les imprimantes couleures, utilise comme origine du repère (point $(0, 0, 0)$), la couleur blanche car la couleure est construite à partir d'une feuille de papier blanche contrairement à l'espace RVB qui construit la couleur à partir d'une abscence de couleure (i.e., le noir). De plus,, dans cet espace, on peut habilement utiliser de l'encre noire (facile à créer) pour sauvegarder de l'encre couleure (espace CMYQ).
**<5 pts>**

**2.(a)**

De la méthode la plus simple à la plus compliquée mais la plus précise, on a :

**[1]** On pourrait prendre les plans dont les longueurs d'onde correspondantes sont dans la gamme du visible (hors infra-rouge et ultra-violet) et moyenner les tranches qui sont autour de la longueur d'onde du rouge, du vert et du bleu et de les combiner pour arriver à une matrice couleure RVB.

**[2]** Une méthode tout aussi simple consisterait à prendre pour le rouge, vert et bleu la tranche du cube correspondant à la longueur d'onde du rouge, du vert et du bleu et de les combiner pour arriver à une matrice couleure RVB (image au format ppm) comme celle qui pourrait être vue à partir d'un oeil humain.




**[3]** Une autre méthode, un peu plus compliquée mais plus précise, consiterait à prendre pour chaque couleur rouge, verte et bleu, la pondération de chacune des tranche du cube hyperspectrale correspondant aux valeurs discrétisées des trois spectres correspondant aux trois sources hypothétiques $x, y, z$ (couleure primaire virtuelle définie par la CIE.
**<5 pts>**

**2.(b)**

On pourrait bien sur transformer l'image en niveaux de gris et calculer la norme du gradient sur cette image. Mais si on veut utiliser toutes les données de ce cube on pourrait aussi faire :

1] La moyenne de la norme des gradients sur

$$C(x,y) \quad \propto \quad \sum_{k=1}^{K} \sqrt{(I(x+1,y,k)-I(x,y,k))^2 + (I(x,y+1,k)-I(x,y,k))^2}$$

2] En prenant la définition habituelle de la norme Euclidienne du gradient mais appliqué à la distance (norme Euclidienne) existant entre deux vecteurs.

$$\begin{aligned} G_x &\propto \sum_{k=1}^{K} \sqrt{(I(x+1,y,k)-I(x,y,k))^2} \\ G_y &\propto \sum_{k=1}^{K} \sqrt{(I(x,y+1,k)-I(x,y,k))^2} \\ C(x,y) &\propto \sqrt{(G_x)^2 + (G_y)^2} \end{aligned}$$

**<6 pts>**

---

**V. Misc.** (21 pts)

1. **Tomographie**
   Voici le type d'image que l'on obtient par reconstruction tomographique avec la méthode de la retroprojection filtrée ou par la méthode du théorème de la tranche centrale de Fourier avec les deux méthodes présentées en cours (et dont l'une à été vue en Travaux Pratiques (TP)). On s'apercoit qu'il exsite sur ces deux images, un artefact en cercle autour du portrait de Lena.

   (a) Expliquer d'où vient cet artefact en cercle et qu'est-ce qui faudrait changer à la méthode décrite en TP pour ne pas l'obtenir.
   **<5 pts>**

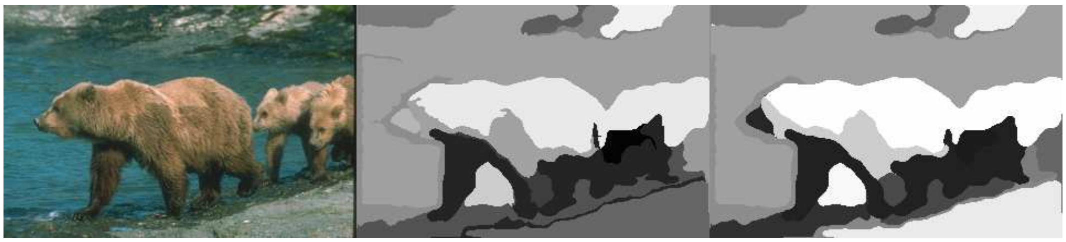
   (b) Expliquer quel(s) changement(s) il faudrait faire pour obtenir de meilleur reconstruction à partir de la méthode vue en TP.
   **<5 pts>**

2. **Segmentation**
   (a) i. Donner la différence qui existe entre la notion de *classe* et de *région* dans le problème de la segmentation d'image.

   ii. Si l'algorithme de segmentation est un algorithme des $K$-moyennes, dire ce que représente un des clusters de cet algorithme (une classe ou une région ?) et dire qualitativement aussi comment à partir d'une image de classes, on peut faire une image en régions distinctes (un niveau de gris pour chaque region).

   **<6 pts>**

(b) On a réalisé une segmentation d'une image couleure texturée par une méthode qui donne de bons résultats de segmentation mis à part qu'elle laisse sur l'image segmentée, la présence de contours très fin d'épaisseur un ou deux pixels que l'on aimerait par un post-traitement supprimer. Quelle traitement proposeriez vous qui permettrait de passer facilement de la deuxième à la troisième image ?
**<5 pts>**



---

**Réponse**

**1.(a)**

Cet artefact en cercle est due au fait que la taille du buffer a été prise égale à la taille de l'image lorsqu'on obtient les différentes projections (simulation du tomographe). Lorsqu'on tourne l'image carré de 45 degré, l'image tourné de cet angle est de taille Longueur ou Largeur multiplié par $\sqrt{2}$. En utilisant un buffer de taille égal à Longueur ou Largeur même quant l'image est tournée de 45 degré, les bords ne sont pas pris en compte et crée cet artéfact en cercle.
**<5 pts>**

**1.(b)**

Dans le cas de la rétroprojection filtrée, qui est la méthode vue en TP cette année :

1. Un vecteur permettant de récupérer les projections de taille length ou width $\times\sqrt{2}$. C'est à dire utiliser un vecteur de projection et une image plus grandes qui puissent contenir l'image initiale (tournée d'un angle de projection) en entier.
2. Une interpolation plus élaborée que bilinéaire
3. Une fenêtre de hanning pondérant le filtre passe-haut
4. Plus de projections

**<5 pts>**

**2.(a)**

Une classe est un ensemble de pixels partageant les mêmes caractéristiques (textural, géométrique, de couleur, etc.).
Une région est un ensemble de pixels connectés appartenant à une même classe. Il y a donc autant ou plus de régions que de classe dans une image segmentée et on passe de l'une à l'autre en identifiant les régions appartenant à une même classe et en leur donnant une couleur (i.e., étiquette ou niveaux de gris différent pour chaque région).
**<3 pts>**

Chaque cluster de l'algorithme des K-moyenne nous donne une classe puisque ce rassemblement se fait indépendemment de la position de chaque pixel.
**<3 pts>**

**2.(b)**

Avec une opération locale du type filtre médian ou opérateur morphologique.
**<5 pts>**