

# **1. Méthode du simplexe et son analyse**

# Problème du restaurateur

- **Disponibilités du restaurateur:**

30 oursins

24 crevettes

18 huîtres

$$\max 8x + 6y$$

Sujet à

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$

- **Deux types d'assiettes de fruits de mer offertes par le restaurateur:**

à \$8 composée de 5 oursins, 2 crevettes et 1 huître

à \$6 composée de 3 oursins, 3 crevettes et 3 huîtres

- **Problème:** déterminer le nombre d'assiettes de chaque type à offrir pour que le restaurateur maximise son revenu en respectant les disponibilités de fruits de mer

# **Transformation de max en min**

# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } w \in X \subset R^n$$

où  $f: X \rightarrow R^1$ .

# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } w \in X \subset R^n$$

où  $f: X \rightarrow R^1$ .

- Soit  $w^*$  un point de  $X$  où le maximum est atteint.

# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } w \in X \subset R^n$$

où  $f: X \rightarrow R^1$ .

- Soit  $w^*$  un point de  $X$  où le maximum est atteint.
- Donc  $f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\max f(w)$$

$$\text{Sujet à } w \in X \subset \mathbb{R}^n$$

où  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

- Soit  $w^*$  un point de  $X$  où le maximum est atteint.
- Donc  $f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$
- ou  $-f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\begin{aligned} & \max f(w) \\ & \text{Sujet à } w \in X \subset R^n \end{aligned}$$

où  $f: X \rightarrow R^1$ .

- Soit  $w^*$  un point de  $X$  où le maximum est atteint.

- Donc  $f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

ou  $-f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$\begin{aligned} -f(w^*) &= \min -f(w) \\ & \text{Sujet à } w \in X \subset R^n \end{aligned}$$



# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\begin{aligned} & \max f(w) \\ & \text{Sujet à } w \in X \subset R^n \end{aligned}$$

où  $f: X \rightarrow R^1$ .

- Soit  $w^*$  un point de  $X$  où le maximum est atteint.

- Donc  $f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

ou  $-f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$\begin{aligned} -f(w^*) &= \min -f(w) \\ & \text{Sujet à } w \in X \subset R^n \end{aligned}$$

et  $w^*$  est un point de  $X$  où la fonction  $-f(w)$  atteint son minimum.

# Transformation de max en min

- Considérons le problème de maximisation

$$\begin{aligned} & \max f(w) \\ & \text{Sujet à } w \in X \subset R^n \end{aligned}$$

où  $f: X \rightarrow R^1$ .

- Soit  $w^*$  un point de  $X$  où le maximum est atteint.

- Donc  $f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$

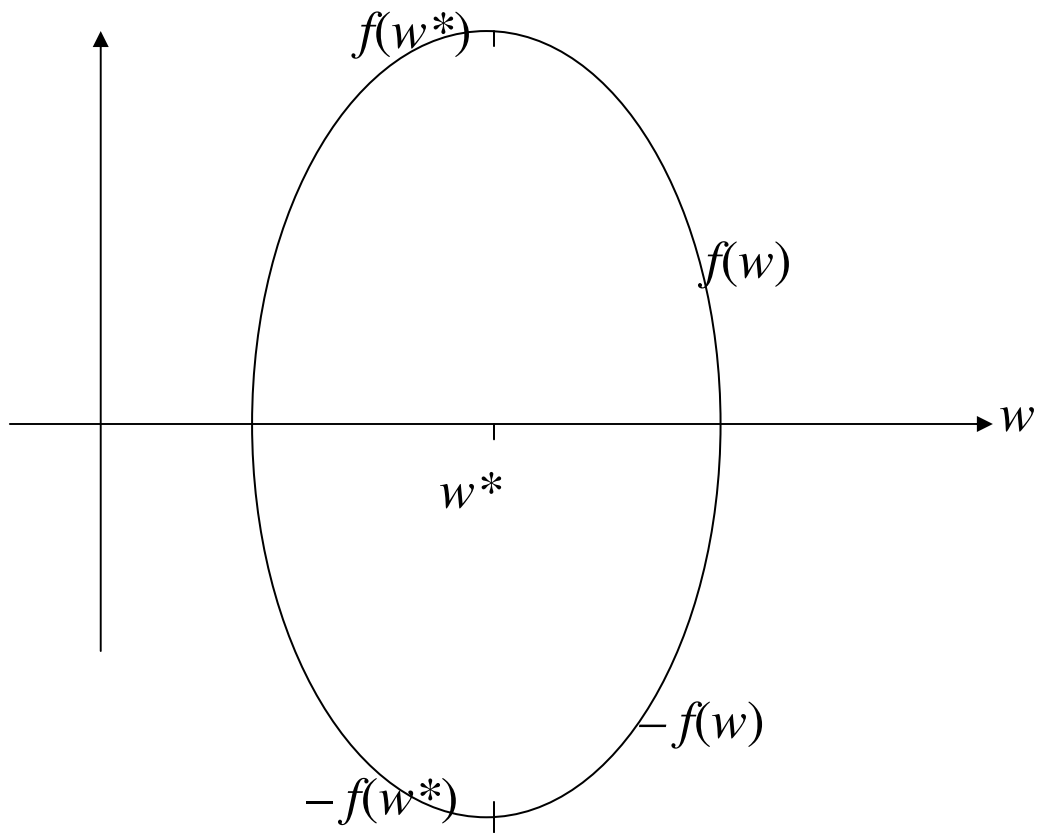
ou  $-f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$\begin{aligned} -f(w^*) &= \min -f(w) \\ & \text{Sujet à } w \in X \subset R^n \end{aligned}$$

et  $w^*$  est un point de  $X$  où la fonction  $-f(w)$  atteint son minimum.

- Ainsi qu'on max  $f(w)$  ou qu'on min  $-f(w)$ , on retrouve la même sol. opt.  $w^*$ .



# Transformation de max en min

- De plus,

$$f(w^*) = \max f(w) = - \min -f(w) = - (-f(w^*))$$

- Nous allons toujours transformer les problèmes de max en problème de min.

- Donc  $f(w^*) \geq f(w) \quad \forall w \in X$   
ou  $-f(w^*) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$

- Par conséquent

$$-f(w^*) = \min -f(w)$$

Sujet à  $w \in X \subset \mathbb{R}^n$

et  $w^*$  est un point de  $X$  où la fonction  $-f(w)$  atteint son minimum.

- Ainsi qu'on max  $f(w)$  ou qu'on min  $-f(w)$ , on retrouve la même sol. opt.  $w^*$ .

# Problème du restaurateur

$$\begin{array}{ll} \max & 8x + 6y \\ \text{Sujet à} & \\ & 5x + 3y \leq 30 \\ & 2x + 3y \leq 24 \\ & 1x + 3y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & -(8x + 6y) \\ \text{Sujet à} & \\ & 5x + 3y \leq 30 \\ & 2x + 3y \leq 24 \\ & 1x + 3y \leq 18 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

## Méthode de résolution graphique

- Méthodes pour problème ne comportant que deux variables
- Revenons au problème du restaurateur après l'avoir transformer en un problème de min:

$$\min z = -8x - 6y$$

Sujet à

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$

# Domaine réalisable

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

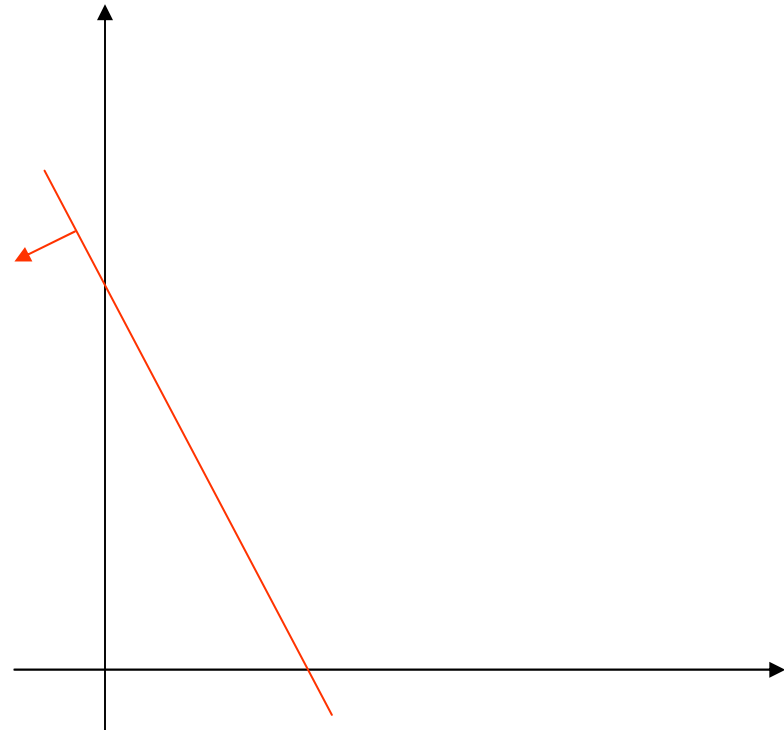
- Traçons la droite

$$5x + 3y = 30$$

L'ensemble des points qui satisfont la contrainte

$$5x + 3y \leq 30$$

sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation



# Domaine réalisable

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

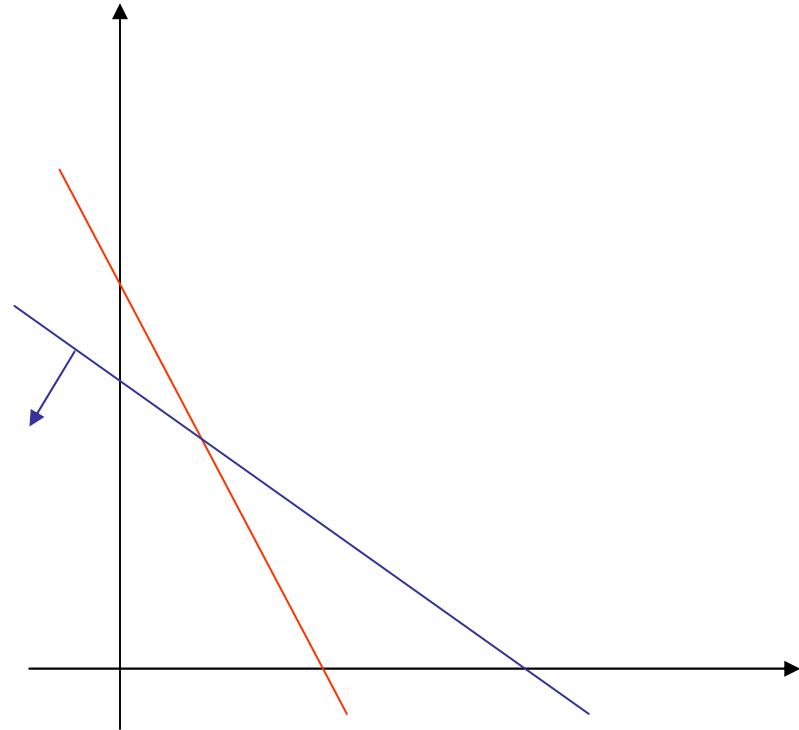
- Traçons la droite

$$2x + 3y = 24$$

L'ensemble des points qui satisfont la contrainte

$$2x + 3y \leq 24$$

sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation





# Domaine réalisable

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

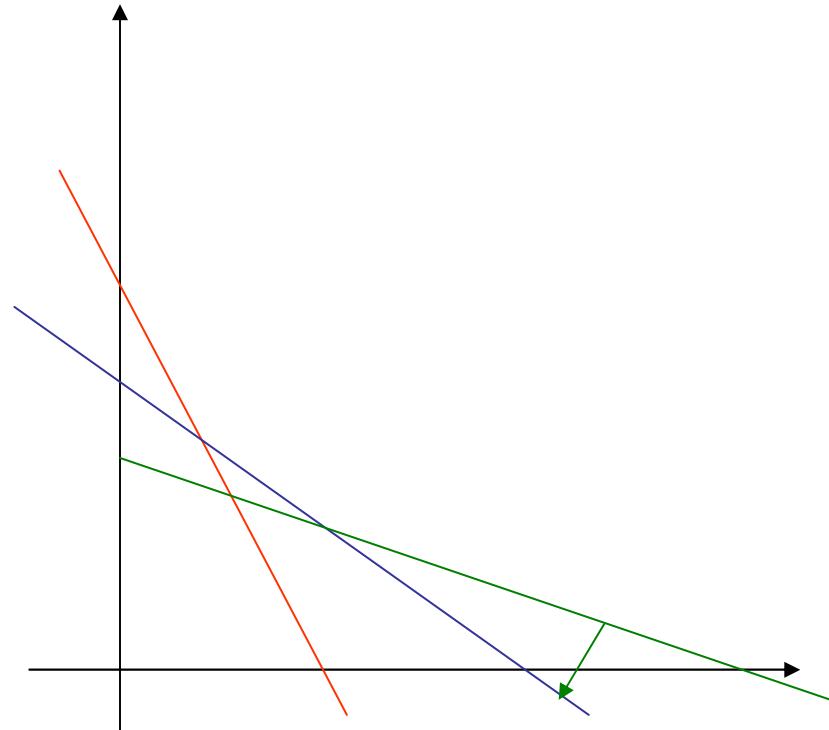
- Traçons la droite

$$1x + 3y = 18$$

L'ensemble des points qui satisfont la contrainte

$$1x + 3y \leq 18$$

sont sous cette droite car l'origine satisfait cette relation



# Domaine réalisable

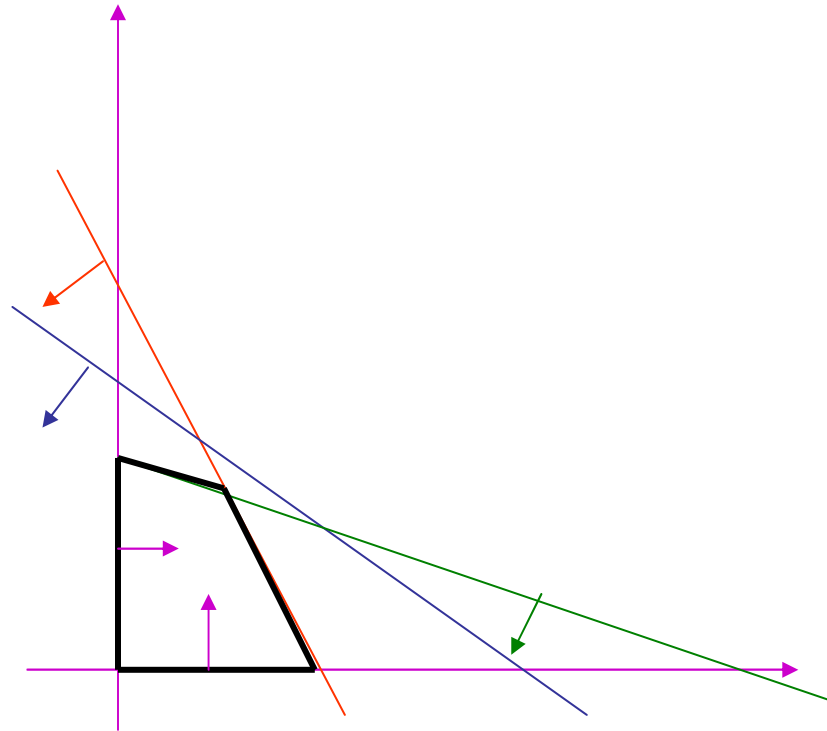
- L'ensemble des points réalisables pour le système

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$



# Résolution

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

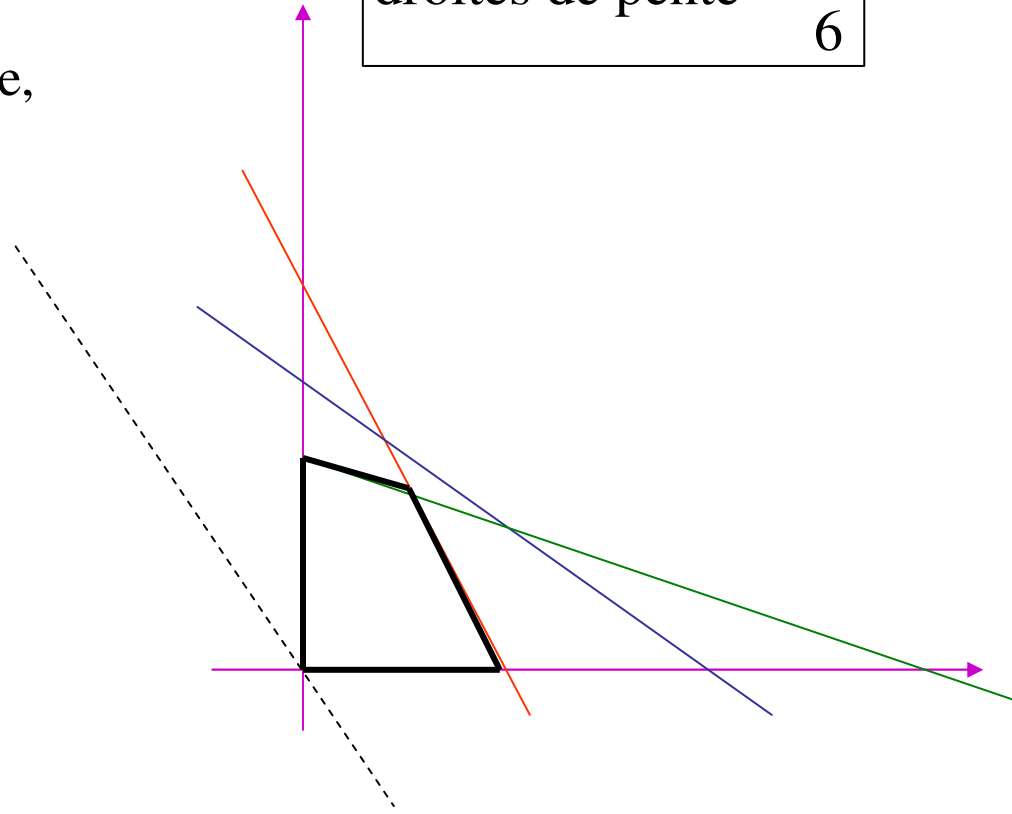
- Considérons la fonction économique :

$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:  
 $x = 0$  et  $y = 0 \Rightarrow z = 0$

$$y = -\frac{8}{6}x - \frac{z}{6}$$

droites de pente  $-\frac{8}{6}$



# Résolution

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$1x + 3y \leq 18$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

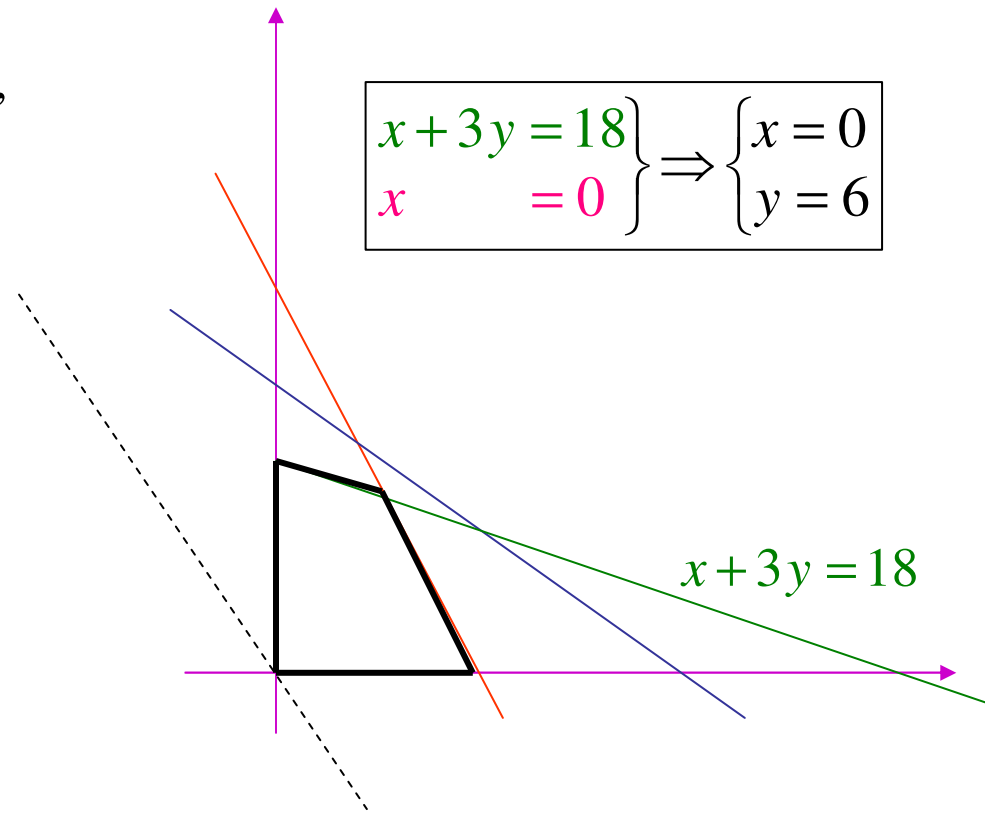
- Considérons la fonction économique :

$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x = 0 \text{ et } y = 6 \Rightarrow z = -36$$



# Résolution

$$\begin{array}{l} 5x + 3y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ 1x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

- Considérons la fonction économique :

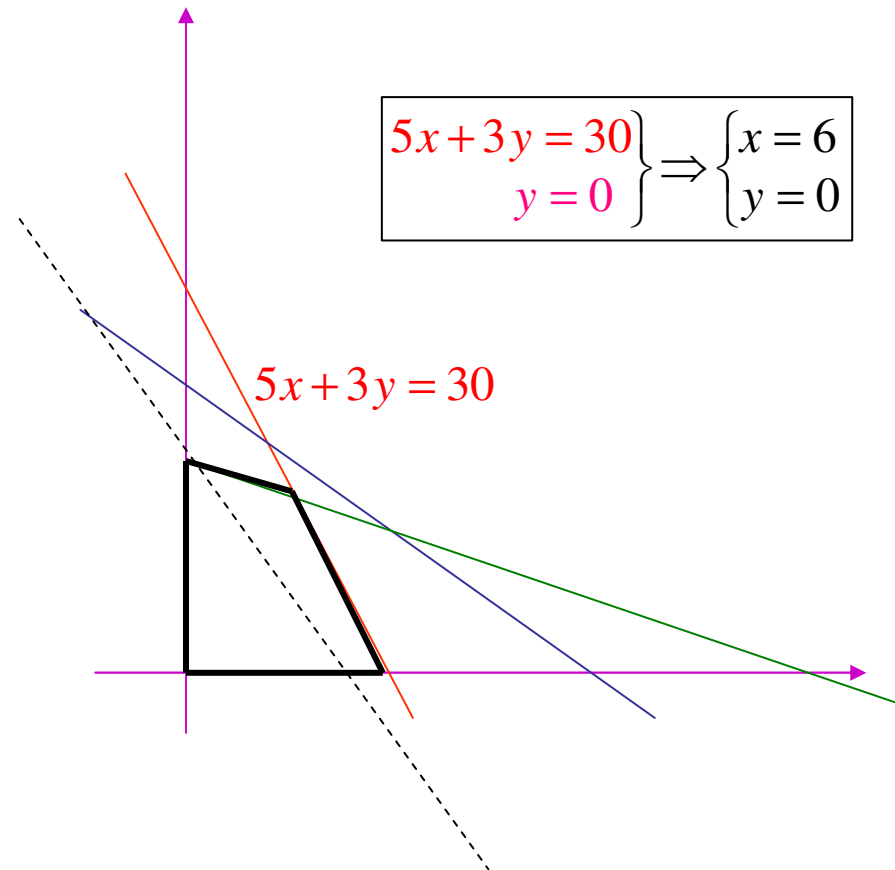
$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x = 0 \text{ et } y = 6 \Rightarrow z = -36$$

$$x = 6 \text{ et } y = 0 \Rightarrow z = -48$$



# Résolution

$$\begin{aligned} 5x + 3y &\leq 30 \\ 2x + 3y &\leq 24 \\ 1x + 3y &\leq 18 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

- Considérons la fonction économique :

$$z = -8x - 6y.$$

- Plus on s'éloigne de l'origine, plus la valeur diminue:

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \Rightarrow z = 0$$

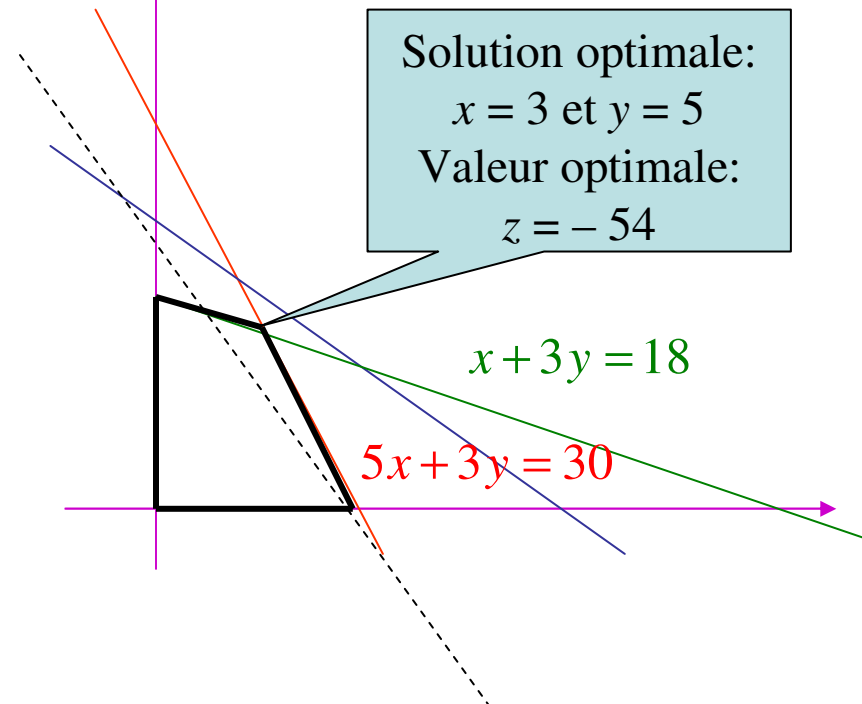
$$x = 0 \text{ et } y = 6 \Rightarrow z = -36$$

$$x = 6 \text{ et } y = 0 \Rightarrow z = -48$$

$$x = 3 \text{ et } y = 5 \Rightarrow z = -54.$$

- Impossible d'aller plus loin sans sortir du domaine réalisable.

$$\left. \begin{aligned} 5x + 3y &= 30 \\ x + 3y &= 18 \\ \hline 4x &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ 3 + 3y &= 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 5 \end{aligned} \right.$$



# Variables d'écart

- Transformer les contraintes d'inégalité en des contraintes d'égalité avec des **variables d'écart** prenant des valeurs non négatives:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \rightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$
$$y_i \geq 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \rightarrow \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - y_i = b_i$$
$$y_i \geq 0$$

# Problème du restaurateur transformé en min

- Transformons les contraintes d'inégalité du problème du restaurateur en égalité avec les variables d'écart  $u$ ,  $p$  et  $h$ :

$$\begin{array}{l} \min z = -8x - 6y \\ \text{Sujet à} \\ 5x + 3y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ 1x + 3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \min z = -8x - 6y \\ \text{Sujet à} \\ 5x + 3y + u = 30 \\ 2x + 3y + p = 24 \\ 1x + 3y + h = 18 \\ x, y, u, p, h \geq 0 \end{array}$$

- Les contraintes constituent un système de 3 équations comportant 5 variables. Exprimons 3 des variables en fonction des 2 autres



## Méthode du simplexe – forme algébrique

- Les contraintes constituent un système de 3 équations comportant 5 variables. Exprimons 3 des variables en fonction des 2 autres:

$$u = 30 - 5x - 3y$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

- En fixant  $x$  et  $y$  nous retrouvons les valeurs des autres variables.
- Il suffit de trouver les valeurs non négatives de  $x$  et  $y$  qui entraînent des valeurs non négatives de  $u$ ,  $p$  et  $h$  et qui donnent à  $z$  sa valeur minimale.
- Infinité de valeurs possibles. Il faut donc une procédure systématique pour  $y$  arriver.

## Choix de la variable à augmenter

- Une solution réalisable du système

$$u = 30 - 5x - 3y$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

est la suivante

$$x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 30, p = 24, h = 18 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

- Nous pouvons réduire la valeur de  $z$  en augmentant la valeur de  $x$ , ou bien celle de  $y$ , ou bien celles des deux.
- Mais nous choisissons d'augmenter la valeur d'une seule variable.
- Puisque nous cherchons à minimiser  $z$ , il est avantageux d'augmenter la valeur de  $x$  puisque pour chaque augmentation d'une unité de  $x$  entraîne une diminution de 8 unités de  $z$ .

## Augmentation limitée de la variable qui augmente

- Mais l'augmentation de  $x$  est limitée par les contraintes de non négativité des variables  $u$ ,  $p$  et  $h$ :

$$u = 30 - 5x - 3y \geq 0$$

$$p = 24 - 2x - 3y \geq 0$$

$$h = 18 - 1x - 3y \geq 0$$

- Puisque la valeur de  $y$  est maintenue à 0, ceci est équivalent à

$$u = 30 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 30 / 5 = 6$$

$$p = 24 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 24 / 2 = 12$$

$$h = 18 - 1x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 18$$

- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que

$$x \leq \min \{6, 12, 18\} = 6.$$

## Nouvelle solution

- $$\begin{aligned} u &= 30 - 5x - 3y \\ p &= 24 - 2x - 3y \\ h &= 18 - 1x - 3y \\ z &= 0 - 8x - 6y \end{aligned}$$

- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que

$$x \leq \min \{6, 12, 18\} = 6.$$

- Puisque l'objectif est de minimiser  $z$ , nous allons choisir la plus grande valeur possible de  $x$ : i.e.,  $x = 6$ .
- La nouvelle solution est donc

$$x = 6, y = 0 \Rightarrow u = 0, p = 12, h = 12 \text{ et } z = -48.$$

## Nouvelle itération

- $$\begin{aligned} u &= 30 - 5x - 3y \\ p &= 24 - 2x - 3y \\ h &= 18 - 1x - 3y \\ z &= 0 - 8x - 6y \end{aligned}$$

$5x + 3y + 1u$	$= 30$
$2x + 3y + 1p$	$= 24$
$1x + 3y + 1h$	$= 18$

- La nouvelle solution est donc

$$x = 6, y = 0 \Rightarrow u = 0, p = 12, h = 12 \text{ et } z = -48.$$

- Cette solution est la seule pour le système précédent lorsque  $y = u = 0$  puisque la matrice des coefficients des variables  $x, p$  et  $h$  est non singulière.
- Par conséquent, pour retrouver une autre solution différente, il faut que  $y$  ou  $u$  prennent une valeur positive.
- Précédemment, l'analyse était facilitée par le fait que les variables  $x$  et  $y$  qui pouvaient être modifiées étaient à droite.

# Transformation du système

- Isolons donc  $y$  et  $u$  du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

- $u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow 5x = 30 - u - 3y$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

# Transformation du système

- Isolons donc  $y$  et  $u$  du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

- $$u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow (5x = 30 - u - 3y) \div 5$$
$$\Rightarrow x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

## Transformation du système

- Isolons donc  $y$  et  $u$  du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

$$\bullet \quad u \quad = 30 - 5x - 3y \Rightarrow x = \underline{6 - 1/5u - 3/5y}$$

$$p \quad = 24 - 2x - 3y$$

$$\Rightarrow p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) - 3y$$

$$\Rightarrow p = 12 + 2/5u - 9/5y$$

$$h \quad = 18 - 1x - 3y$$

$$z \quad = 0 - 8x - 6y$$

- Substituons la valeur de  $x$  dans les autres équations



# Transformation du système

- Isolons donc  $y$  et  $u$  du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

$$\begin{array}{lcl}
 u & = 30 - 5x - 3y & \Rightarrow x = \frac{6 - 1/5u - 3/5y}{1} \\
 p & = 24 - 2x - 3y & \Rightarrow p = 12 + 2/5u - 9/5y \\
 h & = 18 - 1x - 3y & \\
 & & \Rightarrow h = 18 - (6 - 1/5u - 3/5y) - 3y \\
 & & \Rightarrow h = 12 + 1/5u - 12/5y \\
 z & = 0 - 8x - 6y & 
 \end{array}$$

- Substituons la valeur de  $x$  dans les autres équations

## Transformation du système

- Isolons donc  $y$  et  $u$  du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

- $$\begin{array}{lcl} u & = 30 - 5x - 3y \Rightarrow & x = \frac{6 - 1/5u - 3/5y}{1} \\ p & = 24 - 2x - 3y \Rightarrow & p = 12 + 2/5u - 9/5y \\ h & = 18 - 1x - 3y \Rightarrow & h = 12 + 1/5u - 12/5y \\ z & = 0 - 8x - 6y & \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow z = 0 - 8(6 - 1/5u - 3/5y) - 6y \\ & \Rightarrow z = -48 + 8/5u - 6/5y \end{aligned}$$

- Substituons la valeur de  $x$  dans les autres équations

# Systeme équivalent

- Nous avons donc transformer le système

- $$\begin{array}{lcl} u & = 30 - 5x - 3y \Rightarrow & x & = 6 - 1/5u - 3/5y \\ p & = 24 - 2x - 3y \Rightarrow & p & = 12 + 2/5u - 9/5y \\ h & = 18 - 1x - 3y \Rightarrow & h & = 12 + 1/5u - 12/5y \\ z & = 0 - 8x - 6y \Rightarrow & z & = -48 + 8/5u - 6/5y \end{array}$$

# Systeme equivalent

- Nous obtenons un nouveau systeme equivalent au precedent (dans le sens ou les deux systemes ont les memes solutions realisables)
- Notons qu'il n'est pas interessant d'augmenter  $u$  car alors la valeur de  $z$  augmente
- Nous repetons le processus precedent en augmentant la valeur de  $y$

$$\begin{aligned}x &= 6 - 1/5u - 3/5y \\p &= 12 + 2/5u - 9/5y \\h &= 12 + 1/5u - 12/5y \\z &= -48 + 8/5u - 6/5y\end{aligned}$$

## Nouvelle itération

- Mais l'augmentation de  $y$  est limitée par les contraintes de non négativité des variables  $x$ ,  $p$  et  $h$ :

$$\begin{aligned}x &= 6 - 1/5u - 3/5y \geq 0 \\p &= 12 + 2/5u - 9/5y \geq 0 \\h &= 12 + 1/5u - 12/5y \geq 0\end{aligned}$$

- Puisque la valeur de  $u$  est maintenue à 0, ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}x &= 6 - 3/5y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 10 \\p &= 12 - 9/5y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 20/3 \\h &= 12 - 12/5y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 5\end{aligned}$$

- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que  
 $y \leq \min \{10, 20/3, 5\} = 5$ .

## Nouvelle itération

- $x = 6 - 1/5u - 3/5y \geq 0$   
 $p = 12 + 2/5u - 9/5y \geq 0$   
 $h = 12 + 1/5u - 12/5y \geq 0$   
 $z = -48 + 8/5u - 6/5y$
- Donc la solution demeure réalisable aussi longtemps que  
 $y \leq \min \{10, 20/3, 5\} = 5.$
- Puisque l'objectif est de minimiser  $z$ , nous allons choisir la plus grande valeur possible de  $y$ : i.e.,  $y = 5.$
- La nouvelle solution est donc  
 $y = 5, u = 0 \Rightarrow x = 3, p = 3, h = 0 \text{ et } z = -54.$

# Solution optimale

- Isolons donc  $h$  et  $u$  du côté droit des équations.
- Utilisons l'équation où  $y$  et  $h$  apparaissent pour exprimer  $y$  en fonction de  $h$  et  $u$ .

$$h = 12 + 1/5u - 12/5y$$

- Substituons la valeur de  $y$  dans les autres équations.
- Le système devient

$$x = 3 - 1/4u + 1/4h$$

$$p = 3 + 1/4u + 3/4h$$

$$y = 5 + 1/12u - 5/12h$$

$$z = -54 + 3/2u + 1/2h$$

- La solution  $y = 5, u = 0, x = 3, p = 3, h = 0$  (dont la valeur  $z = -54$ ) est donc optimale puisque les coefficients de  $u$  et  $h$  sont positifs.
- En effet la valeur de  $z$  ne peut qu'augmenter lorsque  $u$  ou  $h$  augmente.

# Lien avec la résolution graphique

Lors de la résolution du problème du restaurateur avec la méthode du simplexe:

La solution initiale est

$x = y = 0$  ( $u = 30, p = 24, h = 18$ )  
et la valeur  $z = 0$

En augmentant  $x$ ,

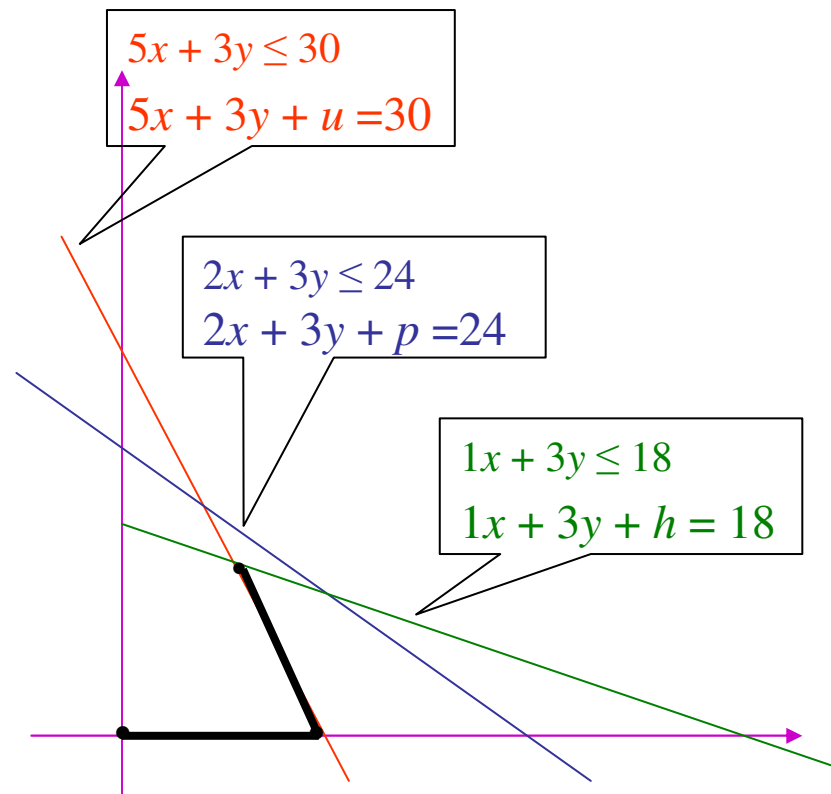
la solution devient

$x = 6, y = 0$  ( $u = 0, p = 12, h = 12$ )  
et la valeur  $z = -48$

En augmentant  $y$ ,

la solution devient

$x = 3, y = 5$  ( $u = 0, p = 3, h = 0$ )  
et la valeur  $z = -54$





## Type de solutions considérées

- Nous n'avons considéré que des solutions où il n'y a que trois variables positives!
- Comme il y a 5 variables, il y a au plus  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$  solutions différentes de ce type.
- Pourrait-il exister une meilleure solution qui aurait un nombre de variables positives différent de 3?
- Nous pouvons démontrer que non.

# Forme standard

- Après avoir transformé les contraintes d'inégalité en égalités, nous retrouvons le problème sous sa forme standard où certaines variables peuvent être des variables d'écart:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{Sujet à} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

# Itération typique

- Pour analyser une itération typique du simplexe, supposons qu'après un certain nombre d'itérations les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont exprimées en fonction des autres variables .

## Forme du système

- Le système est de la forme suivante:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
 x_2 + & \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2s}x_s + \dots + \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_r + & \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n & = \bar{b}_r \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m + & \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ms}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m \\
 & \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n & = \bar{z} - \bar{z}
 \end{array}$$

- Les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont dénotées comme étant les **variables dépendantes** alors que les autres variables sont les **variables indépendantes**.

# Itération typique

- Pour analyser une itération typique du simplexe, supposons qu'après un certain nombre d'itérations les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont exprimées en fonction des autres variables .
- Les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont dénotées comme étant les **variables dépendantes** alors que les autres variables sont les **variables indépendantes**.
- À chaque itération, les transformations nous assurent que les termes de droite demeurent non négatifs de sorte que les variables dépendantes sont non négatives lorsque la valeur des variables indépendantes est 0.

## Forme du système

- Le système est de la forme suivante:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
 x_2 + & \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2s}x_s + \dots + \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_r + & \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n & = \bar{b}_r \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m + & \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ms}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m \\
 & \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n & = \bar{z} - \bar{z}
 \end{array}$$

## Forme du système

- Isolons les variables dépendantes à gauche des égalités:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 \cdot & & \cdot \\
 x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 \cdot & & \cdot \\
 x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z & = & \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{array}$$

# Étape 1: Choix de la variable d'entrée

- Pour choisir la variable qui augmente (dénotée **variable d'entrée**), nous considérons l'équation de  $z$

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\&\cdot \\&\cdot \\x_r &= \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\&\cdot \\&\cdot \\x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n\end{aligned}$$



# Étape 1: Choix de la variable d'entrée

- Pour choisir la variable qui augmente (dénotee **variable d'entrée**), nous considérons l'équation de  $z$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 & \cdot & \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 & \cdot & \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z & = & \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{array}$$

- Dénotons  $\bar{c}_s = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \bar{c}_j \}$

# Étape 1: Choix de la variable d'entrée

- Pour choisir la variable qui augmente (dénotée **variable d'entrée**), nous considérons l'équation de  $z$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_r &= \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{aligned}$$

Si  $\bar{c}_s \geq 0$ , alors la solution est optimale, et l'algorithme s'arrête

- Dénotons  $\bar{c}_s = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \bar{c}_j \}$

# Étape 1: Choix de la variable d'entrée

- Pour choisir la variable qui augmente (dénotée **variable d'entrée**), nous considérons l'équation de  $z$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 &\vdots \\
 x_{m+1} &= \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 &\vdots \\
 x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{aligned}$$

Si  $\bar{c}_s < 0$ , alors la variable  $x_s$  devient la **variable d'entrée**.  
 Nous allons à l'étape 2.

- Dénotons  $\bar{c}_s = \min_{1 \leq j \leq n} \{\bar{c}_j\}$

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Nous devons déterminer la plus grande valeur que peut prendre la variable d'entrée pour que la solution demeure réalisable.
- En fait, l'augmentation de la valeur de la variable d'entrée peut être limitée par une première variable dépendante qui devient égale à 0. Cette variable est dénotée **variable de sortie**.
- Pour identifier la plus grande valeur que la **variable d'entrée** peut prendre, nous revenons au système précédent:

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \\
 x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \\
 \cdot & & \cdot \\
 x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \\
 \cdot & & \cdot \\
 x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \\
 z & = & \bar{z} + \bar{c}_s x_s
 \end{array}$$

- Mais comme les autres variables indépendantes demeurent égales à 0, nous pouvons les éliminer du système.

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ & & \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ & & \\ \cdot & & \cdot \\ & & \\ & x_r & = \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ & & \\ \cdot & & \cdot \\ & & \\ & x_m & = \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

- Deux cas doivent être analysés.

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

Si  $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$   
alors la **variable d'entrée**  $x_s$  peut  
augmenter à l'infini sans qu'aucune  
variable dépendante ne devienne  
négative.

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

Si  $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$   
alors la **variable d'entrée**  $x_s$  peut  
augmenter à l'infini sans qu'aucune  
variable dépendante ne devienne  
négative.

En effet chaque variable dépendante  
 $x_i$  augmente (si  $\bar{a}_{is} < 0$ ) ou conserve  
la même valeur (si  $\bar{a}_{is} = 0$ ).



## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

Si  $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$   
alors la **variable d'entrée**  $x_s$  peut  
augmenter à l'infini sans qu'aucune  
variable dépendante ne devienne  
négative.

En effet chaque vvariable dépendante  
 $x_i$  augmente (si  $\bar{a}_{is} \leq 0$ ) ou conserve  
la même valeur (si  $\bar{a}_{is} = 0$ ).

Dans ce cas l'algorithme s'arrête en indiquant que le problème  
n'est pas borné inférieurement

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

Dans le deuxième cas où  $\bar{a}_{is} > 0$  pour au moins un  $i$ , l'augmentation de  $x_s$  est limitée par le fait que la valeur d'une première variable dépendante est réduite à 0 sous l'effet de l'augmentation de  $x_s$ .

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

Dans le deuxième cas où  $\bar{a}_{is} > 0$  pour au moins un  $i$ , l'augmentation de  $x_s$  est limitée par le fait que la valeur d'une première variable dépendante est réduite à 0 sous l'effet de l'augmentation de  $x_s$ .

Mais seulement les variables dépendantes  $x_i$  telle que  $\bar{a}_{is} > 0$  sont pertinentes. En effet, si  $\bar{a}_{is} \leq 0$ , nous venons d'observer que la valeur de la variable  $x_i$  reste la même ou augmente, et par conséquent cette variable ne peut être celle qui limite l'augmentation de la **variable d'entrée**  $x_s$ .

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\ x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0 \end{array}$$

En somme, la solution demeure réalisable

$$\Leftrightarrow \forall i \text{ telque } \bar{a}_{is} > 0$$

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_s \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\
 x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0
 \end{array}$$

En somme, la solution demeure réalisable

$$\Leftrightarrow \forall i \text{ tel que } \bar{a}_{is} > 0$$

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \geq 0 \Leftrightarrow x_s \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

Par conséquent la plus grande valeur que peut prendre la **variable d'entrée**  $x_s$  est

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

- Les conditions pour que la solution demeure réalisable deviennent donc:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} x_s \geq 0 \\
 x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2s} x_s \geq 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rs} x_s \geq 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{ms} x_s \geq 0
 \end{array}$$

La variable indépendante  $x_r$  qui limite l'augmentation de la **variable d'entrée**  $x_s$  est la **variable de sortie**.

En somme, la solution demeure réalisable

$$\Leftrightarrow \forall i \text{ tel que } \bar{a}_{is} > 0$$

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_s \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

Par conséquent la plus grande valeur que peut prendre la **variable d'entrée**  $x_s$  est

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

## **Étape 3: Pivot pour transformer le système**

## Étape 3: Pivot pour transformer le système

- Nous devons transformer le système :

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 & = & \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 \cdot & & \cdot \\
 x_r & = & \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 \cdot & & \cdot \\
 x_m & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z & = & \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{array}$$

- pour ramener la **variable d'entrée**  $x_s$  à gauche à la place de la **variable de sortie**  $x_r$  et vice-versa.



## Étape 3: Pivot pour transformer le système

- En effet nous échangeons les rôles des variables  $x_s$  et  $x_r$  car
  - la **variable d'entrée**  $x_s$  (qui était une variable indépendante avec une valeur nulle) devient une variable dépendante avec une valeur non négative
  - la **variable de sortie**  $x_r$  (qui était une variable dépendante avec une valeur non négative) devient une variable indépendante avec valeur nulle
- L'ensemble des opérations pour y arriver est dénoté par **pivot**

# Étape 3: Pivot pour transformer le système

$$x_1 = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n$$

$$x_2 = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n$$

⋮

$$x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n$$

⋮

$$x_m = \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n$$

$$z = \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n$$

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} - \frac{\bar{a}_{rm+1}}{\bar{a}_{rs}}x_{m+1} - \dots - \frac{1}{\bar{a}_{rs}}x_r - \dots - \frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}}x_n$$

Utilisons la  $r^e$  équation pour exprimer  $x_s$  en fonction de  $x_{m+1}, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n, x_r$

# Étape 3: Pivot pour transformer le système

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 &\vdots \\
 x_r &= \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 &\vdots \\
 x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{aligned}$$

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} - \frac{\bar{a}_{rm+1}}{\bar{a}_{rs}} x_{m+1} - \dots - \frac{1}{\bar{a}_{rs}} x_r - \dots - \frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}} x_n$$

Remplaçons  $x_s$  par son expression en fonction de  $x_{m+1}, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n, x_r$ , dans chacune des autres équations

$$x_1 = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s} \left( \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} - \frac{\bar{a}_{rm+1}}{\bar{a}_{rs}} x_{m+1} - \dots - \frac{1}{\bar{a}_{rs}} x_r - \dots - \frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}} x_n \right) - \dots - \bar{a}_{1n}x_n$$

$$x_1 = \left( \bar{b}_1 - \bar{a}_{1s} \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \right) - \left( \bar{a}_{1m+1} - \bar{a}_{1s} \frac{\bar{a}_{rm+1}}{\bar{a}_{rs}} \right) x_{m+1} - \dots - \left( -\bar{a}_{1s} - \frac{1}{\bar{a}_{rs}} \right) x_r - \dots - \left( \bar{a}_{1n} - \bar{a}_{1s} \frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}} \right) x_n$$

# Étape 3: Pivot pour transformer le système

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\&\cdot \\&\cdot \\x_r &= \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\&\cdot \\&\cdot \\x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n\end{aligned}$$

Remplaçons  $x_s$  par son expression en fonction de  $x_{m+1}, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n, x_r$ , dans chacune des autres équations

# Étape 3: Pivot pour transformer le système

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\
 x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_r &= \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\
 z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n
 \end{aligned}$$

Remplaçons  $x_s$  par son expression en fonction de  $x_{m+1}, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n, x_r$ , dans chacune des autres équations

# Étape 3: Pivot pour transformer le système

$$\begin{aligned}x_1 &= \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{1s}x_s - \dots - \bar{a}_{1n}x_n \\x_2 &= \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{2s}x_s - \dots - \bar{a}_{2n}x_n \\&\cdot \\&\cdot \\x_r &= \bar{b}_r - \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{rs}x_s - \dots - \bar{a}_{rn}x_n \\&\cdot \\&\cdot \\x_m &= \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \bar{a}_{ms}x_s - \dots - \bar{a}_{mn}x_n \\z &= \bar{z} + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n\end{aligned}$$

Remplaçons  $x_s$  par son expression en fonction de  $x_{m+1}, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n, x_r$ , dans chacune des autres équations

# Systeme equivalent pour la prochaine iteration

- Le pivot genere un systeme equivalent de la forme

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & = & \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1m+1}x_{m+1} - \dots - \tilde{a}_{1r}x_r - \dots - \tilde{a}_{1n}x_n \\
 x_2 & = & \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2m+1}x_{m+1} - \dots - \tilde{a}_{2r}x_r - \dots - \tilde{a}_{2n}x_n \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_s & = & \tilde{b}_r - \tilde{a}_{rm+1}x_{m+1} - \dots - \tilde{a}_{rr}x_r - \dots - \tilde{a}_{rn}x_n \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m & = & \tilde{b}_m - \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} - \dots - \tilde{a}_{mr}x_r - \dots - \tilde{a}_{mn}x_n \\
 z & = & \tilde{z} + \tilde{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \tilde{c}_r x_r + \dots + \tilde{c}_n x_n
 \end{array}$$

- Avec ce nouveau systeme nous complétons une nouvelle iteration.

# Méthode du simplexe – forme avec tableaux

- Nous allons plutôt utiliser des tableaux pour compléter les itérations de l'algorithme du simplexe.
- Illustrons d'abord en complétant une itération du simplexe sous cette forme pour le problème du restaurateur.



# Problèmes équivalents

$$\min z = -8x - 6y$$

Sujet à

$$5x + 3y + u = 30$$

$$2x + 3y + p = 24$$

$$1x + 3y + h = 18$$

$$x, y, u, p, h \geq 0$$

## Tableau équivalent au système

$$\min z = -8x - 6y$$

Sujet à

$$5x + 3y + u = 30$$

$$2x + 3y + p = 24$$

$$1x + 3y + h = 18$$

$$x, y, u, p, h \geq 0$$

$$\min z$$

Sujet à

$$5x + 3y + u = 30$$

$$2x + 3y + p = 24$$

$$1x + 3y + h = 18$$

$$-8x - 6y - z = 0$$

$$x, y, u, p, h \geq 0$$

$$u = 30 - 5x - 3y$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

$$\begin{aligned}
 u &= 30 - 5x - 3y \\
 p &= 24 - 2x - 3y \\
 h &= 18 - 1x - 3y \\
 z &= 0 - 8x - 6y
 \end{aligned}$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Étape 1: Critère d'entrée

$$\bar{c}_s = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \bar{c}_j \}$$

Pour déterminer la **variable d'entrée**, nous choisissons l'élément le plus petit de la dernière ligne du tableau

$$\min \{-8, -6, 0, 0, 0\} = -8.$$

**$x$  est donc la variable d'entrée**

$$\begin{aligned}
 u &= 30 - 5x - 3y \\
 p &= 24 - 2x - 3y \\
 h &= 18 - 1x - 3y \\
 z &= 0 - 8x - 6y
 \end{aligned}$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Étape 2: critère de sortie

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}$$

variable d'entrée

Pour identifier la variable de sortie déterminons le min des quotients des termes de droite divisés par les éléments correspondants dans la colonne de la variable d'entrée qui sont positifs:

$$u = 30 - 5x - 3y$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Étape 2: critère de sortie

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{a_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{is}} : a_{is} > 0 \right\}$$

$$\min \{30/5, 24/2, 18\} = 30/5 = 6$$

La variable correspondante  $u$   
devient la **variable de sortie**

variable d'entrée

$$u = 30 - 5x - 3y$$

$$p = 24 - 2x - 3y$$

$$h = 18 - 1x - 3y$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Variable de sortie

variable d'entrée

Étape 3 : Pivot

Transformation du système ou  
du tableau

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

RAPPEL: Nous utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

$$u = 30 - 5x - 3y \Rightarrow (5x = 30 - u - 3y) / 5$$

$$\Rightarrow x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

Ceci est équivalent à

$$5x + 3y + u = 30$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

RAPPEL: Nous utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

$$\begin{aligned}
 u &= 30 - 5x - 3y \Rightarrow (5x = 30 - u - 3y) / 5 \\
 &\Rightarrow x = 6 - 1/5u - 3/5y
 \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u = 30) / 5$$



Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

RAPPEL: Nous utilisons l'équation où  $x$  et  $u$  apparaissent pour exprimer  $x$  en fonction de  $u$  et  $y$ :

$$\begin{aligned}
 u &= 30 - 5x - 3y \Rightarrow (5x = 30 - u - 3y) / 5 \\
 &\Rightarrow x = 6 - 1/5u - 3/5y
 \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u = 30) / 5 \Rightarrow x + 3/5y + 1/5u = 6$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

variable de sortie

variable d'entrée

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u = 30) / 5 \Rightarrow x + 3/5y + 1/5u = 6$$

En terme du tableau, ceci est équivalent à diviser la ligne de la **variable de sortie** par le coefficient de la **variable d'entrée** dans cette ligne

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

← Divisons cette ligne par 5

← variable de sortie

← variable d'entrée

Ceci est équivalent à

$$(5x + 3y + u = 30) / 5 \Rightarrow x + 3/5y + 1/5u = 6$$

En terme du tableau, ceci est équivalent à diviser la ligne de la **variable de sortie** par le coefficient de la **variable d'entrée** dans cette ligne

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Divisons cette ligne par 5

variable de sortie

variable d'entrée

$$x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}u = 6$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Divisons cette ligne par 5  
variable de sortie

variable d'entrée

Le tableau qui en résulte est le suivant

$$x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}u = 6$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$				6
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

- Rappel: Nous substituons l'expression de  $x$  dans les autres équations

$$p = 24 - 2x - 3y \quad \xrightarrow{x = 6 - 1/5u - 3/5y}$$

$$\Rightarrow p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) - 3y$$

$$\text{Ceci est équivalent à : } p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) + 2x - 2x - 3y$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + p - 2(x + 3/5y + 1/5u) = 24 - 2(6)$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

deuxième ligne  
moins  
2(la première ligne)

Ceci est équivalent à :  $p = 24 - 2(6 - 1/5u - 3/5y) + 2x - 2x - 3y$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + p - 2(x + 3/5y + 1/5u) = 24 - 2(6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} 2x + 3y \\ + p = 24 \end{array}$$

$$\underline{- 2(x + 3/5y + 1/5u = 6)}$$

$$0x + 9/5y - 2/5u + p = 12$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

deuxième ligne  
moins  
2(la première ligne)

$$0x + 9/5y - 2/5u + p = 12$$



Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

deuxième ligne  
moins  
2(la première ligne)

Le tableau devient

$$0x + 9/5y - 2/5u + p = 12$$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$		$9/5$	$-2/5$	1			12
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

En répétant le processus pour les autres lignes du tableau

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	termes droite
$x$	1	$3/5$	$1/5$				6
$p$		$9/5$	$-2/5$	1			12
$h$		$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$		$-6/5$	$8/5$			1	48

# Simplexe –forme avec tableaux

## Itération typique

- Décrivons une itération typique pour résoudre le problème général avec le simplexe – forme avec tableaux
- Le système

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n & = \bar{b}_1 \\
 x_2 + & + \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2s}x_s + \dots + \bar{a}_{2n}x_n & = \bar{b}_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_r + & + \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n & = \bar{b}_r \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m + & + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ms}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n & = \bar{b}_m \\
 & + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n & = z - \bar{z}
 \end{array}$$

# Itération typique

peut être représenté dans le tableau suivant

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + & + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = & \bar{b}_1 \\
 x_2 + & + \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{2s}x_s + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = & \bar{b}_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_r + & + \bar{a}_{rm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = & \bar{b}_r \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_m + & + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{ms}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n = & \bar{b}_m \\
 & \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_s x_s + \dots + \bar{c}_n x_n = & z - \bar{z}
 \end{array}$$

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$						$\ddots$				$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$				$\ddots$				$\vdots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

# Étape 1: Choix de la variable d'entrée

- En se référant à la dernière ligne du tableau, soit  $\bar{c}_s = \min_{1 \leq j \leq n} \{\bar{c}_j\}$

<p>Si <math>\bar{c}_s \geq 0</math>, alors la solution courante est optimale et l'algorithme s'arrête</p>						Termes de droite	
		$\dots x_m \quad x_{m+1} \quad \dots x_s \quad \dots x_n \quad -z$	Variable d'entrée				
		$\bar{a}_{1m+1} \quad \dots \bar{a}_{1s} \quad \dots \bar{a}_{1n}$			$\bar{b}_1$		
		$\bar{a}_{2m+1} \quad \dots \bar{a}_{2s} \quad \dots \bar{a}_{2n}$			$\bar{b}_2$		
		$\vdots \quad \quad \quad \vdots$			$\vdots$		
		$\bar{a}_{rm+1} \quad \dots \bar{a}_{rs} \quad \dots \bar{a}_{rn}$			$\bar{b}_r$		
		$\vdots \quad \quad \quad \vdots$			$\vdots$		
		$\bar{a}_{mm+1} \quad \dots \bar{a}_{ms} \quad \dots \bar{a}_{mn}$			$\bar{b}_m$		
$\bar{c}_2$	1						
		$\bar{c}_{m+1} \quad \dots \bar{c}_s \quad \dots \bar{c}_n \quad 1$			$-\bar{z}$		
$-\bar{z}$						$-\bar{z}$	

Si  $\bar{c}_s < 0$ , alors  $x_s$  est la **variable d'entrée**

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

Si  $\bar{a}_{is} \leq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$   
 le problème n'est pas  
 borné et l'algo. s'arrête

Si  $\exists i$  tel que  $\bar{a}_{is} > 0$   
 alors la sol. demeure réalisable

$\Leftrightarrow \forall i$  tel que  $\bar{a}_{is} > 0$

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \geq 0 \Leftrightarrow x_s \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$$

La **variable d'entrée**  $x_s$  prend la valeur

$$x_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

		$\dots x_r \dots x_m$	$x_{m+1}$	$\dots x_s$	$\dots x_n$	$-z$	termes de droite
$x_1$	1		$\bar{a}_{1m+1}$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots \bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
			$\bar{a}_{2m+1}$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots \bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
			$\bar{a}_{rm+1}$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots \bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
			$\bar{a}_{mm+1}$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots \bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
			$\bar{c}_{m+1}$	$\bar{c}_s$	$\dots \bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable d'entrée

## Étape 2: Choix de la variable de sortie

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$						$\ddots$				$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$				$\ddots$				$\vdots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

# Étape 3: Pivot

L'élément de pivot  $\bar{a}_{rs}$  est à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée  $x_s$  et de la ligne de la variable de sortie  $x_r$

dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$\bar{a}_{rs}z$	termes de droite
<b>Variable de sortie</b> $x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$		$\bar{a}_{1s}$		$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$		$\bar{a}_{2s}$		$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$										$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$		$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$								$\vdots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$		$\bar{a}_{ms}$		$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_s$		$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$



# Étape 3: Pivot

Divisons la ligne  $r$  par l'élément de pivot  $a_{rs}$  afin d'obtenir la ligne  $r$  résultante

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$\bar{a}_{rs}Z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$													$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$													$\vdots$
$x_m$					1		$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-Z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable d'entrée

Variable de sortie

$\frac{1}{a_{rs}}$

# Étape 3: Pivot

Divisons la ligne  $r$  par l'élément de pivot  $a_{rs}$  afin d'obtenir la ligne  $r$  résultante

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$\bar{a}_{rs}z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\dots$										$\vdots$
$x_r$				1			$\frac{\bar{a}_{rm+1}}{\bar{a}_{rs}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
$\vdots$							$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$				$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$
$x_m$					1		$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable d'entrée

Variable de sortie

# Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne  $r$  résultante par  $a_{is}$  pour la soustraire de la ligne  $i$  du tableau. Ceci ramène le coefficient de la **variable d'entrée**  $x_s$  à 0.

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-\bar{a}_{rs}z$	Termes de droite
$x_1$	1					$\bar{a}_{1m+1}$		$\bar{a}_{1s}$		$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1				$\bar{a}_{2m+1}$		$\bar{a}_{2s}$		$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$									$\vdots$
$x_r$				1		$\bar{a}_{rm+1}$		1		$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$						$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rs}$
$x_m$					1	$\bar{a}_{mm+1}$		$\bar{a}_{ms}$		$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$						$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_s$		$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable de sortie

Variable d'entrée

$$\begin{array}{cccc} 1 & \bar{a}_{rm+1} & \dots & \bar{a}_{rn} \\ \bar{a}_{rs} & \bar{a}_{rs} & \dots & \bar{a}_{rs} \end{array}$$

# Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne  $r$  résultante par  $a_{is}$  pour la soustraire de la ligne  $i$  du tableau. Ceci ramène le coefficient de la **variable d'entrée**  $x_s$  à 0.

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-a_{rs}z$	Termes de droite
$x_1$	1					$\bar{a}_{1m+1}$		$\bar{a}_{1s}$		$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1				$\bar{a}_{2m+1}$		$\bar{a}_{2s}$		$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$									$\vdots$
$x_r$				1		$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	1	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$						$\bar{a}_{rs}$				$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rs}$
$x_m$					1	$\bar{a}_{mm+1}$		$\bar{a}_{ms}$		$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$						$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_s$		$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable de sortie

Variable d'entrée

$$\begin{array}{cccc} 1 & \bar{a}_{rm+1} & \dots & \bar{a}_{rn} \\ \bar{a}_{rs} & \bar{a}_{rs} & \dots & \bar{a}_{rs} \end{array}$$

# Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne  $r$  résultante par  $a_{is}$  pour la soustraire de la ligne  $i$  du tableau. Ceci ramène le coefficient de la **variable d'entrée**  $x_s$  à 0.

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-a_{rs}z$	Termes de droite
$x_1$	1					$\bar{a}_{r,m+1}$		$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1				$\bar{a}_{r,m+1}$		$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$									$\vdots$
$x_r$				1		$\frac{1}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{r,m+1}}{\bar{a}_{rs}}$	$\dots 1 \dots$	$\frac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
$\vdots$						$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{rs}}{\bar{a}_{rs}}$
$x_m$					1	$\bar{a}_{r,m+1}$		$\bar{a}_{rs}$		$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_m$
$-z$						$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_s$		$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable de sortie

Variable d'entrée

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ \hline \bar{a}_{rs} & & & & & & \bar{a}_{rs} \end{array}$$

$\bar{a}_{ms}$

# Étape 3: Pivot

Multiplions la ligne  $r$  résultante par  $a_{is}$  pour la soustraire de la ligne  $i$  du tableau. Ceci ramène le coefficient de la **variable d'entrée**  $x_s$  à 0.

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-a_{rs}z$	Termes de droite
$x_1$	1					$\bar{a}_{r,m+1}$		$\bar{a}_{r,s}$		$\bar{a}_{r,n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1				$\bar{a}_{r,m+1}$		$\bar{a}_{r,s}$		$\bar{a}_{r,n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$									$\vdots$
$x_r$				1		$\frac{\bar{a}_{r,m+1}}{\bar{a}_{rs}}$		1		$\frac{\bar{a}_{r,n}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
$\vdots$						$\frac{\bar{a}_{r,m+1}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{r,s}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{a}_{r,n}}{\bar{a}_{rs}}$		$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$
$x_m$					1	$\bar{a}_{r,m+1}$		$\bar{a}_{r,s}$		$\bar{a}_{r,n}$		$\bar{b}_m$
$-z$						$\bar{c}_{m+1}$		$\bar{c}_s$		$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

Variable de sortie

Variable d'entrée

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ \hline \bar{a}_{rs} & & & & & & \bar{a}_{rs} \end{array}$$

**Tableau résultant  
pour  
amorcer la prochaine itération**

Variables dépendantes	$x_1$ $x_2$ $\dots$ $x_r$ $\dots$ $x_m$ $x_{m+1}$ $\dots$ $x_s$ $\dots$ $x_n$ $-z$	Termes de droite
$x_1$	1 $\dots$ $\bar{a}_{1r}$ $\dots$ $\bar{a}_{1m+1}$ $\dots$ 0 $\dots$ $\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$x_2$	$\dots$ 1 $\dots$ $\bar{a}_{2r}$ $\dots$ $\bar{a}_{2m+1}$ $\dots$ 0 $\dots$ $\bar{a}_{2n}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_s$	$\dots$ $\bar{a}_{sr}$ $\dots$ $\bar{a}_{sm+1}$ $\dots$ 1 $\dots$ $\bar{a}_{sn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_m$	$\dots$ $\bar{a}_{mr}$ $\dots$ 1 $\bar{a}_{mm+1}$ $\dots$ 0 $\dots$ $\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$
$-z$	$\dots$ $\bar{c}_r$ $\dots$ $\bar{c}_{m+1}$ $\dots$ 0 $\dots$ $\bar{c}_n$ 1	$-\bar{z}$

# **Méthode du simplexe – notation matricielle**



## Méthode du simplexe – notation matricielle

- Le problème de programmation linéaire sous la forme standard

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{Sujet à} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

## Problème du restaurateur:

$$A = \begin{matrix} & x & y & u & p & h \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$c^T = [-8, -6, 0, 0, 0]$$

$$b = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\min z = -8x - 6y$$

$$\text{Sujet à } 5x + 3y + u = 30$$

$$2x + 3y + p = 24$$

$$1x + 3y + h = 18$$

$$x, y, u, p, h \geq 0$$

$$\begin{matrix} \min z = c^T x \\ \text{Sujet à } Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}$$

$$c, x \in R^5, b \in R^3$$

A matrice  $3 \times 5$

## Méthode du simplexe – notation matricielle

- Le problème de programmation linéaire sous la forme standard

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{Sujet à} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \end{array}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$\begin{array}{ll} \min & z = c^T x \\ \text{Sujet à} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$
$\begin{array}{l} c, x \in R^n, b \in R^m \\ A \text{ matrice } m \times n \end{array}$

# Méthode du simplexe – notation matricielle

$$\min z$$

Sujet à

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - z = 0$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$\min z$
$\text{Sujet à } Ax = b$
$c^T x - z = 0$
$x \geq 0$
$c, x \in R^n, b \in R^m$
$A \text{ matrice } m \times n$

# Méthode du simplexe – notation matricielle

- Considérons le problème de programmation linéaire sous sa forme matricielle

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{Sujet à} \quad & Ax = b \\ & c^T x - z = 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Supposons que  $m \leq n$  et que la matrice  $A$  est de plein rang (i.e.,  $\text{rang}(A) = m$ , ou que les lignes de  $A$  sont linéairement indépendantes )
- Une sous matrice  $B$  de  $A$  est une **base de  $A$**  si elle est  $m \times m$  et non singulière (i.e,  $B^{-1}$  existe)

## Problème du restaurateur:

$$A = \begin{matrix} & x & y & u & p & h \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Exemples de base:

$$B_1 = \begin{matrix} & u & p & h \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B_2 = \begin{matrix} & x & p & h \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B_3 = \begin{matrix} & x & p & y \\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

# Méthode du simplexe – notation matricielle

- Une sous matrice  $B$  de  $A$  est une **base de  $A$**  si elle est  $m \times m$  et non singulière (i.e,  $B^{-1}$  existe)
- Pour faciliter la présentation, supposons que la **base  $B$**  que nous considérons est composée des  $m$  premières colonnes de  $A$ , et ainsi

$$A = [B : R]$$

Dénotons également

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_R \end{bmatrix}$$

- Le problème original peut s'écrire

$$\begin{array}{ll}
\min & z \\
\text{Sujet à} & Ax = b \\
& c^T x - z = 0 \\
& x \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\min & z \\
\text{Sujet à} & [B : R] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b \\
& \begin{bmatrix} c_B^T & : & c_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\
& x \geq 0
\end{array}$$



$$\begin{aligned}
& \min z \\
\text{Sujet à } & Bx_B + Rx_R = b \\
& c_B^T x_B + c_R^T x_R - z = 0 \\
& x_B, x_R \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \min z \\
\text{Sujet à } & [B:R] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b \\
& \begin{bmatrix} c_B^T : c_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

- Exprimons  $x_B$  en fonction de  $x_R$  en utilisant les contraintes du problème

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

- Ainsi

$$Ix_B = -B^{-1}Rx_R + B^{-1}b$$

$$\begin{array}{l}
 \min z \\
 \text{Sujet à } Bx_B + Rx_R = b \\
 c_B^T x_B + c_R^T x_R - z = 0 \\
 x_B, x_R \geq 0
 \end{array}$$

En remplaçant  $x_B$  par sa valeur en fonction de  $x_R$  dans l'équation de la fonction économique

Notons que ces deux problèmes sont équivalents car le deuxième est obtenu du premier à l'aide d'opérations élémentaires utilisant une matrice non singulière  $B^{-1}$

$$\begin{array}{l}
 \min z \\
 \text{Sujet à } Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \\
 c_B^T (-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^T x_R - z = 0 \\
 x_B, x_R \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \min z \\
\text{Sujet à} \quad & Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \\
& c_B^T(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^T x_R - z = 0 \\
& x_B, x_R \geq 0
\end{aligned}$$

En regroupant les coefficients de  $x_R$

$$\begin{aligned}
& \min z \\
\text{Sujet à} \quad & Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \\
& 0x_B + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R - z = -c_B^T B^{-1}b \\
& x_B, x_R \geq 0
\end{aligned}$$

$$\min z$$

$$\text{Sujet à} \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$0x_B + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R - z = -c_B^T B^{-1}b$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

Le problème se traduit dans le tableau suivant

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$

Les variables de  $x_B$  (dénotées jusqu'ici variables dépendantes) qui sont associées aux colonnes de la base  $B$ , sont dénotées **variables de base**

Les variables de  $x_R$  (dénotées jusqu'ici variables indépendantes) sont dénotées **variables hors base**

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$

Pour obtenir la **solution de base** associée à la base  $B$ ,

posons  $x_R = 0$

et alors  $x_B = B^{-1}b$ .

La solution de base est **réalisable** si  $x_B \geq 0$

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$

Notons que ce tableau est identique à celui utilisé pour illustrer une itération du simplexe



Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	1	$-c_B^T B^{-1}b$

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$						$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$				$\ddots$		$\ddots$		$\vdots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-\bar{z}$

# Méthode du simplexe – notation matricielle

- Une sous matrice  $B$  de  $A$  est une **base de  $A$**  si elle est  $m \times m$  et non singulière (i.e,  $B^{-1}$  existe)
- Pour faciliter la présentation, supposons que la **base  $B$**  que nous considérons est composée des  $m$  premières colonnes de  $A$ , et ainsi

$$A = [B : R]$$

Dénotons également

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_R \end{bmatrix}$$

- Le problème original peut s'écrire

Considérons la base à la deuxième itération du problème du restaurateur:

$$\begin{array}{ccccc} & x & p & h & y & u \\ A = & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & B = & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & R = & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} \quad x_R = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_R = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \min z \\
\text{Sujet à } & Bx_B + Rx_R = b \\
& c_B^T x_B + c_R^T x_R - z = 0 \\
& x_B, x_R \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \min z \\
\text{Sujet à } & [B:R] \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} = b \\
& \begin{bmatrix} c_B^T : c_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_R \end{bmatrix} - z = 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

$\min z$

Sujet à

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\min z \\ \text{Sujet à} & \quad Bx_B + Rx_R = b \\ & \quad c_B^T x_B + c_R^T x_R - z = 0 \\ & \quad x_B, x_R \geq 0 \end{aligned}$$

- Exprimons  $x_B$  en fonction de  $x_R$  en utilisant les contraintes du problème

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

- Ainsi

$$Ix_B = -B^{-1}Rx_R + B^{-1}b$$

Obtenons  $B^{-1}$  avec la méthode d'élimination de Gauss:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$Bx_B + Rx_R = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b$$

$$I \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$



$$I \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$I \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \min z \\
 \text{Sujet à } \quad Bx_B + Rx_R = b \\
 \quad \quad \quad c_B^T x_B + c_R^T x_R - z = 0 \\
 \quad \quad \quad x_B, x_R \geq 0
 \end{array}$$

En remplaçant  $x_B$  par sa valeur en fonction de  $x_R$  dans l'équation de la fonction économique

Notons que ces deux problèmes sont équivalents car le deuxième est obtenu du premier à l'aide d'opérations élémentaires utilisant une matrice non singulière  $B^{-1}$

---


$$\min z$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Sujet à } \quad \quad \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b \\
 \quad \quad \quad c_B^T (-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^T x_R - z = 0 \\
 \quad \quad \quad x_B, x_R \geq 0
 \end{array}$$

$$\min z$$

$$\text{Sujet à} \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$c_B^T(-B^{-1}Rx_R + B^{-1}b) + c_R^Tx_R - z = 0$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

En regroupant les coefficients de  $x_R$

$$\min z$$

$$\text{Sujet à} \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$0x_B + (c_R^T - c_B^TB^{-1}R)x_R - z = -c_B^TB^{-1}b$$

$$x_B, x_R \geq 0$$


$$0x_B + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R - z = -c_B^T B^{-1}b$$

$$c_B^T B^{-1}b = [-8 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = [-8 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = -48$$

$$0x_B + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R - z = -c_B^T B^{-1}b$$

$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-6 \ 0] - [-8 \ 0 \ 0] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-6 \ 0] - [-8 \ 0 \ 0] & \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$



$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-6 \ 0] - [-8 \ 0 \ 0] & \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \left[ [-6 \ 0] - [-8 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \left[ [-6 \ 0] - \left[ -\frac{24}{5} \quad -\frac{8}{5} \right] \right] \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \left[ -\frac{6}{5} \quad \frac{8}{5} \right] \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

$$\min z$$

$$\text{Sujet à} \quad Ix_B + B^{-1}Rx_R = B^{-1}b$$

$$0x_B + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R - z = -c_B^T B^{-1}b$$

$$x_B, x_R \geq 0$$

Le problème se traduit dans le tableau suivant

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$

$$I \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

	$x$	$p$	$h$	$y$	$u$	$-z$	
$x$	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
$p$	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	12
$h$	0	0	1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	12



$$[0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ p \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} - z = 48$$

	$x$	$p$	$h$	$y$	$u$	$-z$	
$x$	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
$p$	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	12
$h$	0	0	1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	12
$-z$	0	0	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	1	48

	$x$	$y$	$u$	$p$	$h$	$-z$	
$x$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	6
$p$	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	0	0	12
$h$	0	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	0	12
$-z$	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	1	48

	$x$	$p$	$h$	$y$	$u$	$-z$	
$x$	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
$p$	0	1	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	12
$h$	0	0	1	$\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	12
$-z$	0	0	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{8}{5}$	1	48

$B^{-1}$

Var. dep.	$x$	$y$	$u$	$v$	$h$	$-z$	termes droite
$u$	5	3	1				30
$p$	2	3		1			24
$h$	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0


Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$

Puisque tout tableau du simplexe est associé à une base de  $A$  constituée des colonnes associées aux variables de base (variables dépendantes), il s'ensuit que dans l'algorithme du simplexe, nous passons d'une solution de base réalisable à une nouvelle solution de base réalisable ayant une valeur plus petite

## Notion de multiplicateurs du simplexe

- Considérons la dernière ligne du tableau du simplexe associé à la base  $B$  qui correspond aux vecteurs des coûts relatifs des variables:

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	$0$	$B^{-1}b$
$-z$	$0$	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	$1$	$-c_B^T B^{-1}b$



$$\bar{c}_B^T = 0$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T B^{-1}R$$

$$\bar{c}^T = \begin{bmatrix} \bar{c}_B^T & \bar{c}_R^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^T & c_R^T \end{bmatrix} - c_B^T B^{-1} [B:R] = c^T - c_B^T B^{-1} A$$

# Notion de multiplicateurs du simplexe

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$$

Dénotons le vecteur  $\pi \in R^m$  défini par

$$\pi^T = c_B^T B^{-1}$$

Alors

$$\bar{c}^T = c^T - \pi^T A$$

ou

$$[\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n] = [c_1, \dots, c_n] - \pi^T [a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n}]$$

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{\bullet j}$$

où  $a_{\bullet j}$  dénote la  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice de contrainte  $A$

$\pi$  est le vecteur des multiplicateurs du simplexe associé à la base  $B$ .

## Notion de multiplicateurs du simplexe

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{\bullet j}$$

- Le vecteur des multiplicateurs du simplexe  $\pi$  permet de calculer les coûts relatifs  $\bar{c}_j$  directement à partir des données originales du problème.

$$\bar{c}^T = c^T - \pi^T A$$

- Les composantes  $\pi_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) du vecteur des multiplicateurs peuvent être considérés comme des poids associés aux lignes  $i$  du tableau (ou aux contraintes  $i$  du problème) tel que la soustraction d'une combinaison linéaire des lignes avec ces poids de la dernière ligne du tableau permet d'annuler les coûts relatifs des variables de base.

# Sensitivité de la valeur optimale aux modifications des termes de droite

- Les multiplicateurs du simplexe associés à une base optimale permettent de mesurer l'effet de modifier les termes de droite sur la valeur optimale d'un problème.
- Considérons le problème original et un autre où les termes de droite sont modifiés

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ \text{Sujet à} & Ax = b \\ & c^T x - z = 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{z} \\ \text{Sujet à} & A\tilde{x} = b + \Delta b \\ & c^T \tilde{x} - \tilde{z} = 0 \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{array}$$

## Sensitivité de la valeur optimale aux modifications des termes de droite

$$\begin{array}{l|l}
 \min z & \min \tilde{z} \\
 \text{Sujet à } Ax = b & \text{Sujet à } A\tilde{x} = b + \Delta b \\
 c^T x - z = 0 & c^T \tilde{x} - \tilde{z} = 0 \\
 x \geq 0 & \tilde{x} \geq 0
 \end{array}$$

- Dénotons par  $B^*$  une base optimale du problème original, et la solution de base optimale correspondante

$$\begin{aligned}
 x_R^* &= 0 \\
 x_{B^*}^* &= B^{*-1}b = \bar{b} \geq 0
 \end{aligned}$$

dont la valeur (optimale pour le problème) est donnée par

$$z^* = c_{B^*}^T x_{B^*}^* + c_R^T x_R^* = c_{B^*}^T B^{*-1}b = c_{B^*}^T \bar{b}$$



## Sensitivité de la valeur optimale aux modifications des termes de droite

$$\begin{array}{l|l}
 \min z & \min \tilde{z} \\
 \text{Sujet à } Ax = b & \text{Sujet à } A\tilde{x} = b + \Delta b \\
 c^T x - z = 0 & c^T \tilde{x} - \tilde{z} = 0 \\
 x \geq 0 & \tilde{x} \geq 0
 \end{array}$$

- Choisissons la valeur de  $\Delta b$  de telle sorte que

$$B^{*-1}(b + \Delta b) = B^{*-1}b + B^{*-1}\Delta b \geq 0$$

- Donc  $B^*$  demeure une base réalisable pour le nouveau problème modifié puisque la solution de base associée est

$$\tilde{x}_R^* = 0$$

$$\tilde{x}_{B^*}^* = B^{*-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

## Sensitivité de la valeur optimale aux modifications des termes de droite

- Donc  $B^*$  demeure une base réalisable pour le nouveau problème modifié puisque la solution de base associée est

$$\tilde{x}_R^* = 0$$

$$\tilde{x}_{B^*}^* = B^{*-1} (b + \Delta b) \geq 0$$

$$\bar{c}^{*\top} = c^\top - \pi^{*\top} A$$

$$\pi^{*\top} = c_{B^*}^\top B^{*-1}$$

- De plus, puisque ni les coûts  $c_j$  ni la matrice  $A$  n'ont été modifiés, alors le vecteur des multiplicateur  $\pi^*$  reste inchangé. Par conséquent les coûts relatifs  $\bar{c}_j$  demeurent inchangés et donc non négatifs pour le nouveau problème.

Donc  $B^*$  demeure donc une base optimale pour le nouveau problème.

## Sensitivité de la valeur optimale aux modifications des termes de droite

- Une solution optimale pour le nouveau problème est donc:

$$\tilde{x}_R^* = 0$$

$$\tilde{x}_{B^*}^* = B^{*-1} (b + \Delta b) \geq 0$$

- Évaluons la valeur optimale du nouveau problème:

$$\pi^{*\top} = c_{B^*}^\top B^{*-1}$$

$$z^* = c_{B^*}^\top B^{*-1} b$$

## Sensitivité de la valeur optimale aux modifications des termes de droite

- Évaluons la valeur optimale du nouveau problème:.

$$\begin{aligned}\tilde{z}^* &= c_{B^*}^T \tilde{x}_{B^*}^* + c_R^T \tilde{x}_R^* \\ &= c_{B^*}^T B^{*-1} (b + \Delta b) \\ &= c_{B^*}^T B^{*-1} b + c_{B^*}^T B^{*-1} \Delta b \\ &= z^* + \pi^{*T} \Delta b \\ &= z^* + \sum_{i=1}^m \pi_i^* \Delta b_i\end{aligned}$$

Ainsi,  $\pi_i^*$  indique le taux de variation unitaire de la valeur optimale de la fonction économique lorsque le terme de droite  $b_i$  de la contrainte  $i$  est modifié d'une quantité  $\Delta b_i$  choisie de telle sorte que la base demeure réalisable pour le nouveau problème.

# Critère d'optimalité

- Proposition** Dans l'algorithme du simplexe, si à une itération les coûts relatifs  $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j, 1 \leq j \leq n$ , alors la solution courante est optimale

**Preuve:** Sans perte de généralité, supposons que les  $m$  premières variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont les variables de base; i. e.,

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$										$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$								$\vdots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-c_b^T B^{-1}b$

Var. base	$x_B^T$	$x_R^T$	$-z$	Termes droite
$x_B$	$I$	$B^{-1}R$	0	$B^{-1}b$
$-z$	0	$c_R^T - c_B^T B^{-1}R$	1	$-c_B^T B^{-1}b$

$$\bar{x}_i = \bar{b}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\bar{x}_i = 0 \quad i = m + 1, m + 2, \dots, n$$

$$\bar{z} = c_B^T B^{-1}b$$

## Critère d'optimalité

Variables dépendantes	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_r$	$\dots$	$x_m$	$x_{m+1}$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$-z$	Termes de droite
$x_1$	1						$\bar{a}_{1m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{1s}$	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$		$\bar{b}_1$
$x_2$		1					$\bar{a}_{2m+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{2s}$	$\dots$	$\bar{a}_{2n}$		$\bar{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$										$\vdots$
$x_r$				1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{rs}$	$\dots$	$\bar{a}_{rn}$		$\bar{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$								$\vdots$
$x_m$						1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\dots$	$\bar{a}_{ms}$	$\dots$	$\bar{a}_{mn}$		$\bar{b}_m$
$-z$							$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_s$	$\dots$	$\bar{c}_n$	1	$-c_B^T B^{-1} b$

La fonction économique est de la forme

$$z = 0x_1 + \dots + 0x_m + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_n x_n + c_B^T B^{-1} b$$

$$\bar{z} = \dots c_B^T B^{-1} b$$

# Critère d'optimalité

La fonction économique est de la forme

$$z = 0x_1 + \dots + 0x_m + \bar{c}_{m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{c}_n x_n + c_B^T B^{-1}b$$

Considérons une autre solution réalisable  $\bar{x} \geq 0$  dont la valeur est

$$\bar{z} = \bar{c}_{m+1}\bar{x}_{m+1} + \bar{c}_{m+2}\bar{x}_{m+2} + \dots + \bar{c}_n\bar{x}_n + c_B^T B^{-1}b$$

Mais puisque par hypothèse  $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j, 1 \leq j \leq n$ , il s'ensuit que

$$\bar{z} = \underbrace{\bar{c}_{m+1}\bar{x}_{m+1} + \bar{c}_{m+2}\bar{x}_{m+2} + \dots + \bar{c}_n\bar{x}_n}_{\geq 0} + c_B^T B^{-1}b \geq c_B^T B^{-1}b$$

Donc la solution courante est optimale. □