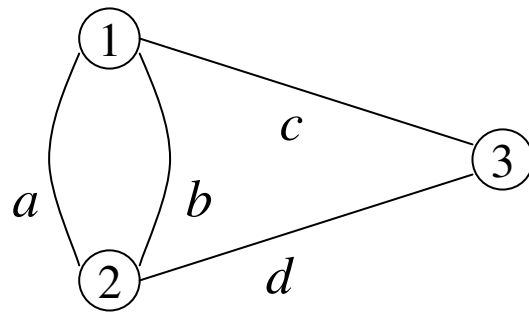


# **6. Problème de flot à coût minimum**

## 5.0 Graphes, graphes orientés, réseaux

- Un **graphe**  $G=(V, E)$  est constitué d'un ensemble non vide fini de **sommets**  $V$  et d'un ensemble d'**arêtes**  $E$  tel que chaque arête  $a$  est identifiée par une paire non ordonnée de sommets  $(u, v)$ .

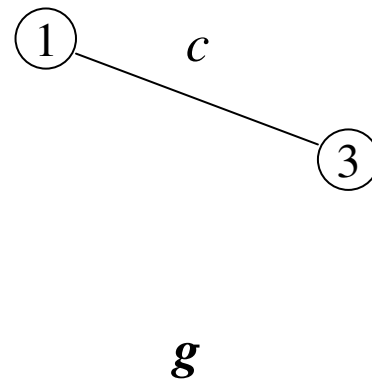
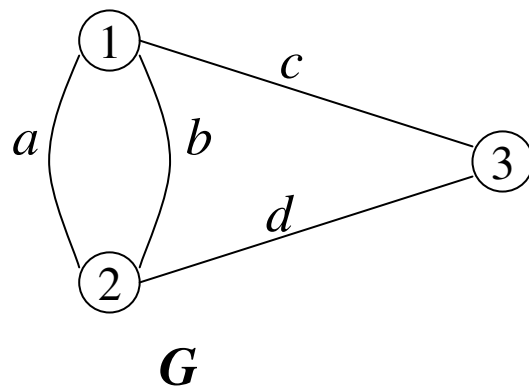


$$V = \{1, 2, 3\}$$

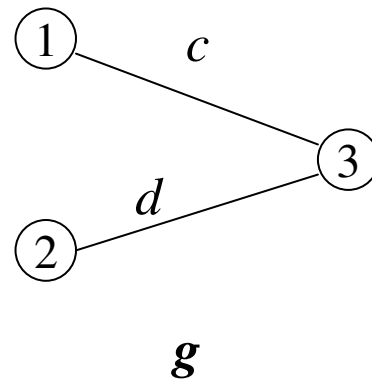
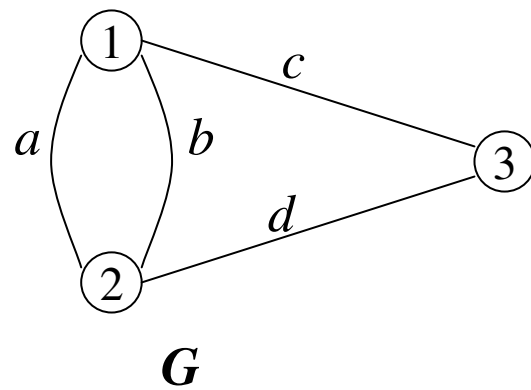
$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$a = b = (1, 2) ; c = (1, 3) ; d = (2, 3)$$

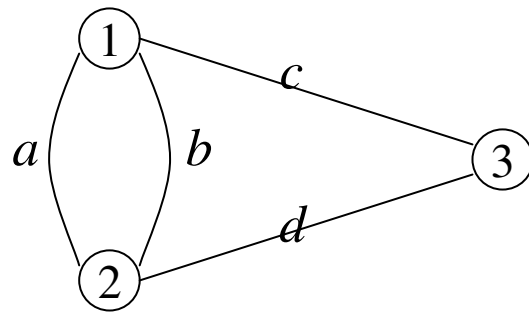
- Un graphe  $g$  est un **sous graphe** d'un graphe  $G$  si tous les sommets et toutes les arêtes de  $g$  sont aussi des sommets et des arêtes de  $G$ .



- Un sous graphe d'un graphe  $G$  qui contient tous les sommets de  $G$  est un **graphe partiel** de  $G$ .

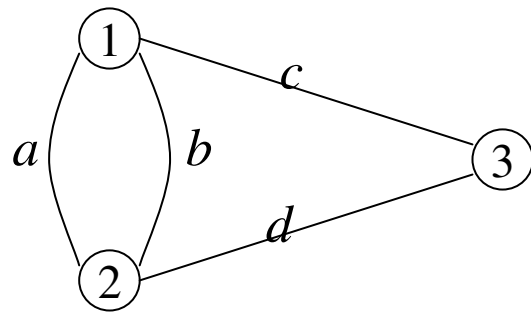


- Une **chaîne** dans un graphe  $G$  est une suite d'arêtes distinctes  $a_1, a_2, \dots, a_p$  avec la propriété qu'il existe  $(p+1)$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$  tels que  $a_i = (u_i, u_{i+1})$ .



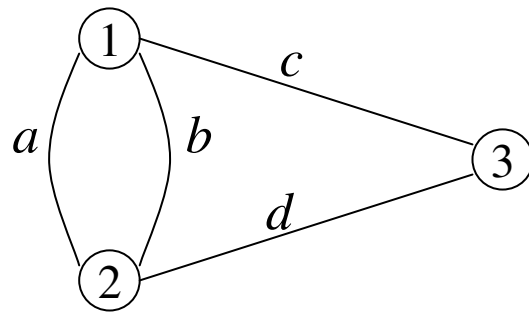
La suite  $a, c$  est une chaîne.

- Un **cycle** dans un graphe  $G$  est une chaîne telle que  $u_1 = u_{p+1}$



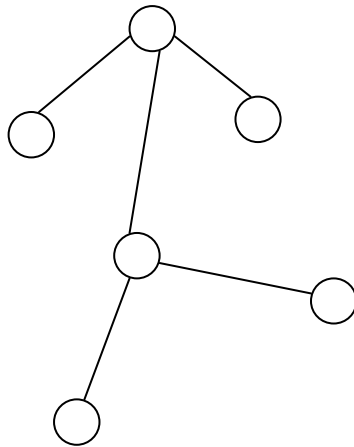
La suite  $c, b, d$  est un cycle.

- Un graphe  $G$  est **connexe** si pour tout couple de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant.



Ce graphe est connexe.

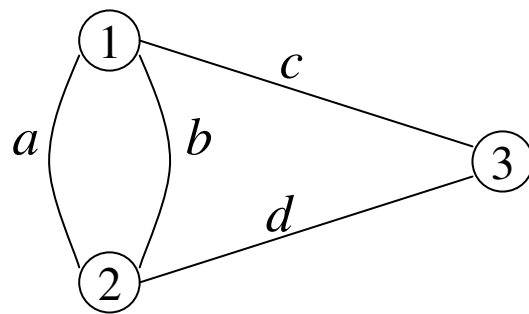
- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle



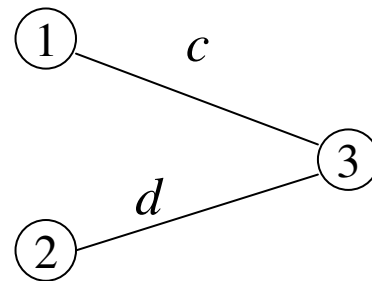
**Propriété** : Un arbre ayant  $n$  sommets comporte exactement  $(n - 1)$  arêtes



- Un **arbre partiel** (**arbre de recouvrement**) d'un graphe connexe  $G$  est un graphe partiel de  $G$  qui est un arbre

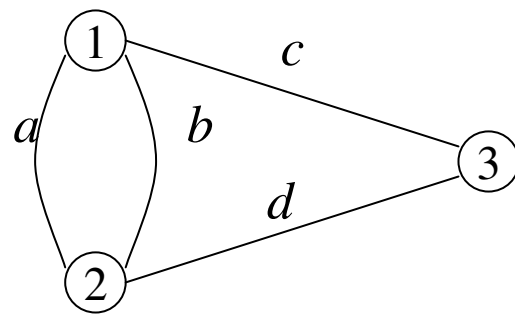


$G$

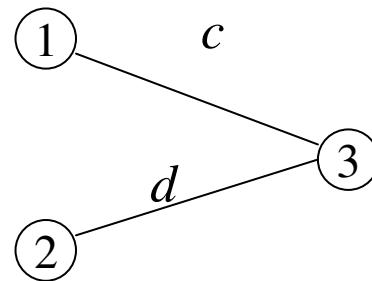


arbre partiel

- Un **cycle fondamental** par rapport à un arbre partiel est un cycle formé d'une arête du graphe ne se trouvant pas sur l'arbre partiel et d'arêtes de l'arbre.

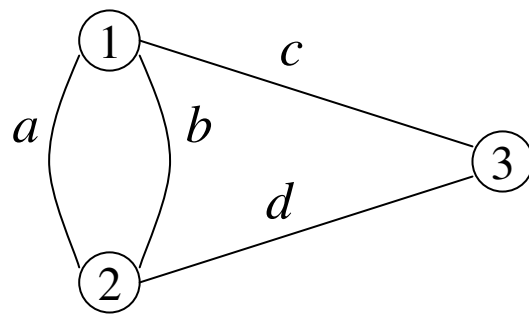


**$G$**

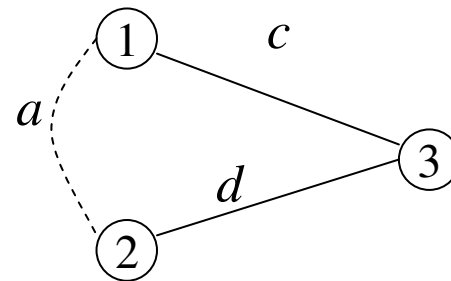


**arbre partiel**

- Un **cycle fondamental** par rapport à un arbre partiel est un cycle formé d'une arête du graphe ne se trouvant pas sur l'arbre partiel et d'arêtes de l'arbre.

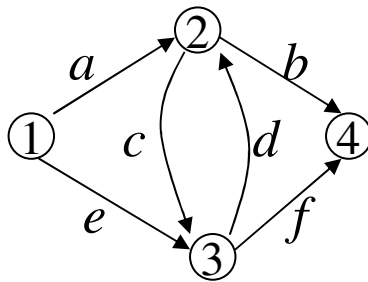


**$G$**



**cycle fondamental**

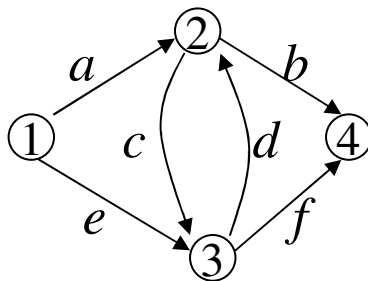
- Un **graphe orienté**  $G = (V, E)$  est constitué d'un ensemble non vide fini de **sommets**  $V$  et d'un ensemble d'**arcs**  $E$  tel que chaque arc  $a$  est identifié par une paire ordonnée de sommets  $(u, v)$ .



$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$a = (1, 2), b = (2, 4), c = (2, 3), d = (3, 2), e = (1, 3), f = (3, 4)$$

- Un **graphe orienté**  $G = (V, E)$  est constitué d'un ensemble non vide fini de **sommets**  $V$  et d'un ensemble d'**arcs**  $E$  tel que chaque arc  $a$  est identifié par une paire ordonnée de sommets  $(u, v)$ .



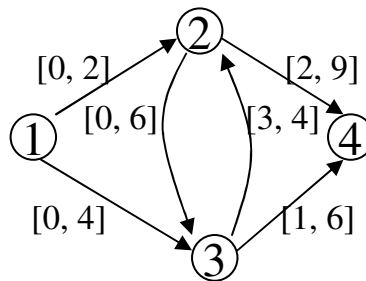
$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$a = (1, 2), b = (2, 4), c = (2, 3), d = (3, 2), e = (1, 3), f = (3, 4)$$

- Un graphe non orienté obtenu à partir d'un graphe orienté  $G$  en éliminant l'orientation sur les arcs est dénoté **graphe correspondant**.
- Les notions de chaîne, cycle, connexité, arbre, arbre partiel, et cycle fondamental pour les graphes orientés sont définies en se référant aux graphes correspondants.
- Un **chemin** dans un graphe orienté est une suite d'arcs distincts  $a_1, a_2, \dots, a_p$  constituant une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans la même direction.
- Un graphe orienté est **simple** si les sommets identifiant un arc sont distincts et s'il n'existe pas deux arcs identifiés par la même paire ordonnée de sommets.

- Un **réseau** est un graphe orienté connexe dans lequel un flot peut circuler sur les arcs. Chaque arc  $(i, j)$  est caractérisée par
  - une **capacité**  $d_{ij}$  qui correspond à une borne supérieure sur le flot dans l'arc
  - une **borne inférieure**  $l_{ij}$  sur le flot dans l'arc

De plus  $0 \leq l_{ij} \leq d_{ij}$



À l'arc  $(i, j)$  est associé le couple  $[l_{ij}, d_{ij}]$ .

## 5.1 Formulation du problème de flot à coût minimum

- Nous considérons un réseau où à chaque  $(i, j)$  sont associés les attributs suivants:
  - $d_{ij}$  la capacité de l'arc
  - $l_{ij}$  la borne inférieure sur le flot dans l'arc
  - $c_{ij}$  le coût unitaire du flot dans l'arc
  - $x_{ij}$  la variable dénotant la valeur du flot dans l'arc

à chaque sommet  $i$  sont associés les deux ensembles de sommets reliés ou adjacents à  $i$  suivants:

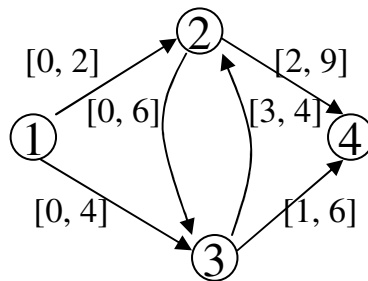
$$B_i = \{j \in V : (j, i) \in E\}$$

$$P_i = \{j \in V : (i, j) \in E\}$$



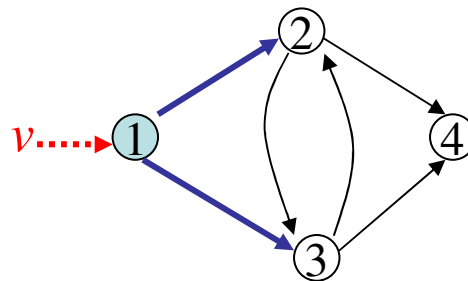
Dans le réseau suivant

$$B_1 = \Phi, B_2 = \{1, 3\}, B_3 = \{1, 2\}, B_4 = \{2, 3\}$$
$$P_1 = \{2, 3\}, P_2 = \{3, 4\}, P_3 = \{2, 4\}, P_4 = \Phi$$



- Le problème de flot à coût minimum consiste à déterminer comment acheminer dans les arcs du réseau une quantité  $v$  de flot d'une source  $s \in V$  à une destination  $t \in V$  de sorte à minimiser le coût total.
- Ce qui caractérise les problèmes de flots sont les contraintes de **conservation de flot** associées aux sommets du réseau.
- La contrainte de conservation de flot associée à un sommet  $i$  indique que la quantité totale de flot entrant dans le sommet doit être égale à celle sortant du sommet.

- La contrainte de conservation de flot associée à un sommet  $i$  indique que la quantité totale de flot entrant dans le sommet doit être égale à celle sortant du sommet.



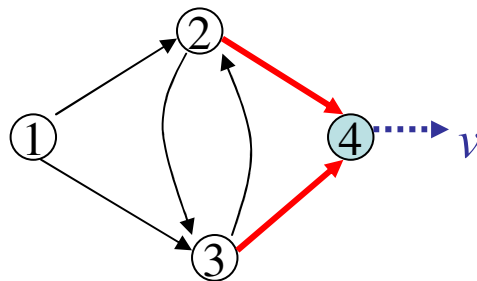
Pour la source  $s$

$$v + \sum_{j \in B_s} x_{js} = \sum_{j \in P_s} x_{sj}$$

ou

$$\sum_{j \in P_s} x_{sj} - \sum_{j \in B_s} x_{js} = v$$

- La contrainte de conservation de flot associée à un sommet  $i$  indique que la quantité totale de flot entrant dans le sommet doit être égale à celle sortant du sommet.



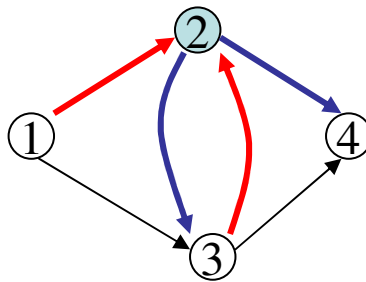
Pour la destination  $t$

$$\sum_{j \in B_t} x_{jt} = \sum_{j \in P_t} x_{tj} + v$$

ou

$$\sum_{j \in P_t} x_{tj} - \sum_{j \in B_t} x_{jt} = -v$$

- La contrainte de conservation de flot associée à un sommet  $i$  indique que la quantité totale de flot entrant dans le sommet doit être égale à celle sortant du sommet.



Pour un sommet intermédiaire  $i$

$$\sum_{j \in B_i} x_{ji} = \sum_{j \in P_i} x_{ij}$$

ou

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = 0$$

- Formulons maintenant le problème de flot à coût minimum consistant à déterminer comment acheminer dans les arcs du réseau une quantité  $v$  de flot d'une source  $s \in V$  à une destination  $t \in V$  de sorte à minimiser le coût total.

(F) (FCM)  $\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

Sujet à

(conservation de flot)

$$\sum_{j \in P_s} x_{sj} - \sum_{j \in B_s} x_{js} = v \quad = s$$

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = 0 \quad i \neq s, t \quad \neq s, t$$

$$\sum_{j \in P_t} x_{tj} - \sum_{j \in B_t} x_{jt} = -v \quad = t$$

(capacité)

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E \quad E$$

(FCM)  $\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

Sujet à

(conservation de flot)

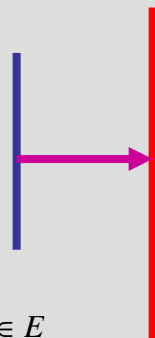
$$\sum_{j \in P_s} x_{sj} - \sum_{j \in B_s} x_{js} = v$$

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = 0 \quad i \neq s, t$$

$$\sum_{j \in P_t} x_{tj} - \sum_{j \in B_t} x_{jt} = -v$$

(capacité)

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E$$



$$\text{(FCM)} \quad \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Sujet à

(conservation de flot)

$$\boxed{\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji}} = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E$$

- La matrice correspondant aux contraintes de conservation de flot est dénoté **matrice d'incidence sommets-arcs**:

ligne  $i$   $\leftrightarrow$  sommet  $i$

colonne  $(i, j)$   $\leftrightarrow$  arc  $(i, j)$

- Exemple de matrice d'incidence pour le réseau

(FCM)  $\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

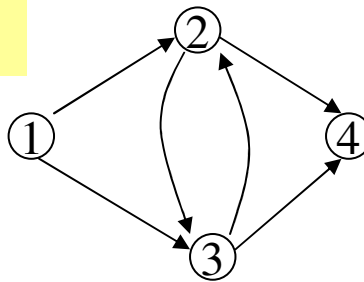
Sujet à

(conservation de flot)

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E$$



	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{32}$	$x_{34}$
1	1	1	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	-1	0
3	0	-1	-1	0	1	1
4	0	0	0	-1	0	-1



- La matrice d'incidence sommets-arcs jouit de la propriété d'**unimodularité** qui fait que l'algorithme du simplexe génère une solution entière pour le problème (FMC) lorsque  $l_{ij}$ ,  $d_{ij}$  et  $v$  sont des entiers.

$$\begin{aligned}
 \text{(FCM)} \quad & \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\
 & \text{Sujet à} \\
 & \text{(conservation de flot)} \\
 & \sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases} \\
 & \text{(capacité)} \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E
 \end{aligned}$$

## 5.2 Propriétés de la matrice d'incidence

- Nous allons démontrer que les colonnes de toute base de la matrice d'incidence correspondent aux arcs d'un arbre partiel du réseau et vice versa.
- **Théorème**: La matrice d'incidence  $A$  d'un graphe orienté simple et connexe composé de  $m$  sommets et de  $n$  arcs est de rang  $(m-1)$ .

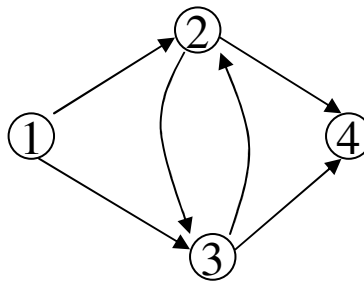
**Preuve**: Démontrons d'abord que le rang de  $A$  est inférieur ou égal à  $(m-1)$ . Chaque colonne de  $A$  comporte exactement une composante égale à 1 et une composante égale à  $-1$ , les autres étant égales à 0.

Donc la somme des lignes de  $A$  engendre un vecteur composé uniquement de 0.

Par conséquent les lignes de  $A$  sont linéairement dépendantes.

Ainsi le rang de  $A$  est inférieure ou égal à  $(m-1)$ .

- Exemple de matrice d'incidence pour le réseau



	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{32}$	$x_{34}$
1	1	1	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	-1	0
3	0	-1	-1	0	1	1
4	0	0	0	-1	0	-1

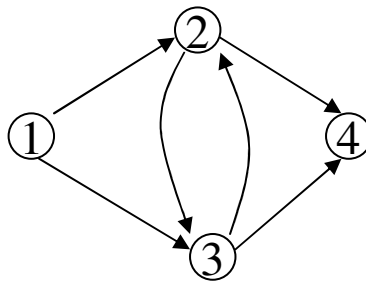
Démontrons maintenant que le rang de  $A$  est au moins égal à  $(m-1)$ .  
Supposons qu'il existe un ensemble  $K$  de  $k$  lignes de  $A$   $a_{i_1 \bullet}, a_{i_2 \bullet}, \dots, a_{i_k \bullet}$   
qui soient linéairement dépendante.

Il existe donc des scalaires  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  qui ne sont pas tous nuls tels que

$$\alpha_1 a_{i_1 \bullet} + \alpha_2 a_{i_2 \bullet} + \dots + \alpha_k a_{i_k \bullet} = 0$$

Puisque chaque colonne de  $A$  comporte exactement une composante égale à 1 et une composante égale à  $-1$ , si  $\alpha_j \neq 0$ , alors il faut que pour tout élément différent de 0 dans la ligne  $a_{i_j \bullet}$  nous retrouvions dans  $K$  la ligne de  $A$  comportant l'élément différent de 0 complémentaire.

- Exemple de matrice d'incidence pour le réseau



	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{32}$	$x_{34}$
1	1	1	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	-1	0
3	0	-1	-1	0	1	1
4	0	0	0	-1	0	-1

Démontrons maintenant que le rang de  $A$  est au moins égal à  $(m-1)$ .  
 Supposons qu'il existe un ensemble  $K$  de  $k$  lignes de  $A$   $a_{i_1 \bullet}, a_{i_2 \bullet}, \dots, a_{i_k \bullet}$   
 qui soient linéairement dépendante.

Il existe donc des scalaires  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  qui ne sont pas tous nuls tels que

$$\alpha_1 a_{i_1 \bullet} + \alpha_2 a_{i_2 \bullet} + \dots + \alpha_k a_{i_k \bullet} = 0$$

Puisque chaque colonne de  $A$  comporte exactement une composante égale à 1 et une composante égale à  $-1$ , si  $\alpha_j \neq 0$ , alors il faut que pour tout élément différent de 0 dans la ligne  $a_{i_j \bullet}$  nous retrouvions dans  $K$  la ligne de  $A$  comportant l'élément différent de 0 complémentaire.

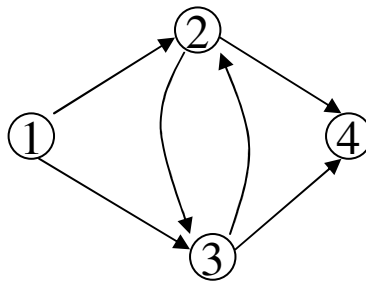
Répétant l'argument pour tous les  $\alpha_j \neq 0$ , nous en arrivons à la conclusion que  $K$  comporte toutes les lignes de  $A$  puisque le graphe orienté est simple et connexe.

Ainsi  $k = m$ , et par conséquent tout sous ensemble de  $\tau$  lignes de  $A$  où  $\tau \leq m-1$  sont linéairement indépendantes. Donc le rang de  $A$  est au moins égal à  $(m-1)$ .

Par conséquent la rang de  $A$  est égal à  $(m-1)$ . □

- **Théorème:** Considérons la matrice d'incidence  $A$  d'un graphe orienté simple et connexe  $G$  composé de  $m$  sommets et de  $n$  arcs. Une sous matrice carrée de  $A$  de dimension  $(m - 1) \times (m - 1)$  est non singulière si et seulement si les arcs associés aux colonnes de cette sous matrice sont ceux d'un arbre partiel du graphe orienté  $G$ .

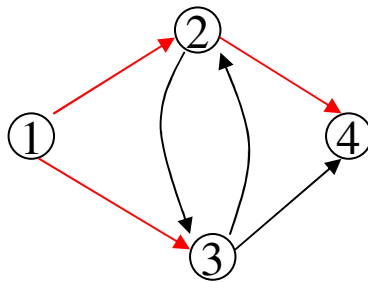
**Preuve:** Soit  $T$  un arbre partiel de  $G$ .



$$\begin{array}{c} x_{12} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{32} \quad x_{34} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

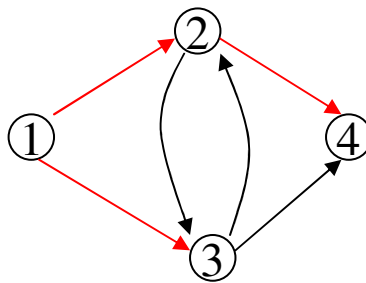


**Preuve:** Soit  $T$  un arbre partiel de  $G$ .



$$\begin{array}{c} x_{12} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{32} \quad x_{34} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

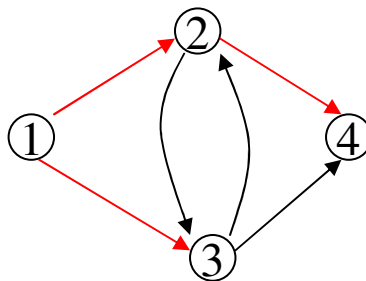
**Preuve:** Soit  $T$  un arbre partiel de  $G$ . Dénoteons par  $A(T)$  la sous matrice de  $A$  de dimension  $m \times (m - 1)$  qui est la matrice d'incidence de  $T$ .



	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{32}$	$x_{34}$
1	1	1	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	-1	0
3	0	-1	-1	0	1	1
4	0	0	0	-1	0	-1

**Preuve:** Soit  $T$  un arbre partiel de  $G$ . Dénotons par  $A(T)$  la sous matrice de  $A$  de dimension  $m \times (m - 1)$  qui est la matrice d'incidence de  $T$ .

$T$  étant un graphe simple et connexe, il s'ensuit que le rang de  $A(T)$  est égal à  $(m - 1)$  par le théorème précédent.



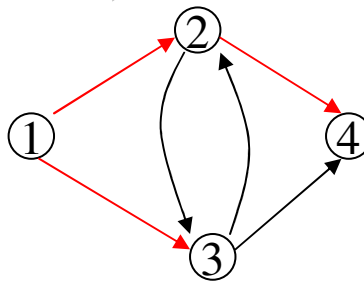
$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{cccccc}
 x_{12} & x_{13} & x_{23} & x_{24} & x_{32} & x_{34} \\
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & & 0 & & \\
 -1 & 0 & & 1 & & \\
 0 & -1 & & 0 & & \\
 0 & 0 & & -1 & & 
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

**Preuve:** Soit  $T$  un arbre partiel de  $G$ . Dénotons par  $A(T)$  la sous matrice de  $A$  de dimension  $m \times (m - 1)$  qui est la matrice d'incidence de  $T$ .

$T$  étant un graphe simple et connexe, il s'ensuit que le rang de  $A(T)$  est égal à  $(m - 1)$  par le théorème précédent.

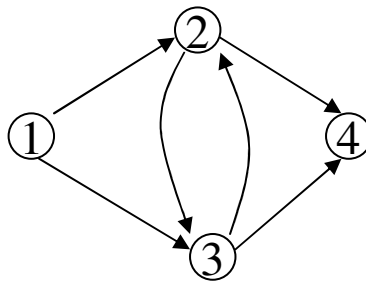
Alors toute sous matrice carrée de dimension  $(m - 1) \times (m - 1)$  obtenue en éliminant une ligne de  $A(T)$  est non singulière.

Or ces sous matrices sont également des sous matrices de  $A$ .



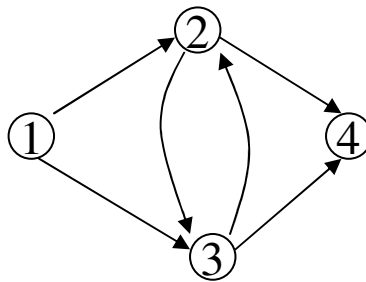
$$\begin{array}{c}
 x_{12} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{32} \quad x_{34} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc}
 \boxed{1} & \boxed{1} & & \boxed{0} & & \\
 -1 & 0 & & 1 & & \\
 0 & -1 & & 0 & & \\
 0 & 0 & & -1 & & 
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Soit  $B$  une sous matrice de  $A$  carrée non singulière de dimension  $(m - 1) \times (m - 1)$ .



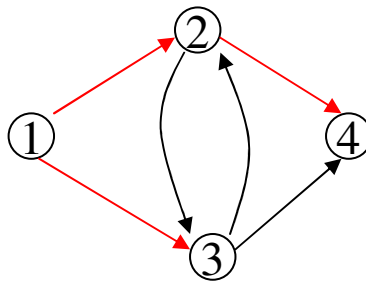
	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{32}$	$x_{34}$
1	1	1	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	-1	0
3	0	-1	-1	0	1	1
4	0	0	0	-1	0	-1

Soit  $B$  une sous matrice de  $A$  carrée non singulière de dimension  $(m - 1) \times (m - 1)$ .



$$\begin{array}{c}
 x_{12} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{32} \quad x_{34} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & 1 \\ 0 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}
 \end{array}$$

Soit  $B$  une sous matrice de  $A$  carrée non singulière de dimension  $(m - 1) \times (m - 1)$ .  $B$  est obtenue en éliminant une ligne de la matrice d'incidence d'un sous graphe partiel  $g$  de  $G$ .

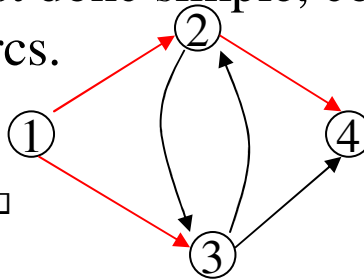


$$\begin{array}{c}
 x_{12} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{32} \quad x_{34} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & & 0 & \\
 -1 & 0 & & 1 & \\
 0 & -1 & & 0 & \\
 0 & 0 & & -1 & 
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Soit  $B$  une sous matrice de  $A$  carrée non singulière de dimension  $(m - 1) \times (m - 1)$ .  $B$  est obtenue en éliminant une ligne de la matrice d'incidence d'un sous graphe partiel  $g$  de  $G$ .

Le sous graphe  $g$  est donc simple, connexe et comporte exactement  $m$  sommets et  $(m - 1)$  arcs.

Donc  $g$  est un arbre partiel de  $G$ .  $\square$



$$\begin{array}{c}
 x_{12} \quad x_{13} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{32} \quad x_{34} \\
 1 \quad \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & 1 \\ 0 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{array} \right. \\
 2 \\
 3 \\
 4
 \end{array}$$



- **Théorème:** La matrice d'incidence  $A$  d'un graphe orienté simple et connexe composé de  $m$  sommets et de  $n$  arcs est de rang  $(m-1)$ .
- **Théorème:** Considérons la matrice d'incidence  $A$  d'un graphe orienté simple et connexe  $G$  composé de  $m$  sommets et de  $n$  arcs. Une sous matrice carrée de  $A$  de dimension  $(m-1) \times (m-1)$  est non singulière si et seulement si les arcs associés aux colonnes de cette sous matrice sont ceux d'un arbre partiel du graphe orienté  $G$ .

Toute base de la matrice d'incidence est telle que ses colonnes correspondent aux variables associées aux arcs d'un arbre partiel du réseau et vice-versa.

Les variables de base de toute solution de base du problème (FCM) correspondent aux arcs d'un arbre partiel du réseau et vice-versa.

## 5.3 Résolution du problème de flot à coût minimum

- Nous utilisons la variante du simplexe pour les problèmes de programmation linéaire avec variables bornées pour résoudre le problème de flot à coût minimum (FCM):

$$(FCM) \quad \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

Sujet à

(conservation de flot)

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} x_{ji} = \begin{cases} v & si \quad i = s \\ 0 & si \quad i \neq s, t \\ -v & si \quad i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} \quad (i, j) \in E$$

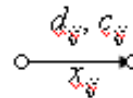
où  $B_i = \{j \in V : (j, i) \in E\}$  et  $P_i = \{j \in V : (i, j) \in E\}$

- Pour analyser une itération, supposons que nous disposons d'une solution de base réalisable  $x$  du problème.

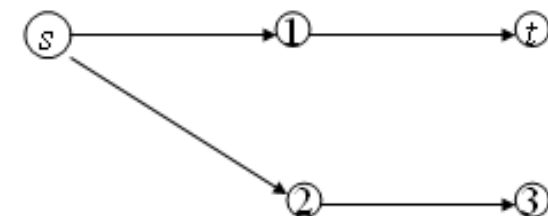
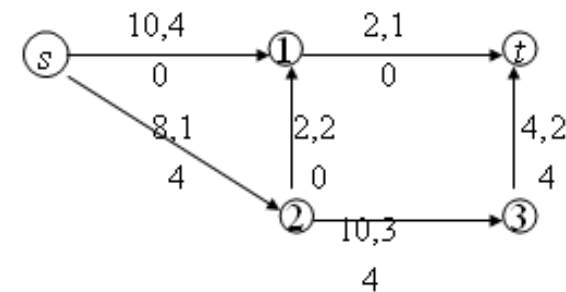
Donc les variables hors base  $x_{ij}$  sont telles que

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } d_{ij}.$$

Les variables de base  $x_{ij}$  correspondent aux arcs  $E(T)$  d'un arbre partiel  $T$  du réseau



$v = 4$



- **Critère d'entrée**

Calcul des coûts relatifs des variables  $x_{ij}$  :

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{a}_{\bullet ij}$$

devient

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

Pour les variables de base associées aux arcs  $(i, j) \in E(T)$

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0 \quad \forall (i, j) \in E(T)$$

$$\boldsymbol{\pi}^T = [\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_j, \dots, \pi_m]$$

$$\mathbf{a}_{\bullet ij} = \begin{matrix} & x_{ij} \\ & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \\ \leftarrow & \text{ligne } i \\ & \leftarrow \text{ligne } j \end{matrix}$$

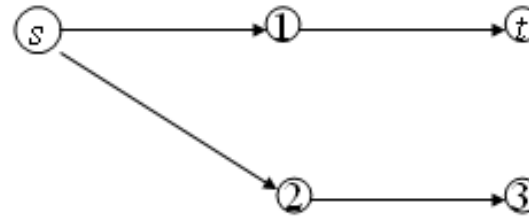
$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0 \quad \forall (i, j) \in E(T)$$

Puisque pour un arbre

(# d'arcs) = (# de sommets) - 1

le système précédent comportent  $(m - 1)$  équations associés aux arcs  $(i, j) \in E(T)$  et  $m$  inconnus  $\pi_i$  associés aux sommets  $i$  de  $T$  ( ou de  $A$ ).

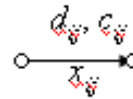
Or puisque toute sous matrice  $(m - 1) \times (m - 1)$  de la matrice d'incidence de  $T$  est non singulière, il suffit de fixer la valeur d'un des multiplicateurs et d'évaluer les autres avec le système d'équations.



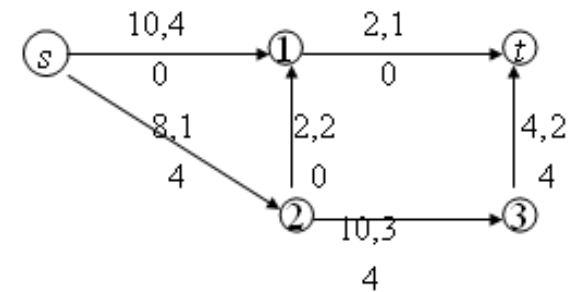
Le système d'équations étant triangulaire, les multiplicateurs sont très simplement évalués séquentiellement un à un.

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0 \quad \forall (i, j) \in E(T)$$

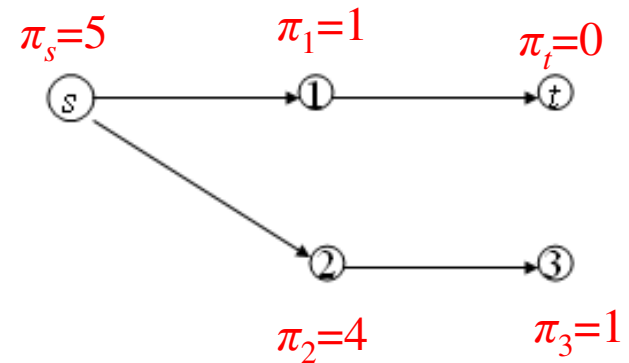
Reprenons notre exemple



- (1)  $0 = \bar{c}_{s1} = c_{s1} - \pi_s + \pi_1 = 4 - \pi_s + \pi_1$
- (2)  $0 = \bar{c}_{s2} = c_{s2} - \pi_s + \pi_2 = 1 - \pi_s + \pi_2$
- (3)  $0 = \bar{c}_{23} = c_{23} - \pi_2 + \pi_3 = 3 - \pi_2 + \pi_3$
- (4)  $0 = \bar{c}_{1t} = c_{1t} - \pi_1 + \pi_t = 1 - \pi_1 + \pi_t$



Posons  $\pi_t = 0$

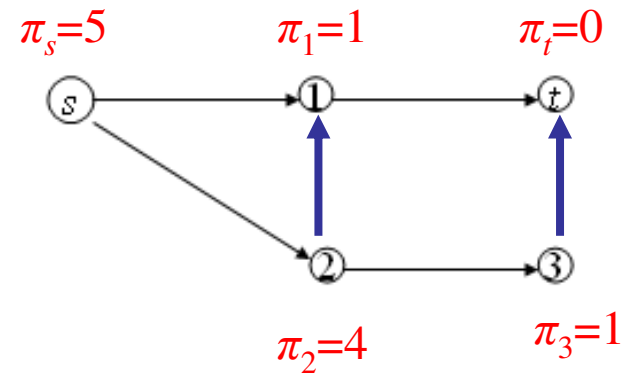
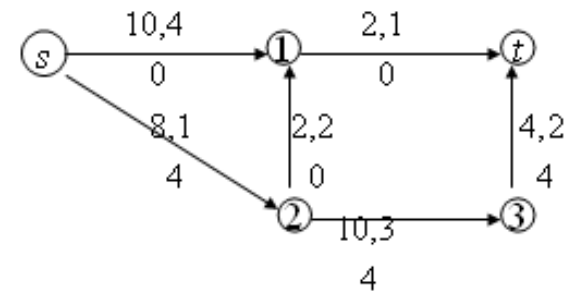
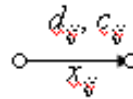


Après avoir déterminé les valeurs des multiplicateurs, déterminons les coûts relatifs

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi^T a_{\bullet ij}$$

des variables hors base associées aux arcs qui ne font pas partie de l'arbre partiel  $T$ .

Revenant à notre exemple



Après avoir déterminé les valeurs des multiplicateurs, déterminons les coûts relatifs

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$$

des variables hors base associées aux arcs qui ne font pas partie de l'arbre partiel  $T$ .

### Critère d'optimalité

Si

$$\bar{c}_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \notin E(T) \quad \text{où } x_{ij} = 0$$

et

$$\bar{c}_{ij} \leq 0 \quad \forall (i, j) \notin E(T) \quad \text{où } x_{ij} = d_{ij},$$

alors la solution actuelle est optimale.

Sinon choisissons une des variables (admissibles)  $x_{ij}$  où le critère n'est pas satisfait comme variable d'entrée.

Si la variable admissible  $x_{ij} = 0$ , alors sa valeur augmente, et si la valeur de  $x_{ij} = d_{ij}$ , alors sa valeur diminue.



Après avoir déterminé les valeurs des multiplicateurs, déterminons les coûts relatifs

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi^T a_{\bullet ij}$$

des variables hors base associées aux arcs qui ne font pas partie de l'arbre partiel  $T$ .

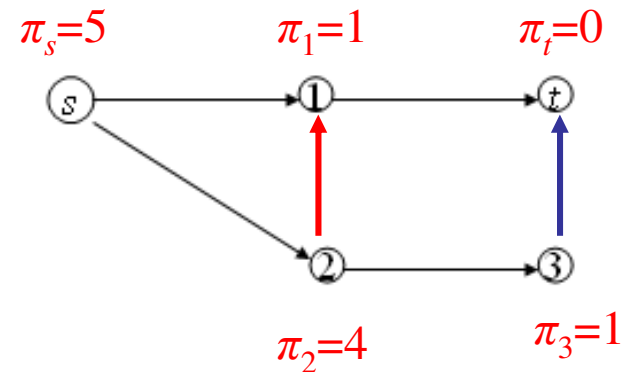
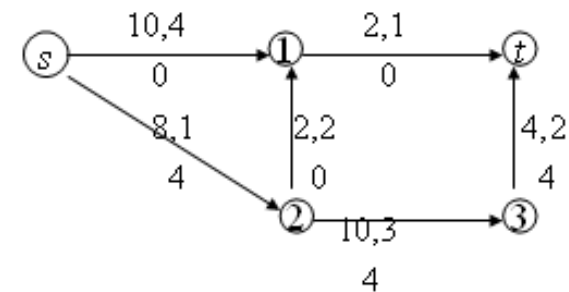
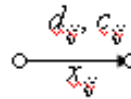
Revenant à notre exemple

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - \pi_2 + \pi_1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$\bar{c}_{3t} = c_{3t} - \pi_3 + \pi_t = 2 - 1 + 0 = 1$$

$x_{21}$  est admissible à augmenter

$x_{3t}$  est admissible à diminuer



# Étape 1: Choix de la variable d'entrée

Le critère pour choisir la variable d'entrée est modifié pour tenir compte des variables hors base  $x_j$  à leur borne supérieure  $u_j$  qui peuvent diminuer.

Ainsi, pour un indice  $j \in JB$

si  $x_j = 0$  et  $\bar{c}_j < 0$ , il est avantageux d'augmenter  $x_j$

si  $x_j = u_j$  et  $\bar{c}_j > 0$ , il est avantageux de diminuer  $x_j$

Déterminons  $\bar{c}_{s_1} = \min_{j \in JB} \{ \bar{c}_j : x_j = 0 \}$  et  $\bar{c}_{s_2} = \max_{j \in JB} \{ \bar{c}_j : x_j = u_j \}$

Soit  $\bar{c}_s = \min \{ \bar{c}_{s_1}, -\bar{c}_{s_2} \}$

Si  $\bar{c}_s \geq 0$ , alors la solution est optimale et l'algorithme s'arrête.

Si  $\bar{c}_s < 0$  et  $\bar{c}_s = \bar{c}_{s_1}$ , alors la variable  $x_s$  augmente; aller à l'étape 2.1.

Si  $\bar{c}_s < 0$  et  $\bar{c}_s < \bar{c}_{s_1}$ , alors la variable  $x_s$  diminue; aller à l'étape 2.2

Après avoir déterminé les valeurs des multiplicateurs, déterminons les coûts relatifs

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi^T a_{\bullet ij}$$

des variables hors base associées aux arcs qui ne font pas partie de l'arbre partiel  $T$ .

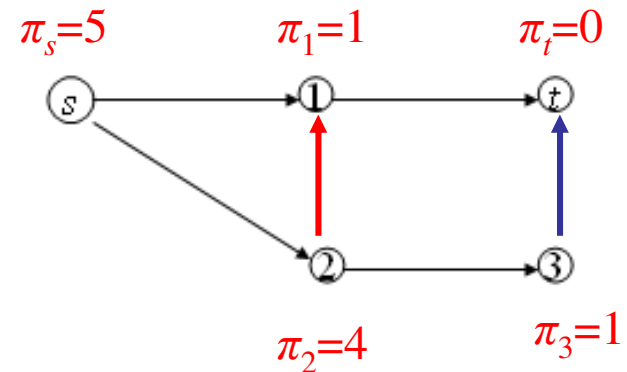
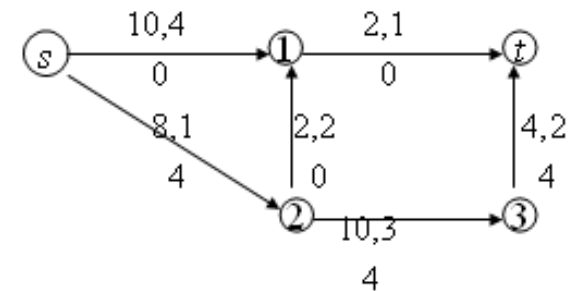
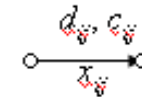
Revenant à notre exemple

$$\bar{c}_{21} = c_{21} - \pi_2 + \pi_1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$\bar{c}_{3t} = c_{3t} - \pi_3 + \pi_t = 2 - 1 + 0 = 1$$

$x_{21}$  est admissible à augmenter

$x_{3t}$  est admissible à diminuer



Variable d'entrée

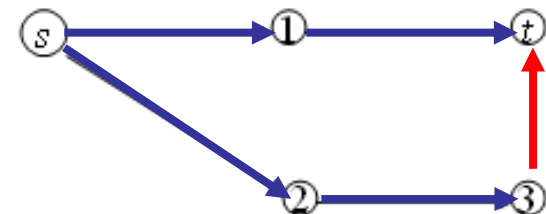
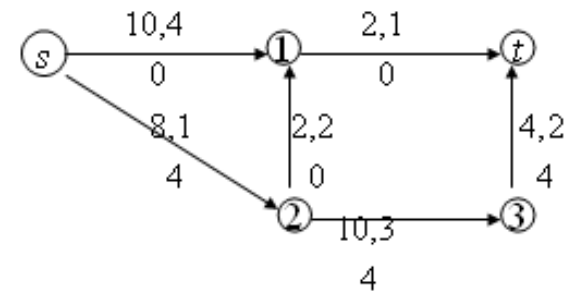
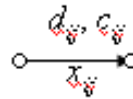
Un cycle fondamental par rapport à un arbre partiel est un cycle formé d'une arête du graphe ne se trouvant pas sur l'arbre partiel et d'arêtes de l'arbre.

- **Critère de sortie**

Nous voulons évaluer l'effet de la modification de la variable d'entrée sur les variables de base.

Il est facile de vérifier que seules les valeurs du flot des arcs du cycle fondamental associé à l'arc de la variable d'entrée sont modifiées.

Revenant à notre exemple:



$x_{3t}$  est une variable d'entrée

Il faut déterminer la plus grande modification  $\theta$  de la valeur de la variable d'entrée avant que

- i) la valeur d'une variable de base  $x_{ij}$  diminue à 0;
- ii) la valeur d'une variable de base  $x_{ij}$  atteint sa capacité  $d_{ij}$ ;
- iii) la valeur de la variable d'entrée passe d'une borne à l'autre.

Si le cas i) ou ii) limite la modification  $\theta$  de la variable d'entrée, la variable de base  $x_{ij}$  sort de la base pour être remplacée par la variable d'entrée. La nouvelle base correspond à un nouvel arbre partiel  $T'$  où l'arc  $(i, j)$  dans  $T$  est remplacé par l'arc de la variable d'entrée.

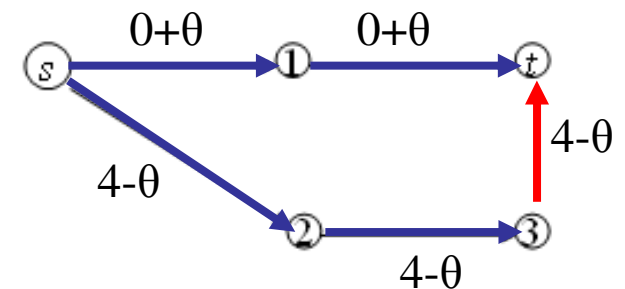
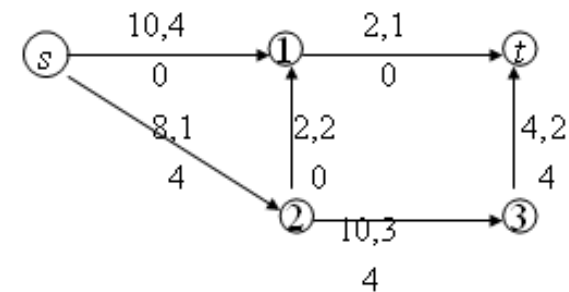
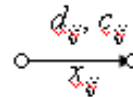
Si le cas iii) se produit, il suffit d'ajuster les valeurs du flot sur les arcs du cycle fondamental et de procéder à la prochaine itération avec la même base.

Complétons la résolution de notre exemple. La variable d'entrée  $x_{3t}$  diminue de  $\theta$ .

La plus grande valeur que  $\theta$  peut prendre est  $\theta = 2$  car alors le flot dans l'arc  $(1, t)$  atteint la capacité  $d_{1t} = 2$ .

La variable  $x_{1t}$  est remplacé par la variable  $x_{3t}$  dans la base.

La nouvelle solution et l'arbre partiel associé à la nouvelle base deviennent

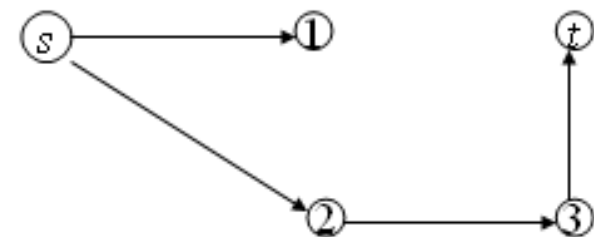
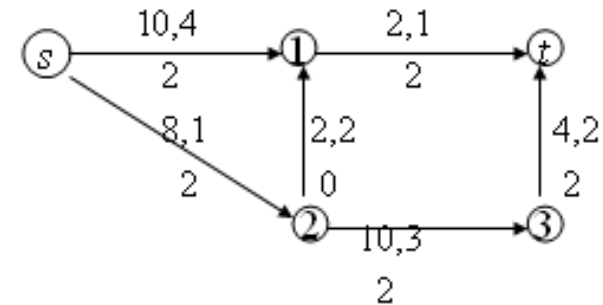
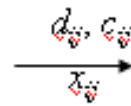


Complétons la résolution de notre exemple. La variable d'entrée  $x_{3t}$  diminue de  $\theta$ .

La plus grande valeur que  $\theta$  peut prendre est  $\theta = 2$  car alors le flot dans l'arc  $(1, t)$  atteint la capacité  $d_{1t} = 2$ .

La variable  $x_{1t}$  est remplacé par la variable  $x_{3t}$  dans la base.

La nouvelle solution et l'arbre partiel associé à la nouvelle base deviennent



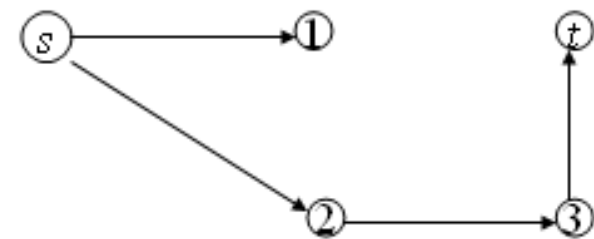
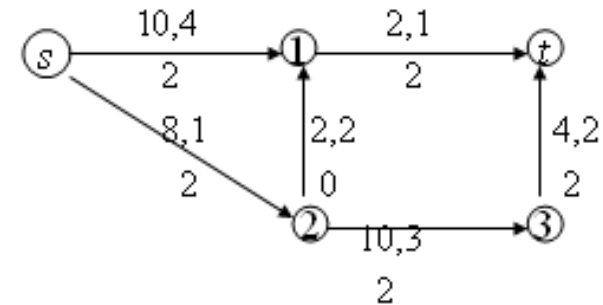
Deuxième itération :

**Critère d'entrée**

Déterminons les multiplicateurs en solutionnant le système:

- (1)  $0 = \bar{c}_{s1} = c_{s1} - \pi_s + \pi_1 = 4 - \pi_s + \pi_1$
- (2)  $0 = \bar{c}_{s2} = c_{s2} - \pi_s + \pi_2 = 1 - \pi_s + \pi_2$
- (3)  $0 = \bar{c}_{23} = c_{23} - \pi_2 + \pi_3 = 3 - \pi_2 + \pi_3$
- (4)  $0 = \bar{c}_{3t} = c_{3t} - \pi_3 + \pi_t = 2 - \pi_3 + \pi_t$

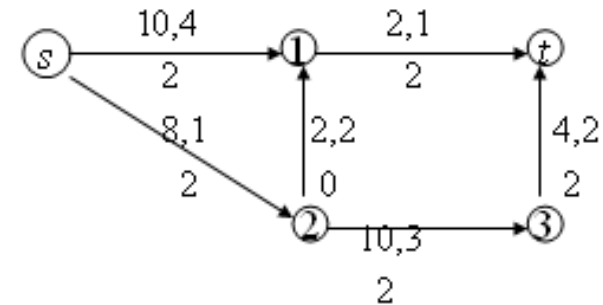
$\frac{d_{ij}, c_{ij}}{x_{ij}}$





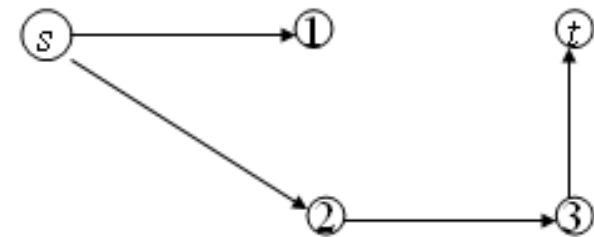
$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 &= \bar{c}_{s1} = c_{s1} - \pi_s + \pi_1 = 4 - \pi_s + \pi_1 \\
 (2) \quad 0 &= \bar{c}_{s2} = c_{s2} - \pi_s + \pi_2 = 1 - \pi_s + \pi_2 \\
 (3) \quad 0 &= \bar{c}_{23} = c_{23} - \pi_2 + \pi_3 = 3 - \pi_2 + \pi_3 \\
 (4) \quad 0 &= \bar{c}_{3t} = c_{3t} - \pi_3 + \pi_t = 2 - \pi_3 + \pi_t
 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{d_{ij}, c_{ij}}$



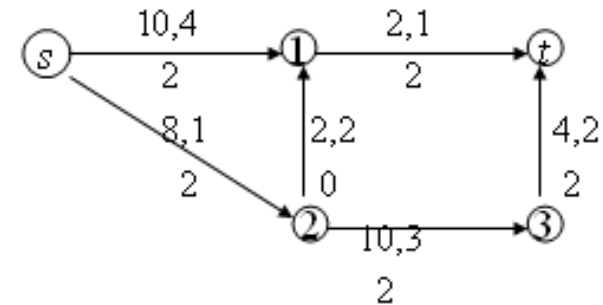
Posons  $\pi_t = 0$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad 0 &= 2 - \pi_3 + \pi_t \Rightarrow 0 = 2 - \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = 2 \\
 (3) \quad 0 &= 3 - \pi_2 + \pi_3 \Rightarrow 0 = 3 - \pi_2 + 2 \Rightarrow \pi_2 = 5 \\
 (2) \quad 0 &= 1 - \pi_s + \pi_2 \Rightarrow 0 = 1 - \pi_s + 5 \Rightarrow \pi_s = 6 \\
 (1) \quad 0 &= 4 - \pi_s + \pi_1 \Rightarrow 0 = 4 - 6 + \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 2
 \end{aligned}$$



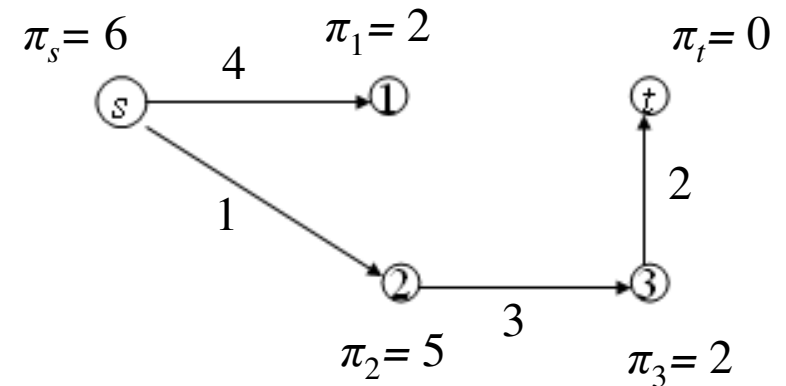
Nous pouvons déterminer les multiplicateurs en utilisant directement la représentation de l'arbre partiel en utilisant la définition des coûts relatifs

$$\frac{d_{ij}, c_{ij}}{x_{ij}}$$



$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0 \Leftrightarrow c_{ij} = \pi_i - \pi_j$$

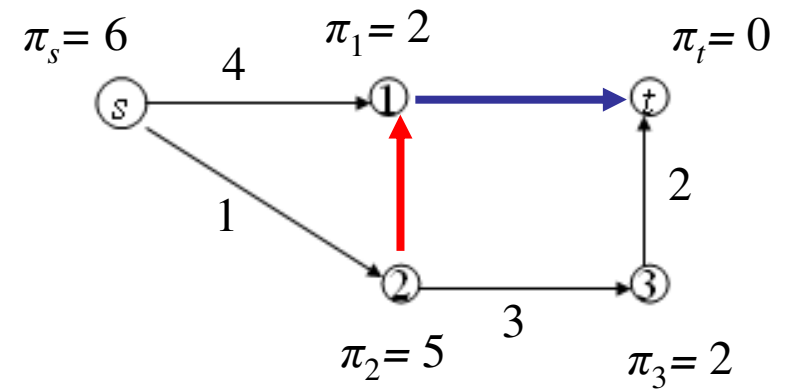
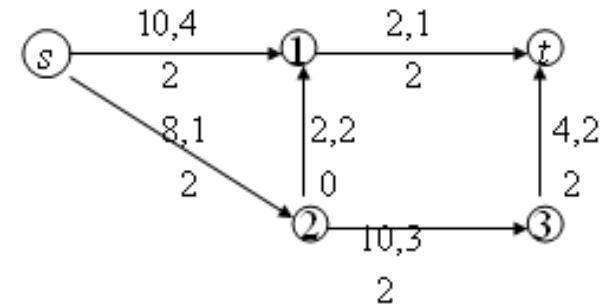
- (4)  $0 = 2 - \pi_3 + \pi_t \Rightarrow 0 = 2 - \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = 2$
- (3)  $0 = 4 - \pi_2 + \pi_3 \Rightarrow 0 = 3 - \pi_2 + 2 \Rightarrow \pi_2 = 5$
- (2)  $0 = 4 - \pi_s + \pi_2 \Rightarrow 0 = 1 - \pi_s + 5 \Rightarrow \pi_s = 6$
- (1)  $0 = 4 - \pi_s + \pi_1 \Rightarrow 0 = 4 - 6 + \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 2$



Évaluons maintenant les coûts relatifs des variables hors base

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0$$

$\frac{d_{ij}, c_{ij}}{x_{ij}}$



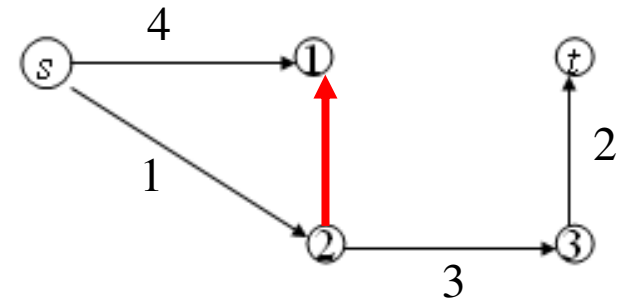
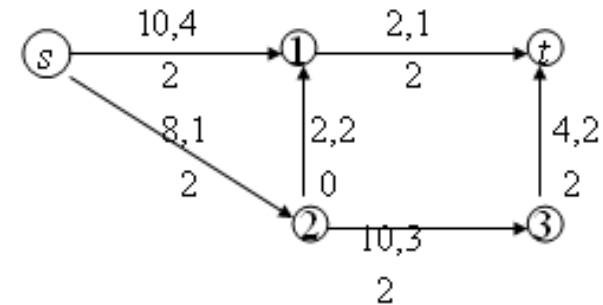
$$\bar{c}_{21} = c_{21} - \pi_2 + \pi_1 = 2 - 5 + 2 = -1$$

$$\bar{c}_{1t} = c_{1t} - \pi_1 + \pi_t = 1 - 2 + 0 = -1$$

Puisque  $x_{1t} = 2 = d_{1t}$  et  $\bar{c}_{1t} = -1$ ,  
alors  $x_{1t}$  n'est pas admissible.

Par contre  $x_{21} = 0$  et  $\bar{c}_{21} = -1$ , et ainsi  
 $x_{21}$  est variable d'entrée.

$\xrightarrow[\bar{x}_{ij}]{d_{ij}, c_{ij}}$



$$\bar{c}_{21} = c_{21} - \pi_2 + \pi_1 = 2 - 5 + 2 = -1$$

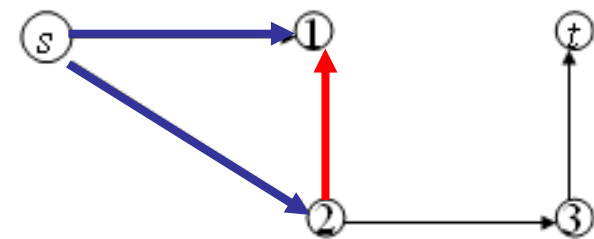
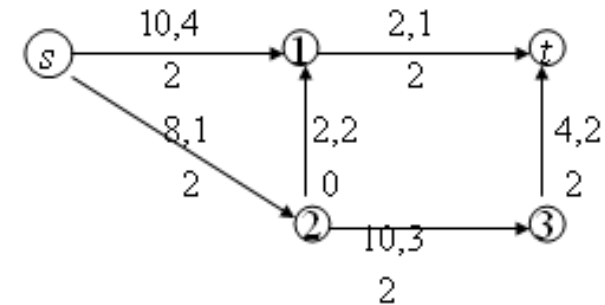
$$\bar{c}_{1t} = c_{1t} - \pi_1 + \pi_t = 1 - 2 + 0 = -1$$

Puisque  $x_{1t} = 2 = d_{1t}$  et  $\bar{c}_{1t} = -1$ ,  
alors  $x_{1t}$  n'est pas admissible.

Par contre  $x_{21} = 0$  et  $\bar{c}_{21} = -1$ , et ainsi  
 $x_{21}$  est variable d'entrée qui  
augmente.

Le cycle fondamental correspondant  
à l'arbre partiel devient

$\xrightarrow{x_{ij}}$



- **Critère de sortie**

Évaluons la plus grande valeur que peut prendre l'augmentation  $\theta$  de la variable d'entrée.

Alors  $\theta = 2$  puisque pour cette valeur,

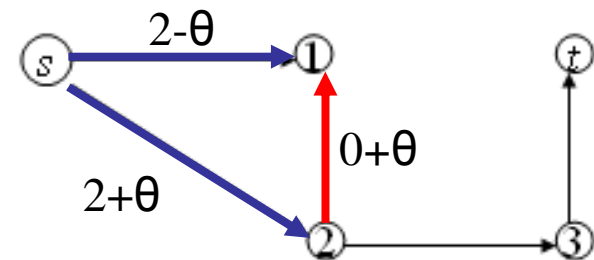
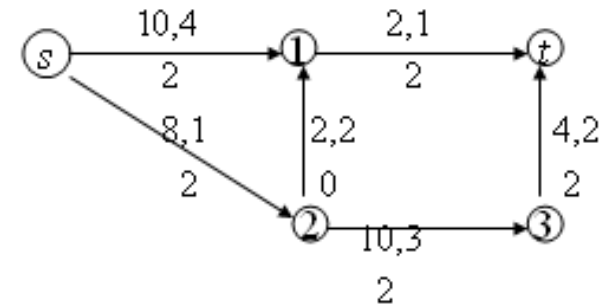
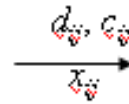
$$x_{s1} = 2 - 2 = 0$$

$$x_{21} = 0 + 2 = 2 = d_{21}.$$

Nous pouvons poursuivre avec la même base puisque  $x_{21} = 2 = d_{21}$ .

Nous préférons considérer  $x_{s1}$  comme variable de sortie.

La nouvelle solution et l'arbre partiel associé à la nouvelle base deviennent



- **Critère de sortie**

Évaluons la plus grande valeur que peut prendre l'augmentation  $\theta$  de la variable d'entrée.

Alors  $\theta = 2$  puisque pour cette valeur,

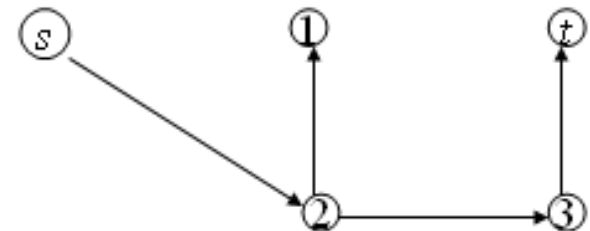
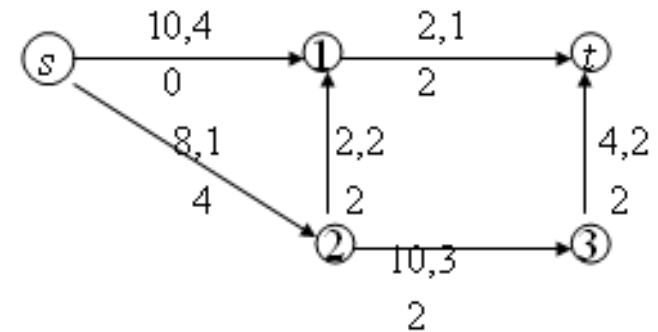
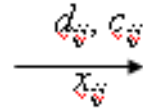
$$x_{s1} = 2 - 2 = 0$$

$$x_{21} = 0 + 2 = 2 = d_{21}.$$

Nous pouvons poursuivre avec la même base puisque  $x_{21} = 2 = d_{21}$ .

Nous préférons considérer  $x_{s1}$  comme variable de sortie

La nouvelle solution et l'arbre partiel associé à la nouvelle base deviennent



$$\frac{d_{ij}, c_{ij}}{x_{ij}} \rightarrow$$

Troisième itération :

### Critère d'entrée

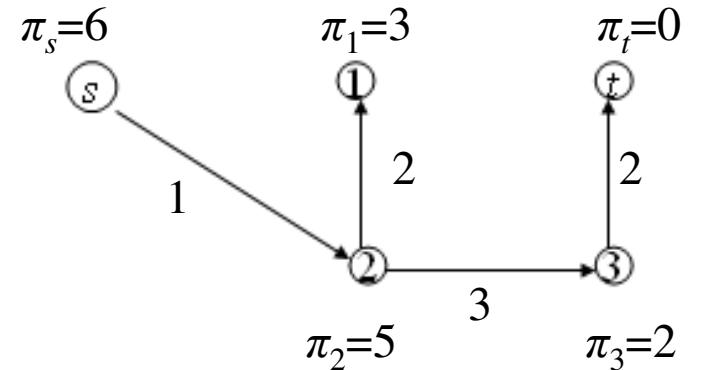
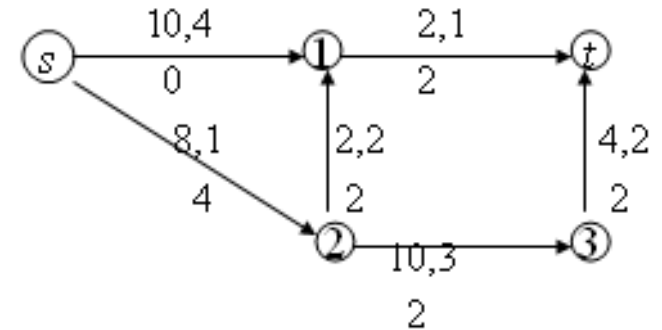
Déterminons les multiplicateurs en utilisant directement la représentation de l'arbre partiel et la définition des coûts relatifs

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j = 0 \Leftrightarrow c_{ij} = \pi_i - \pi_j$$

Évaluons maintenant les coûts relatifs des variables hors base

$$\bar{c}_{s1} = c_{s1} - \pi_s + \pi_1 = 4 - 6 + 3 = 1$$

$$\bar{c}_{1t} = c_{1t} - \pi_1 + \pi_t = 1 - 3 + 0 = -2$$





$$\bar{c}_{s1} = c_{s1} - \pi_s + \pi_1 = 4 - 6 + 3 = 1$$

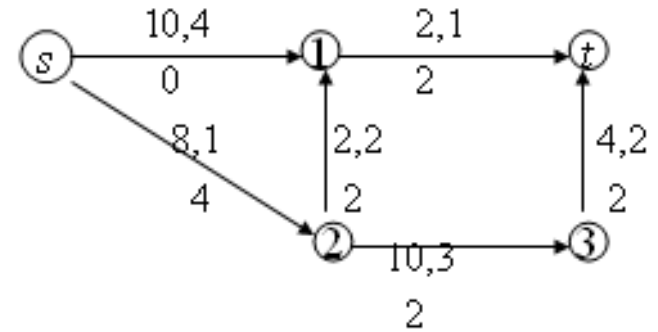
$$\bar{c}_{1t} = c_{1t} - \pi_1 + \pi_t = 1 - 3 + 0 = -2$$

La solution est optimale puisque

$$x_{s1} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{c}_{s1} = 1 > 0$$

$$x_{1t} = 2 = d_{1t} \quad \text{et} \quad \bar{c}_{1t} = -2 < 0$$

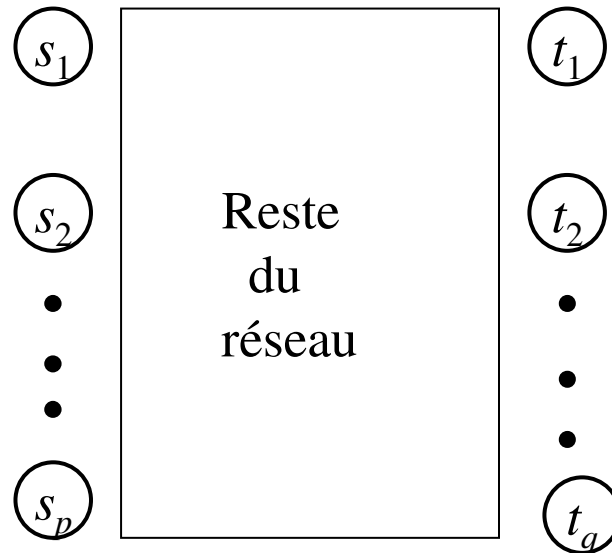
$\xrightarrow{d_{ij}, c_{ij}}$



- L'adaptation de la méthode du simplexe est grandement simplifiée grâce à la structure de la matrice d'incidence.
- Il y a beaucoup de dégénérescence dans ce type de problème. Ceci peut entraîner des itérations dégénérées (où les valeurs des variables ne changent pas) tout simplement pour changer de base. Certains résultats existent pour guider le choix des solutions de base d'une itération à l'autre pour réduire le nombre d'itérations dégénérées.

## Cas avec plusieurs sources et destinations

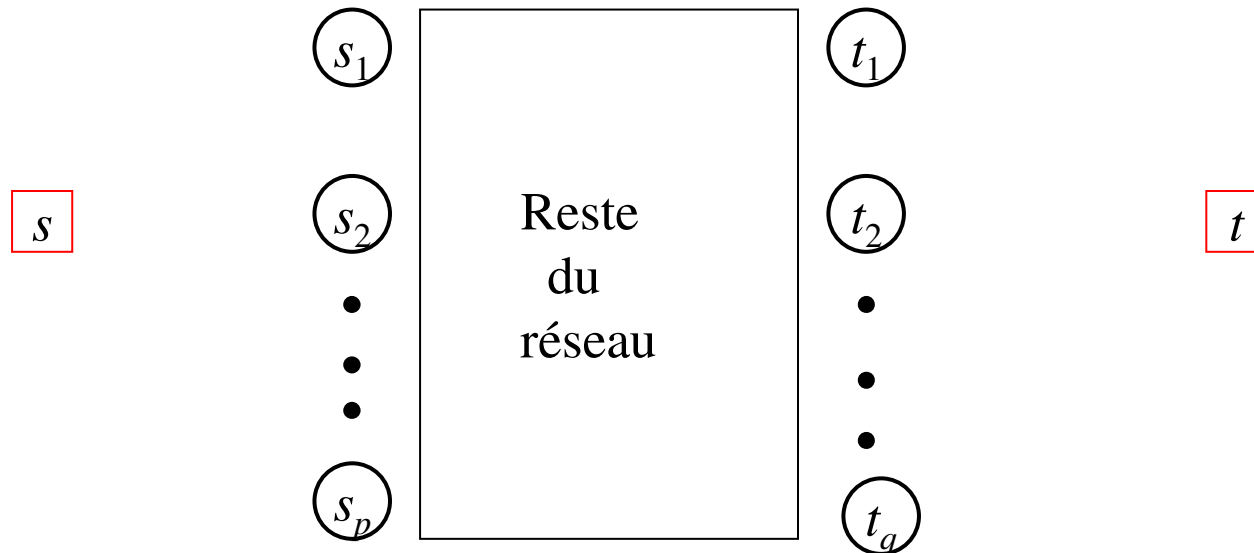
$p$  sources  $s_i \in V, i = 1, \dots, p$  où  $v_{s_i}$  dénote la quantité de flot qui origine à  $s_i$   
 $q$  destinations  $t_j \in V, j = 1, \dots, q$  où  $v_{t_j}$  dénote la quantité de flot qui arrive à  $t_j$



$p$  sources  $s_i \in V, i = 1, \dots, p$  où  $v_{s_i}$  dénote la quantité de flot qui origine à  $s_i$   
 $q$  destinations  $t_j \in V, j = 1, \dots, q$  où  $v_{t_j}$  dénote la quantité de flot qui arrive à  $t_j$

Construisons un réseau  $G^1 = (V^1, E^1)$

$$V^1 = V \cup \{s, t\}$$

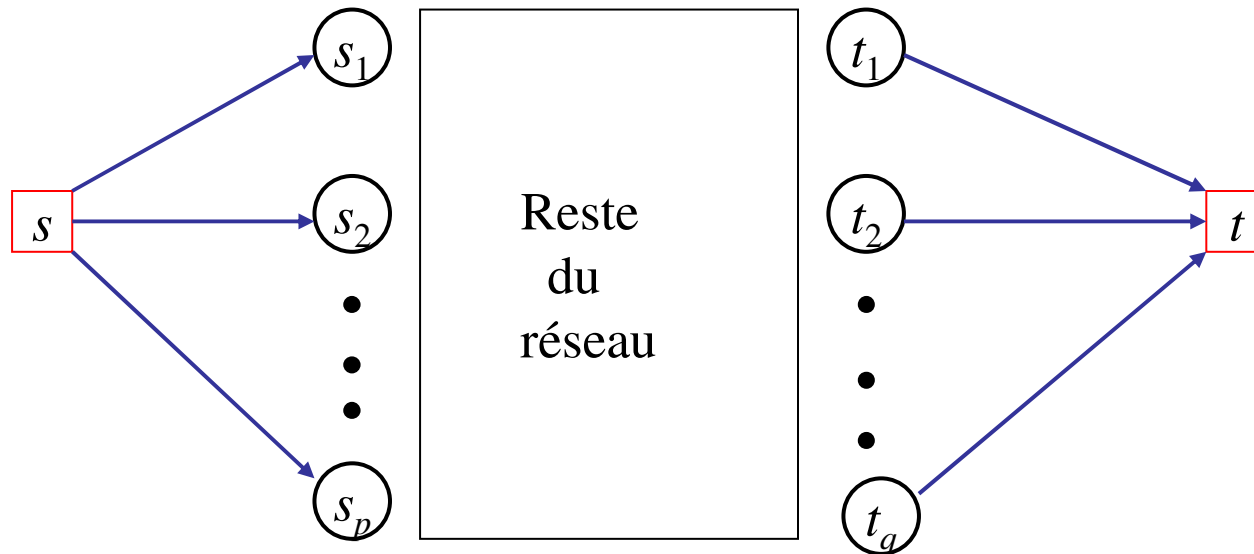


$p$  sources  $s_i \in V, i = 1, \dots, p$  où  $v_{s_i}$  dénote la quantité de flot qui origine à  $s_i$   
 $q$  destinations  $t_j \in V, j = 1, \dots, q$  où  $v_{t_j}$  dénote la quantité de flot qui arrive à  $t_j$

Construisons un réseau  $G^1 = (V^1, E^1)$

$$V^1 = V \cup \{s, t\}$$

$$E^1 = E \cup \{(s, s_i) : i = 1, \dots, p\} \cup \{(t_j, t) : j = 1, \dots, q\}$$



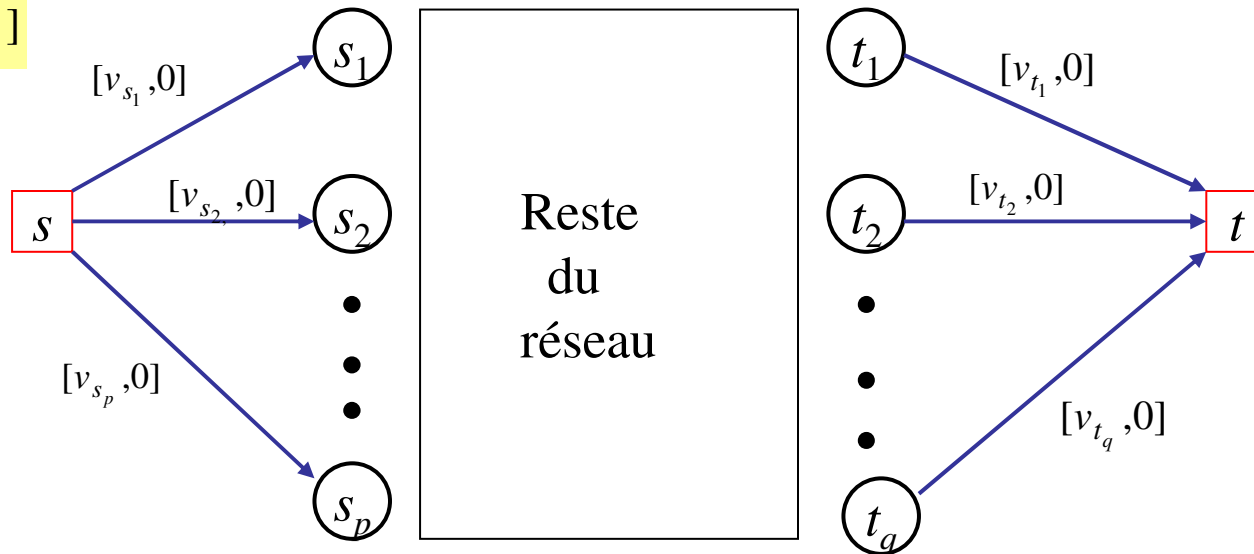
$p$  sources  $s_i \in V, i = 1, \dots, p$  où  $v_{s_i}$  dénote la quantité de flot qui origine à  $s_i$   
 $q$  destinations  $t_j \in V, j = 1, \dots, q$  où  $v_{t_j}$  dénote la quantité de flot qui arrive à  $t_j$

Construisons un réseau  $G^1 = (V^1, E^1)$

$$V^1 = V \cup \{s, t\}$$

$$E^1 = E \cup \{(s, s_i) : i = 1, \dots, p\} \cup \{(t_j, t) : j = 1, \dots, q\}$$

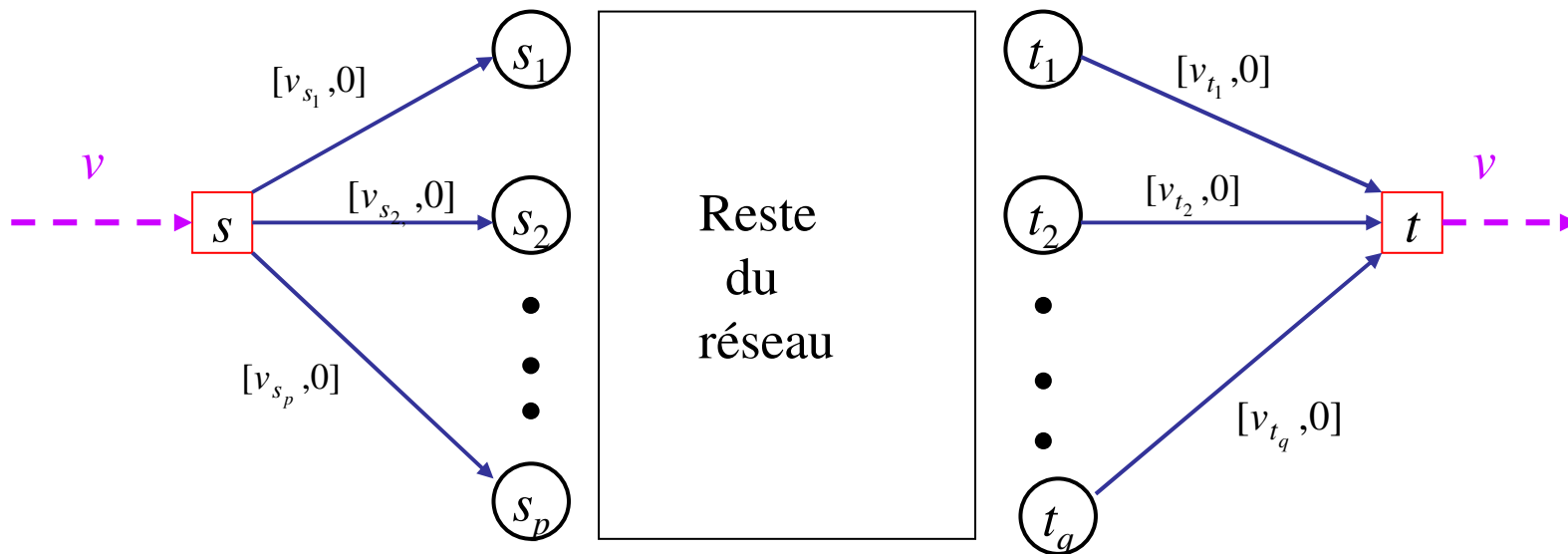
$[d_{ij}, c_{ij}]$



$p$  sources  $s_i \in V, i = 1, \dots, p$  où  $v_{s_i}$  dénote la quantité de flot qui origine à  $s_i$   
 $q$  destinations  $t_j \in V, j = 1, \dots, q$  où  $v_{t_j}$  dénote la quantité de flot qui arrive à  $t_j$

Construisons un réseau  $G^1 = (V^1, E^1)$

$$\text{Flot total } v = \sum_{i=1}^p v_{s_i} = \sum_{j=1}^q v_{t_j}$$



# Références

M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali, “ Linear Programming and Network Flows”, 3rd edition, *Wiley-Interscience* (2005), Chapitre 9

F.S. Hillier, G.J. Lieberman, “Introduction to Operations Research”, *Mc Graw Hill* (2005), Section 9.7

D. G. Luenberger, “ Linear and Nonlinear Programming ”, 2nd edition, *Addison-Wesley* (1984), Chapitre 5