

- Événement élémentaire
  - le résultat d'une **expérience incertaine**
- **Univers** des possibles (événement certain)
  - l'ensemble de **tous les événements** élémentaires
- Événement
  - **sous-ensemble de l'univers** des possibles
  - **ensemble d'événements** élémentaires

- Événements  $A$  et  $B$ 
  - $A \cup B$ : soit  $A$  soit  $B$  ont lieu
  - $A \cap B$ : les deux,  $A$  et  $B$  ont lieu
  - $A \subseteq B$ : si  $A$  a lieu, alors  $B$  aussi
  - $\bar{A}$ :  $A$  n'a pas lieu
  - $\emptyset$ : événement impossible
  - $\Omega$ : événement certain

- Fréquence

- une expérience est répétée  $n$  fois
- l'événement  $A$  a lieu  $r$  fois
- la **fréquence** est

$$f_n(A) = \frac{r}{n}$$

- la **probabilité** réfère à la fréquence en long terme

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$$

- **Axiomes** de probabilité
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1$
  - si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Événements indépendants

- l'occurrence de  $A$  ne donne aucune information sur  $B$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Événements exclusifs

- $A$  et  $B$  n'ont pas au lieu en même temps
- $A \cap B = \emptyset$

- La règle d'**addition**

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- événements **indépendants**:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

- événements **exclusifs**:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- La probabilité **conditionnelle**

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- événements **indépendants**:  $P(A|B) = P(A)$

- La règle de **multiplication**

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

- événements **indépendants**:  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- Le théorème de **Bayes**

- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

- La loi de la probabilité **totale**

- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

- Variables aléatoires

- $X$ : un ensemble (de valeurs possibles), par.ex.  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$
- une **variable aléatoire**  $X$  associe aux événements aléatoires possibles une valeur dans  $X$
- soit  $\xi \subseteq X$
- $P(X \in \xi)$ : **la probabilité** qu'un des événements aléatoires possibles corresponde à une valeur qui soit dans  $\xi$

- Distribution cumulative

- si  $X$  est un ensemble ordonné  $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$

- $P(X \leq x)$ : probabilité cumulative

- $F_X(x) = P(X \leq x)$ : fonction de probabilité cumulative

- cas multivarié:  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$

- $\hat{F}(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n}$ : distribution cumulative empirique

- $X$  est continue (par.ex.  $\mathbb{R}$ ):
  - $F_X(x)$  est une fonction continue
  - on dit que  $X$  est une **variable aléatoire continue**
- $X$  est discret (par.ex.  $\mathbb{Z}$ ):
  - $F_X(x)$  est une somme de “pas” (constante par parties)
  - on dit que  $X$  est une **variable aléatoire discrète**

- **Densité** d'une variable aléatoire continue

- $f(x)$  est la **fonction de densité** de  $X$ :  $P(X \in \xi) = \int_{\xi} f(x) dx$ .

- pour  $X \subseteq \mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

- pour  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ :  $f(x) = \frac{d^n F_X(x)}{dx_1 \dots dx_n}$

- **Distribution de probabilité** d'une variable aléatoire discrète

- $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

- $p(x_i) = P(X = x_i)$  est la probabilité que  $X = x_i$

- Union

- $P(X \in \xi_1 \text{ ou } X \in \xi_2) = P(X \in \xi_1) + P(X \in \xi_2) - P(X \in \xi_1 \text{ et } X \in \xi_2)$

- $P(X \in \xi_1 \text{ ou } X \in \xi_2) \leq P(X \in \xi_1) + P(X \in \xi_2)$

- Probabilité **jointe**

- $P(X = x, Y = y) = P(X = x \text{ et } Y = y)$  avec  $x \in X, y \in Y$

- pour la variable aléatoire  $Z = (X, Y)$ , qui prend ses valeurs dans  $X \times Y$ .

- Probabilité **conditionnelle**

- $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$  (si  $P(Y = y) \neq 0$ )

- **Indépendance**

- $X$  et  $Y$  sont indépendants ssi

$$P(X \in \xi, Y \in \zeta) = P(X \in \xi)P(Y \in \zeta)$$

- **distribution cumulative**:  $F_{X,Y}(X, Y) = F_X(X)F_Y(Y)$
- **fonction de densité**:  $f_{x,y}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$
- **distribution de probabilité**:  $p_{x,y}(x_i, y_j) = p_x(x_i)p_y(y_j)$

- **Espérance**

- la “moyenne” d’une variable aléatoire

- $\mu = E[X] = \int_X xf(x)dx$

- $\mu = E[X] = \sum_i x_i p(x_i)$

- $E[aX + b] = aE[X] + b$

- Variance

- la “largeur” d’une variable aléatoire

- $\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \int_X (x - E[X])^2 f(x) dx$

- $\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 p(x_i)$

- $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[aX]$

- Écart-type

- $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

- **Matrice de covariance**

- la “largeur” d’une variable aléatoire multivariée

- $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$

- $cov[\mathbf{X}] = \int_{\mathbf{X}} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^t f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

- $cov[\mathbf{X}]_{i,j} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$

- **Moments**

- $E[X^k]$ :  $k$ -ième **moment** de  $X$

- $E[(X - E[X])^k]$ :  $k$ -ième **moment centré** de  $X$

- Loi normale

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$

- $\mu$ : moyenne

- $\sigma^2$ : variance

- Loi normale multivariée

- $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$

- $\Sigma$ : matrice de covariance

- Loi des **grands nombres**

- $(X_1, \dots, X_n)$ :  $n$  variables indépendantes
- $E[X_1] = \dots = E[X_n] = \mu$
- $Var[X_1], \dots, Var[X_n] < \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\bar{X}] = \mu$

- Théorème de **limite centrale**

- La moyenne  $\bar{X}$  d'une séquence **iid** converge en probabilité **vers une loi Normale** avec espérance  $E[X]$  et variance  $Var[X]/n$